

48. 標準 MPS 法における ディリクレ境界条件の処理手法に関する研究

劉 行^{1*}・成 岱蔚¹・山田 正²

¹ 中央大学理工学研究科都市環境学専攻 (〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27)

² 中央大学理工学部都市環境学科 (〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27)

* E-mail: liuhang@civil.chuo-u.ac.jp

粒子法は格子を用いず連続体を粒子として表現する。格子法や有限要素法のように格子生成という作業は必要なく、大変形を容易に扱えるという利点がある。MPS 法は半陰的なアルゴリズムを適用する粒子法のひとつであり、基本的な考えかたは微分演算子に対する粒子間相互作用モデルを用いて離散化する。

標準 MPS 法で圧力を計算する際に、ディリクレ境界条件を用いて自由表面粒子を判定するが、圧力ポアソン方程式により算出される自由表面付近粒子の圧力は負になってしまう。時間増分を大きくすると負圧の影響は小さくなり、影響半径を大きくすると負圧の影響が大きくなることが明らかである。しかし粒子半径とは明らかな関係が見えなかった。

Key Words : MPS, Dirichlet boundary condition, negative pressure

1. はじめに

粒子法は、差分法や有限要素法と異なり、格子を使わず、連続体を有限個の粒子により表し、連続体の挙動を粒子の運動によって計算する方法である。差分法や有限要素法と比べると、粒子法の最も良い利点は煩雑な格子生成作業が必要なく、大きな変形を扱うことが容易にできることである。

MPS(Moving Particle Semi-implicit)法は越塚によって提案され、ナビエストークス方程式を圧力項及び圧力以外の項というふたつの部分に分けて計算を行う、圧力以外の項は陽的に計算され、圧力項のみを陰的に計算される。MPS 法の基本の考えかたは粒子間距離 r で表現する重み関数 ω に基づく、微分演算子に対する粒子間相互作用モデルを用いて離散化する。

圧力を計算する際には、ディリクレ境界条件により、自由表面粒子と判定された粒子の圧力は直接 0 を与え、それ以外の粒子の圧力は圧力ポアソン方程式により算出される。自由表面付近層粒子の圧力を計算する際には、より大きい基準粒子数密度を用いることで、ソース項は負になってしまい、圧力は負になる。ソース項に含まれる制御できるパラメータは時

間増分 Δt 、粒子半径 dL および影響半径 R_e である。 Δt を大きくすればするほど、負圧の影響は小さくなる。また、影響半径 R_e を大きくすればするほど、負圧の影響は大きくなる。しかし、粒子半径 dL の大きさは負圧の生成に明らかな影響が見えなかった。

2. MPS の概要

流れの支配方程式は式(1)、(2)に表す。

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{g} \quad (2)$$

式(1)は連続式、式(2)はナビエストークス方程式と呼ばれる。ここで、 ρ は流体密度、 $\mathbf{u}$ は流速ベクトル、 P は圧力、 μ は動粘性係数、 $\mathbf{g}$ は外力ベクトル、 t は時間、 ∇ は勾配演算子、 ∇^2 はラプラシアン演算子である。

非圧縮性流れの場合は、(1)は次式に書き換える。

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (3)$$

(1) 離散化手法

MPS 法では粒子間距離 r で表現する重み関数 ω を基づいて計算を行う。重み関数 ω は下記の式に示す。

$$\omega(r) = \begin{cases} \frac{r_e}{r} - 1 \\ 0 \end{cases} \quad (4)$$

ここで、 r_e は影響半径である。また、粒子数密度と呼ばれる n_i は重み関数 ω を用いて式(5)に定義される。

$$n_i = \sum_{j \neq i} \omega(|r_j - r_i|) \quad (5)$$

ここで、 r_i と r_j はそれぞれ粒子 i 、 j の位置ベクトルであり、 i は中心粒子、 j は近傍粒子と呼ばれる。また、初期状態で計算される粒子数密度 n^0 を基準粒子数密度と定義する。

支配方程式(1)、(2)が含まれる勾配とラプラシアン演算子は次式で計算される。

$$\nabla \phi_i = \frac{d}{n^0} \sum_{j \neq i} \left[\frac{\phi_j - \phi_i}{|r_j - r_i|} \frac{r_j - r_i}{|r_j - r_i|} \omega(|r_j - r_i|) \right] \quad (6)$$

$$\nabla^2 \phi_i = \frac{2d}{n^0 \lambda} \sum_{j \neq i} [(\phi_j - \phi_i) \omega(|r_j - r_i|)] \quad (7)$$

