

46. 降雨の不確実性に起因する流出高の不確実性の 時間発展を記述したFokker-Planck方程式 に関する基礎的研究

吉見 和紘^{1*}・諸岡 良優¹・山田 正²・山田 朋人³

¹中央大学大学院理工学研究科都市環境学専攻（〒112-8551東京都文京区春日1-13-27）

²中央大学理工学部都市環境学科（〒112-8551東京都文京区春日1-13-27）

³北海道大学大学院工学研究院環境フィールド工学部門（〒060-8628北海道札幌市北区北13条西8丁目）

* E-mail: yoshimi@civil.chuo-u.ac.jp

流出過程における降雨の不確実性がもたらす流出高の不確実性を理論的かつ数学的に厳密に説明した。特に本研究では、降雨時系列の乱れ成分の標準偏差と降雨強度の関係が、ある関数系に従う事を考慮して、流出高の確率密度関数の時間発展を記述するFokker-Planck equation(FPE)から流出高の不確実性を求める手法を示した。

これは、XバンドMPレーダデータとサイト内の地上雨量データを比較した結果、その差分値の標準偏差は地上雨量計で観測された降雨強度の簡単な関数で近似的に表現できる事に起因する。このことから、流出高に関するFPE中の乱れ成分の標準偏差を降雨強度の関数として表現できるようになった。以上から、既存の研究では定数として扱っていた乱れ成分の標準偏差が時間とともに変化する形式で表現でき、降雨の不確実性が及ぼす流出高の不確実性をより厳密に再現できるようになった。

Key Words : *the theory of stochastic process, standard deviation, the Fokker-Planck equation, X-band MP radar, ground raingauge, probability density function*

1. はじめに

近年、XバンドMPレーダ等のレーダ観測網の発達により、時空間的により精緻な降雨データが得られるようになってきている。しかし、現状では雨滴の一粒一粒がいつどこにどれだけの量降ったかを完璧に追跡することは不可能である。また、私たちが取り扱うデータには観測誤差も内包されているのが常である。

つまり、河川計画の見直しや立案の際に用いられる降雨データは不確実性を有するという事である。降雨データに不確実さが内在するのであれば、それを基に算出される流量や水位もまた不確実性を有するはずである。

降雨データから流出量を見積もる際に用いられる手法として、従来から数多くの流出モデルが提案されており、中でも、貯留関数法、タンクモデルや合理式などは、降雨から流量を算定する代表的な手法として、河川計画の立案に際して広く用いられてい

る。上記流出モデルの入力データとして降雨データを用いるが、降雨データは多種多様であり、観測方法の違いや観測場所等によって、降雨データの時間分解能、空間分布は異なる。例えば、降雨の観測手法には、地上雨量計を用いる方法やレーダ雨量計を用いるものがある。

著者らは、流出過程に確率過程論を導入することで、降雨の不確実性がもたらす流出高の不確実性を求める手法を提案している¹⁾。また、提案した理論的枠組を用いることで、河川水位の不確実性を外力、堤防の破壊確率を耐力として、信頼性解析が可能である事を示している²⁾。

本研究では、降雨時系列の乱れ成分の標準偏差は降雨強度の増加とともに増加する事を、レーダ雨量と地上雨量データの分析結果から明らかにした。また、その関係から乱れ成分の時系列の標準偏差を降雨強度の関数として表し、Fokker-Planck方程式に適用した。

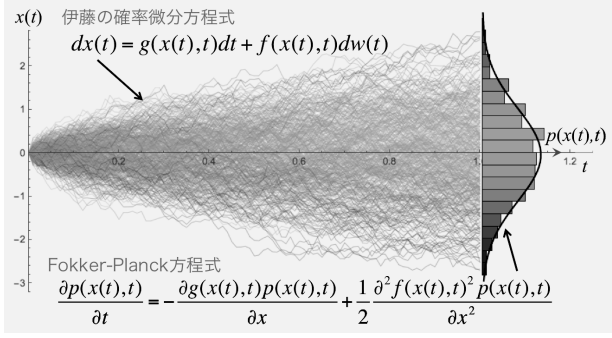


図-1 伊藤の確率微分方程式と Fokker-Planck 方程式の関係. 一つ一つの確率経路が一つの確率微分方程式の解であり, ある時点の確率経路の存在確率 $p(x(t), t)$ を満たす偏微分方程式が Fokker-Planck 方程式である.

2. 流出計算への確率過程論の導入

山田³⁾は単一斜面を流域の最小スケールと考え, 連続式と運動則から以下に示す常微分方程式型の流出計算手法を示しており, 本研究ではこの(1)式を流出計算の基礎式として用いている.

$$\frac{dq_*}{dt} = a_0 q_*^\beta (r(t) - q_*) \quad (1)$$

ここに, q_* : 流出高[mm/h]である. a_0 および β はそれぞれ物理的に決定される流出パラメータである. ここで, 入力降雨強度が $r(t) = \bar{r}(t) + r'(t)$ として, 平均値とその周囲の変動成分(降雨時系列の乱れ成分)で表現されるとし, (1)式を差分形式で書き改めれば, (2)式を得る.

$$dq_* = a_0 q_*^\beta (\bar{r} - q_*)dt + a_0 q_*^\beta \sigma \sqrt{T_L} dw \quad (2)$$

ここに, 右辺第一項が決定論的な項, 右辺第二項が確率論的な項を表しており, dw は Wiener 過程に従う時系列 $w(t)$ の微小時間変化量であり正規分布 $N(0, \sqrt{dt})$ に従う. これは, 降雨時系列の乱れ成分がホワイトノイズであるという仮定で成立する. ここで, $\sigma \sqrt{T_L} dw$ として表現できるのは, G.I.Taylor の拡散理論⁴⁾から説明することができ, σ は乱れた降雨時系列 $r'(t)$ の標準偏差[mm/h], T_L はその時定数[h]である. 確率微分方程式がある確率的な現象の一本の標本路を記述するのに対して, Fokker-Planck 方程式はその標本路の存在確率密度関数の時間発展を記述することが数学的に証明されている⁵⁾. 詳しくは付録に記載するので参照されたい. この関係を利用すると, (2)式と同一の現象を異なる視点から記述できる Fokker-Planck 方程式 ((3)式) を得る.

$$\frac{\partial p(q_*, t)}{\partial t} = -\frac{\partial a_0 q_*^\beta (\bar{r} - q_*) p(q_*, t)}{\partial q_*} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 (a_0 q_*^\beta \sigma \sqrt{T_L})^2 p(q_*, t)}{\partial q_*^2} \quad (3)$$

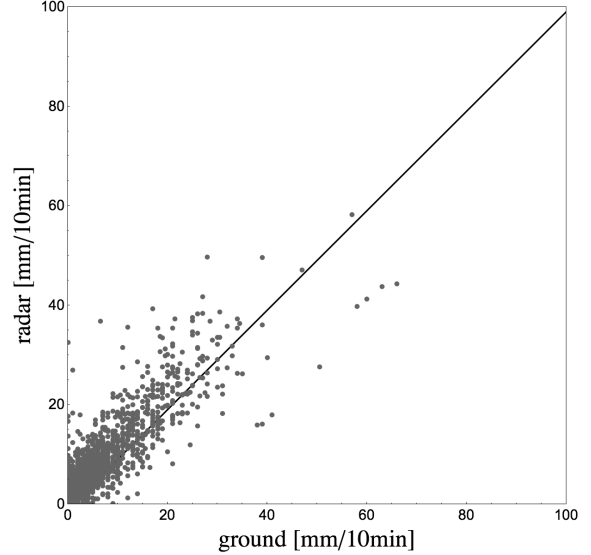


図-2 X バンド MP レーダ雨量 (関東) と同サイト内の地上雨量との比較.

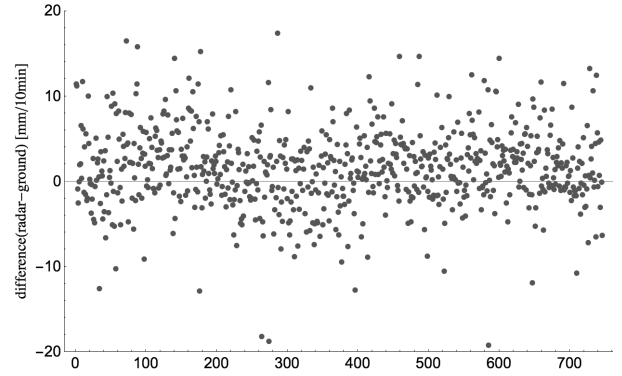


図-3 X バンド MP レーダ雨量 (関東) と同サイト内の地上雨量との差 [mm/60min.]. 横軸はデータ数であり, 縦軸の値は, 地上雨量値を基準として上空のレーダ雨量値の差をとったもの.