ここで、 ϕ は物理量、 d は次元数、 λ は計算定数。

$$\lambda = \frac{\sum_{j \neq i} |r_j - r_i|^2 \omega(|r_j - r_i|)}{\sum_{j \neq i} \omega(|r_j - r_i|)} \quad (8)$$

(2) 計算アルゴリズム

MPS は半陰的の粒子法、各時間ステップの計算は陽的な部分と陰的な部分という二つの段階を分けて計算を進める。計算手順を図-1 に示す。

ある時刻 k の位置ベクトル r 、速度ベクトル u お

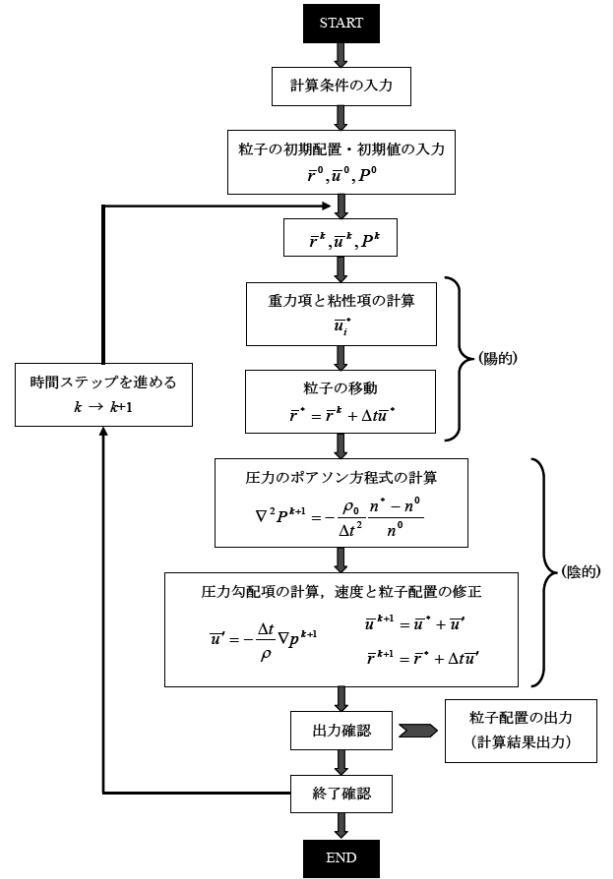


図-1 MPS 法計算アルゴリズム 1)

よび圧力 P がわかっている。 $k+1$ 時刻の位置ベクトル r 、速度ベクトル u および圧力 P を計算する際に、まずは陽段階の計算を行い、圧力項を考えずに、重力のみが粒子を動かせる。重力加速度により生じる仮の速度 u^* および仮の位置 r^* を算出する。

陽段階から算出された仮の位置ベクトルを用い、(5)式より流体粒子の仮の粒子数密度を計算する。圧力ポアソン方程式により、粒子の圧力を算出し、圧力勾配により、速度修正項を計算して、 $k+1$ 時刻の速度ベクトル u および位置ベクトル r は更新できる。圧力ポアソン方程式は次式に表す。

$$\nabla^2 P^{k+1} = - \frac{\rho}{(\Delta t)^2} \frac{n_i^* - n^0}{n^0} \quad (9)$$

(3) 自由表面粒子判定

自由表面粒子を判定する際にディリクレ境界条件を用いる、即ち、自由表面粒子と判定されれば、圧力を直接ゼロに与える。次式を満たす粒子は自由表面粒子と判定される。

$$n_i^* < \beta n^0 \quad (10)$$

ここで、 β は自由表面粒子の粒子数密度を決定するパラメータである。これまでの経験から、 $\beta = 0.97$ の値が良い²⁾。

3. 水柱崩壊の演算例

図-2 に示すような水柱崩壊の問題を標準 MPS 法で解いてみる。下記の表に表されるパラメータを用いて、1.0s の計算を行う。計算された結果は図-3 に示す。

0.02s の結果により、水柱はまだ崩壊していなかった、圧力の分布は空間的に滑らかであり、左下側の圧力は最も大きく、上に進めば、圧力は小さくなる。

0.4s の結果と 0.8s の結果を見ると、これらの時刻で水柱が崩壊した、圧力空間は乱雑である。

0.02s の結果により、自由表面の圧力が 0 であるが、自由表面付近の粒子の圧力が負になってしまった（黒い部分）。流体内部で圧力が負になってしまうということは不可能で、負圧の生成は標準 MPS 法のひとつの問題とされる。

表-1 水柱崩壊の計算条件

粒子半径 dL	0.025
影響半径 R_e	2.1dL
時間増分 dt	0.001s



図-2 水柱崩壊問題の模式図

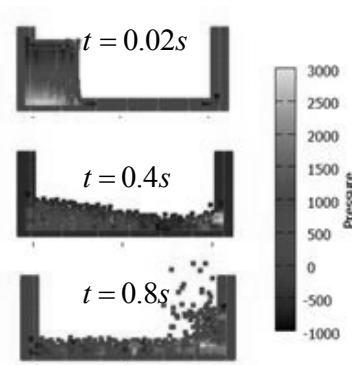


図-3 水柱崩壊の演算結果

4. 負圧が生じる原因

負圧が生じる原因は、自由表面付近粒子の圧力を計算する際に、より大きい基準粒子数密度 n^0 をソース項に正しくない値を与えることと考える。

n^0 を計算する際に、図-4a に示す黒い粒子のような流体内部に存在する粒子により計算する。即ち、

$$n^0 = \sum_{j=1}^{20} \omega(r_j - r_i)$$

圧力を計算する際に、陽段階の計算結果により、仮の粒子数密度を計算する必要がある。図-4b に示す、流体粒子は重力で沈下したため、底面に存在する流体粒子の仮の粒子数密度は標準粒子数密度 n^0 より大きくなり、式(9)右辺のソース項は正になり、底面流体粒子の圧力も正になる。

$$n_{bottom}^* = \sum_{j=1}^{25} \omega(r_j - r_i) > n^0$$

自由表付近粒子の圧力を計算する際に、式(9)に用いる n^0 は図-4a の黒い粒子のような内部に存在する粒子の基準粒子数密度、赤い粒子の基準粒子数密度ではない。赤い粒子を着目して、影響半径内に存在する近傍粒子の個数は黒い粒子の近傍粒子の個数より少ないため、ソース項は負になって、負圧が生じる。

$$n_{top}^* = \sum_{j=1}^{17} \omega(r_j - r_i) < n^0$$

また、図-4b に丸 1 と丸 2 を示す通りに、影響半径 R_e を大きくすればするほど、自由表付近で算出された仮の粒子数密度と標準粒子数密度の差は大きくなるため、影響半径を大きくすると、負圧の影響は更に大きくなるはず。

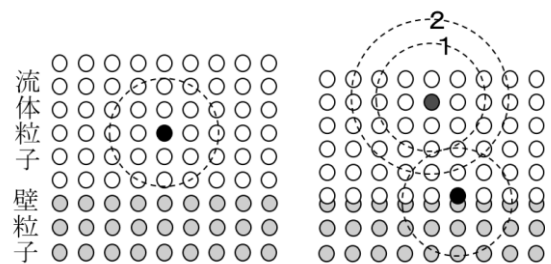


図-4a 陽段階の開始

図-4b 陰段階の開始

5. 負圧の生成に影響するパラメータ

ソース項に含まれる制御するパラメータは時間増分 Δt や基準粒子数密度 n^0 。基準粒子数密度 n^0 の値は影響半径の長さ R_e および粒子半径 dL から決まる。

1) Δt に対する影響

表-2 に示す計算条件を用いる, 0.01s の計算を行い, 違う Δt に対するそれぞれのケースの計算を行った. 各ケースの計算結果には図 5a, 5b, 5c, 5d に示す.