この(3)式が流出高の確率密度関数の時間発展を記述する Fokker-Planck 方程式である. 図-1に示すのは, 確率微分方程式と Fokker-Planck 方程式の関係を分かり易く示したものである.

3. 降雨強度時系列の分析

一般に降雨の不確実性を明確に定義することは難しいが, 著者らは観測した降雨データに含まれる不確実性として, 物理的なふらつきと観測の精度によるふらつきがあると考えている. 例えば, 図-2に示しているのは, X バンド MP レーダ雨量値と同サイト内の地上雨量値を比較したものである. いずれも時間雨量であり, 地上雨量計の位置に対応するメッシュのレーダ雨量を用いている. また, 図-3に示すのは, 各メッシュ毎にレーダ雨量値と地上雨量値の差をとったものである.

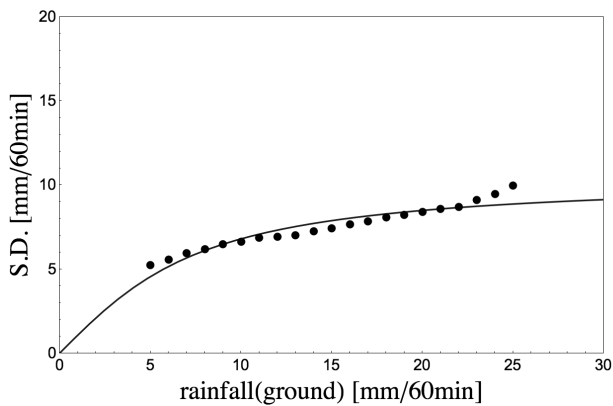


図-4 降雨強度に対する降雨時系列の乱れ成分の標準偏差（時間降雨強度）．図中の青線は上記関係の近似関数．

4. 結果と考察

降雨時系列の乱れ成分の標準偏差と降雨強度の関係は図-4のようになり、

$$\sigma(r(t)) = a \cdot \tan^{-1}(b \cdot r(t)) \quad (4)$$

として近似的に関数で表現することができる． a 、 b は標準偏差 $\sigma(r(t))$ の傾向を決定づけるパラメータである．この関係を用いて Fokker-Planck 方程式((3)式)を解くことで、降雨強度を変数としての乱れ成分 $\sigma(r(t))$ の影響を考慮した流出高の確率密度関数の時間発展 $PDF(q*(t))$ を得る．

図-5には、 σ を定数とした場合の流出高の確率密度関数の時間発展（上図）、 σ を降雨強度 $r(t)$ の関数とした場合の流出高の確率密度関数の時間発展（下図）をそれぞれ示している．下図の結果は図-4の傾向に従うため、降雨強度が大きくなるに従って、 $PDF(q*(t))$ の標準偏差も大きくなる．一方で、ハイドログラフ逓減部では、図-4の傾向から標準偏差が0に近づくため、 $PDF(q*(t))$ の標準偏差も小さくなる．図-6には、 $PDF(q*(t))$ ($t=3.0, 5.4, 7.0$ hour)を示している．

以上から、降雨強度時系列の乱れ成分の標準偏差 σ を降雨強度の関数とした場合、例えば、今回のケースでは降雨強度が5mm/h以上では $PDF(q*(t))$ の標準偏差も緩やかに変化するが、降雨強度が5mm/h以下では乱れ成分の標準偏差の急な変化とともに、 $PDF(q*(t))$ の標準偏差も急な変化をする．つまり、(4)式によって乱れ成分の標準偏差が決定されるため、降雨強度が小さい時（概ね5mm/h以下）と降雨強度が大きい時（概ね5mm/h以上）で $PDF(q*(t))$ の標準偏差の差は大きくなる．