表-2 計算条件

影響半径	2.1dL		
粒子半径	0.008		
時間増分 Δt			
ケース 1	0.01s	ケース 3	0.001s
ケース 2	0.005s	ケース 4	0.0005s

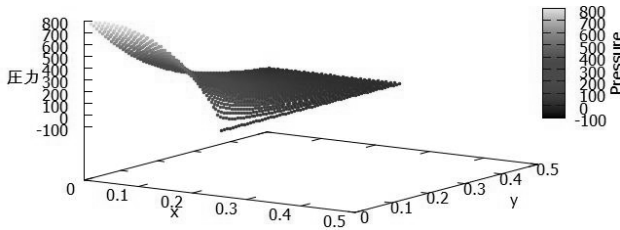


図-5a ケース 1 の計算結果

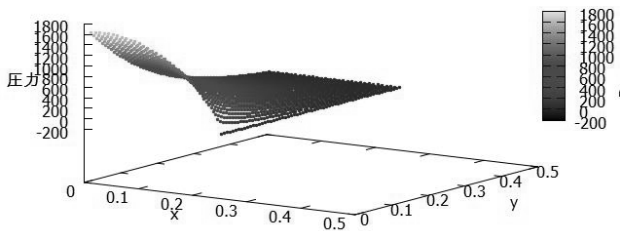


図-5b ケース 2 の計算結果

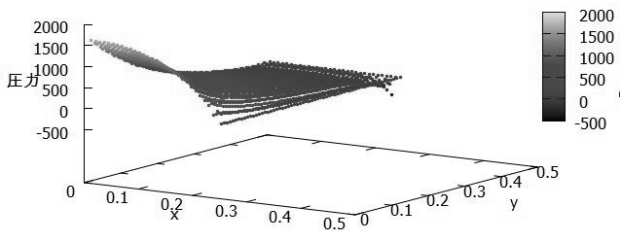


図-5c ケース 3 の計算結果

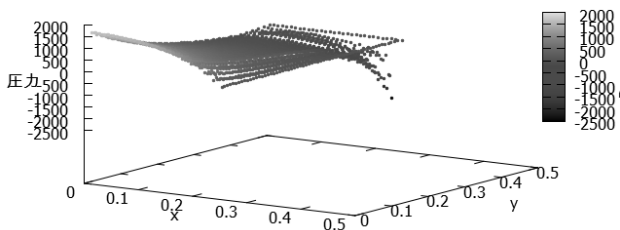


図-5d ケース 4 の計算結果

図-5a, 5b, 5c, 5d は各 Δt に対する圧力の空間分布である. 図-5a, 5b により, 負圧を持っている粒子があまり見えなかった. 図-5c により, 前のケースより, 自由表面の付近, 負圧を持っている粒子は少し見える, 図-5d より, 負圧を持っている粒子はよく見える.

2) 影響半径 R_e および粒子半径 dL に対する影響

前述 1) の計算結果により, Δt が 0.0005s の場合には, 負圧は最も明らかで, Δt を 0.0005s をセットしたうえで, 影響半径 R_e および粒子半径 dL を表-3 に示すそれぞれのケースの通りに計算が行われた. 各ケースで算出された負圧の粒子個数割を表-3 に示す.

表-3 Re および dL を変える負圧の個数割

$\Delta t = 0.0005s$				
$dL \backslash Re$	2.1dL	3.1dL	4.1dL	
0.012	14.6%	37.8%	36.2%	
0.010	12.2%	35.5%	43.2%	
0.008	20.2%	27.6%	57.4%	

6. まとめ

自由表面及び付近の粒子はより大きい基準粒子数密度 n^0 をソース項に正しくない値を与えることから, 負圧が生じる. ディリクレ境界条件により, 自由表面の粒子の圧力は直接 0 に与え, 流体内部で負圧は発生してしまう. ソース項に制御するパラメータ時間増分 Δt , 影響半径 R_e および粒子半径 dL を違う値を与えて, 負圧の生成への影響を解いてみた.

図-5a, 5b, 5c, 5d により, 時間増分 Δt を大きくすればするほど, 生成された負圧は大きくなる, 全体の圧力分布を見ると, 負圧の影響があまり見えなかった. 逆に自由表面付近で, 負圧の影響がよく見える.

同じ Δt で, 影響半径 R_e および粒子半径 dL をそれぞれのケースで計算を行った. 粒子半径 dL を同じ値を用いて, 影響半径を大きくすればするほど負圧を持っている粒子の個数は多くなったが, 影響半径 R_e を同じ値を用いると, 影響半径 R_e の大きさと負圧を持っている粒子個数の関係が明らかではなかった.

参考文献

- 1) 越塚誠一, 粒子法(丸善, 2007)
- 2) 田中 正幸, 益永 孝幸: 疑似圧縮性効果による MPS の安定性と圧力の平滑化, 日本計算工学会, 2008