5. まとめ

本研究では、著者らが提案している確率過程論に

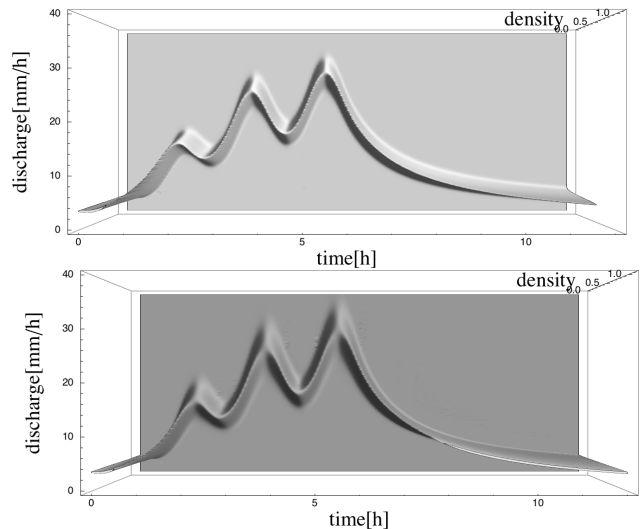


図-5 降雨時系列の乱れ成分 σ を定数として（時間的に一定： $\sigma=5\text{mm/h}$ ）与えた場合（上図）と $\sigma=\sigma(r(t))$ として降雨強度の関数で与え場合（下図）の Fokker-Planck 方程式の数値計算結果． $\sigma=\sigma(r(t))$ とした図-4の結果に従うため、各時刻の確率密度関数のすその広がり大きく変わっていることがわかる．

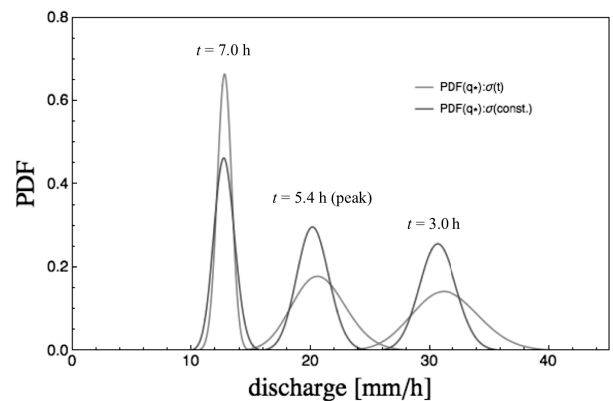


図-6 $\sigma=\text{const.}$ と $\sigma=\sigma(r(t))$ とした場合の流出高の確率密度関数の比較 ($t=3.0, 5.4$ (peak 付近), 7.0 hour)．ハイドログラフのピーク ($t=5.4$ hour)までは、 $\sigma=\sigma(r(t))$ の $PDF(q_*)$ の方が標準偏差が大きいが、ハイドログラフ逓減部では $\sigma=\text{const.}$ の $PDF(q_*)$ の方が標準偏差が大きい．これは、(4)式の関係から明らかである．

基づいた流出計算手法において、Fokker-Planck方程式内の乱れ成分の標準偏差 σ を、一定値とした場合と降雨強度の関数 $\sigma(r(t))$ とした場合の $PDF(q*(t))$ の標準偏差について検証した．

以下に本研究で得られた知見を列挙する．

- ・ XバンドMPレーダ雨量と地上雨量計の差（時間降雨強度）を降雨の乱れ成分として、その標準偏差と降雨強度の関係を見ると、単調増加する関数で近似できることを示した．
- ・ この σ の特徴を、流出高のFokker-Planck方程式を解く際に用いることで、乱れ成分の標準偏差が

時々刻々変化する場合は流出高の確率密度関数の時間発展PDF($q^*(t)$)を得ることができた。

謝辞：本研究の一部は、文部科学省科学研究費補助金(基盤A, 課題番号26249072)の支援を受けて実施された。ここに記して謝意を表します。

付録A 伊藤の補題

一次元空間において、時系列 $x(t)$ の微分 dx が次式に従って動いている時、この時系列 $x(t)$ の動きを伊藤過程という。

$$dx(t) = g(x(t), t)dt + \sigma(x(t), t)dw(t) \quad (A-1)$$

ここに、 $g(x(t), t)$, $\sigma(x(t), t)$ は時間 t と時系列 $x(t)$ の任意の関数である。また、 $dw(t)$ はウィーナー過程 $w(t)$ の微小時間変化量であり、平均0, 標準偏差 $\sqrt{dt}$ の正規分布に従っている。伊藤過程とは一般化したウィーナー過程の定数部分を x と t の任意関数でより一般化したものである。このように、空間座標 $x(t)$ の増分が上式の様に右辺のドリフト項と確率増分項で表されるとき、上式を伊藤の確率微分方程式という。

以下からは伊藤の補題の概要を記す。正規分布 $N(0, dt)$ に従うブラウン運動をする確率過程 $x(t)$ があるとき、時間 t と確率過程 $x(t)$ の関数 $f(x(t), t)$ の微小変化 df は、

$$df(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial t} dt + \frac{\partial f(x)}{\partial x} dx + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} (dx)^2 \quad (A-2)$$

で表される。ある任意関数 $f(x)$ について、 $f(x+dx)$ を x の近傍で Taylor 展開すると、

$$df(x) = \frac{f'(x)}{1!} dx + \frac{f''(x)}{2!} (dx)^2 + \frac{f'''(x)}{3!} (dx)^3 + \dots \quad (A-3)$$

となる。解析学では一般的に、関数 $f(x)$ の微分 $df(x)$ は、

$$df(x) = f'(x)dx \quad (A-4)$$

であるが、確率解析学では、

$$df(x) = f'(x)dx + \frac{1}{2} f''(x)(dx)^2 \quad (A-5)$$

が成立する。これは、例えば任意の空間座標 x の微小時間増分 $dx(t)$ を

$$dx(t) = y(t)dt + z(t)dw(t) \quad (A-6)$$

として $dx(t)^2$ を計算した場合、

$$\begin{aligned} dx(t)^2 &= y(t)^2 dt^2 \\ &+ 2y(t)z(t)dt dw(t) \\ &+ z(t)^2 dw(t)^2 \end{aligned} \quad (A-7)$$

となり、結局 $dx(t)^2$ が、

$$dx(t)^2 = z(t)^2 dw(t)^2 + O(dt) \quad (A-8)$$

$$dx(t)^2 = z(t)^2 dt + O(dt) \quad (A-9)$$

となるからである。これは、ブラウン運動をする分子の軌跡 $w(t)$ の微小変化 $dw(t)$ の二乗は、微小時間増分となる事に起因する。つまり、 $w(t)$ が正規分布 $N(0, dt)$ に従うブラウン運動するのであれば、

$$dw(t)^2 = dt \quad (A-10)$$

が成立する。上式の意味するところは、ブラウン運動の微小変化分の二乗は、不確実性を有しない時間の微小変化分に対応するという事である。

同様に、 $dx(t)^n$ は、

$$dx(t)^n = 0 \quad (n = 3, 4, 5, \dots) \quad (A-11)$$

となる。したがって、(A-3)式は dt のオーダーで2次の項まで考えれば良いので、

$$\begin{aligned} df(x) &= f'(x) \{ y(t)dt + z(t)dw(t) \} \\ &+ \frac{1}{2} f''(x) z(t)^2 dt \end{aligned} \quad (A-12)$$

$$\begin{aligned} df(x) &= \left\{ f'(x)y(t) + \frac{1}{2} f''(x)z(t)^2 \right\} dt \\ &+ f'(x)z(t)dw(t) \end{aligned} \quad (A-13)$$

となる。これが、伊藤の補題である。

参考文献

- 1) 吉見和紘, 山田正, 山田朋人: 確率微分方程式の導入による降雨流出過程における降雨の不確実性の評価, 土木学会論文集 B1(水工学), 59, pp.259-264, 2015.
- 2) Wang, Chao-Wen, 吉見和紘, 辛島史嗣, 山田正: 降雨の不確実性に基づく確率過程論を導入した堤防の信頼性評価, 土木学会論文集 G(環境), 2015 (登載決定).
- 3) 山田正: 山地流域の非線形性に関する研究, 水工学論文集, 47, pp.259-264.
- 4) G.I.Taylor: Diffusion by continuous movements, *Proceeding of the Royal Society A*, 20, pp.196-211.
- 5) 保江邦夫: 数値確率解析入門, 森毅・齋藤正彦・野崎昭弘編, pp.116-119, 2000.