44. Euler・Lagrange的方法による1次元不定流計算手法の提案に向けた基礎的研究

小石　一宇[1*]・山田　正[2]

[1]中央大学大学院理工学研究科都市環境学専攻（〒112-8551東京都文京区春日1-13-27）

[2]中央大学理工学部都市環境学科（〒112-8551東京都文京区春日1-13-27）

＊ E-mail: *ichiu@civil.chuo-u.ac.jp*

不定流の基礎式は非線形偏微分方程式であるため数値的に解析される．著者は1次元不定流における Euler・Lagrange的方法による数値計算手法を提案し，Euler的方法と比べて空間の刻み幅の伸縮に起因する人工拡散があることが分かったが，比較対象とした各種Euler的方法においても人工拡散があるか調べた．

Key Words : *unsteady flow, flood flow, Eulerian scheme, CFL Condition*

1. はじめに

河川における非定常流は土木分野では不定流と呼ばれる．不定流の基礎方程式は2つ以上の非線形偏微分方程式で記述されるため，何らかの物理的仮定や数理的近似を用いて基礎式を線形化ないしは簡単化しなければ解析解が得られない．したがって，不定流を解く際には一般的に数値解析法がとられているが，微分方程式を離散化して解く数値解法は近似解法の1つであるため，方程式の解として正しい解が得られているとは限らない．

著者は洪水波の急変部の波形を精度良く再現するために1次元不定流におけるEuler・Lagrange的方法による差分法に基づく数値計算手法を提案した[1)]．Euler的方法で求めた数値解と比べたところ洪水波形が広がっていることが確認でき，さらに，その人工拡散が空間の刻み幅Δxの伸縮に起因することを突き止めた．しかし，著者が提案した手法の比較対象であるEuler的方法自体が時間や空間の刻み幅にどのような影響を受けているのかを調べる必要が生じたため，本研究では一様水路を対象に同一条件下で1次元不定流の数値解の比較を行った．

2. 各種数値計算手法

一様広幅矩形水路における Euler 的方法による 1 次元不定流の連続式と運動量方程式を以下に示す．

$$\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial vh}{\partial x}=0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial q}{\partial t}+\frac{\partial vq}{\partial x}=-gh\frac{\partial h}{\partial x}+ghi_0-ghI_f \tag{2}$$

ここに，h：水深[m]，q：単位幅流量[m^{2}s^{-1}]，v：断面平均流速[ms^{-1}]，g：重力加速度[ms^{-2}]，i_0：河床勾配，I_f：摩擦勾配である．本研究では以上の基礎方程式を9つの差分scheme(Center Space法，Center Space法(implicit)，Upwind法，Lax-Friedrich法，Leap-Frog法，Lax-Wendroff法，Mac-Cormack法，CIP法，CIP-CSL2法)で解いた．Center Space法は時間微分は前進差分，空間微分は中心差分を用いた方法であり，時間の離散化はexplicitとimplicitの両方で解いた．また，Upwind法は空間微分に風上差分を用いた方法で，中心差分に比べて移動性と人工粘性による分散性をもつ[2)]．時間微分において現在の値に両隣の平均をとる方法はLax-Friedrich法と呼ばれる．Leap-Frog法とLax-Wendroff法は洪水流の解析によく用いられる手法であり，どちらも2次精度の解法である．前者は時空間的に水深と流量を交互に求める手法であるのに対し，後者は差分近似におけるTaylor展開を2次の項までとった手法である．また，予測子と修正子を用いた2段階Lax-Wendroff法は別名でMac-Cormack法と呼ばれている．最後に，CIP法は移流項の計算を座標の移動に置き換えて水深や流量を3次関数で近似した高精度解法である．CIP法のみ保存形の移動流項は適さないため，(2)式は流速に関する運動方

程式に書き換えた．CIP-CSL2法は保存形移流項にも使える保存保証型CIP法であり，基礎式を領域で積分することで移流項を発散型から勾配型にした式に対して積分量を3次関数で近似して求める解法である．

3. 計算条件

数値実験では，日本の河川の中流域を仮定して川幅 100m の長方形断面，勾配 1/2000，長さ 500km，粗度係数 0.02 の一様河道を設定した．初期条件は流量に基底流量 200m³s⁻¹，水深に基底流量に対する等流水深を与え，境界条件は上流端で(3)式に示すピーク流量 2000m³s⁻¹，ピーク時間 15h の 1 山の流量ハイドログラフと，その流量に対応する等流水深を与えた．連続式と運動量方程式のそれぞれに初期条件と上流端で境界条件を 1 つずつ与えているため，下流端では境界条件を与えていない．

$$q(t) = \frac{Q_{base}}{B} + \frac{(Q_{peak} - Q_{base})}{B}\left\{\frac{t}{15}\exp\left[1-\frac{t}{15}\right]\right\}^{20} \tag{3}$$

4. 各種数値計算手法による数値解の比較

(1) ⊿tと⊿xを固定して全差分Schemeを比較

Δtを72s，Δxを2kmに固定して全差分schemeの洪水波形を比較したものを図-1に示す．図-1より，Lax-Friedrich法＞Upwind法＝CIP-CSL2法＞Leap-Frog法＝Center Space法(implicit)＞Lax-Wendroff法＞Center Space法＝CIP法＝Mac-Cormack法の順に洪水波形が広がっていることが確認できる．この結果より著者の予想に反してLax-Wendroff法は計算安定化のための人工拡散の影響がUpwind法やその他の差分schemeに比べて相対的に小さいこと，Lax-Friedrich法は数値解が突出して違うため方程式の解法として適切でないことが分かる．また，Center Space法は時間の離散化法がexplicitとimplicitで洪水波形が異なる結果が得られた．

(2) 各差分Schemeに対して⊿tと⊿xを変えて比較

次に，各差分schemeに対してどちらか片方のΔt・Δxを72s，2kmに固定して，もう片方のΔx・ΔtをΔx=0.5km，1km，2km，5km，10km・Δt=4.5s，9s，18s，36s，72s，144sと変えて計算したものを比較した．その結果，Δxを小さくすればするほど洪水波形の広がりは小さくなり，また，Δtを大きくすればするほど洪水波形は変わらないか大きくなることが各差分schemeに対する数値実験から分かった．特にUpwind法はこの傾向が顕著に現れ，Leap-Frog法とMac-Cormack法は時間の刻み幅の変化に対して洪水波形はほとんど変化しなかった．

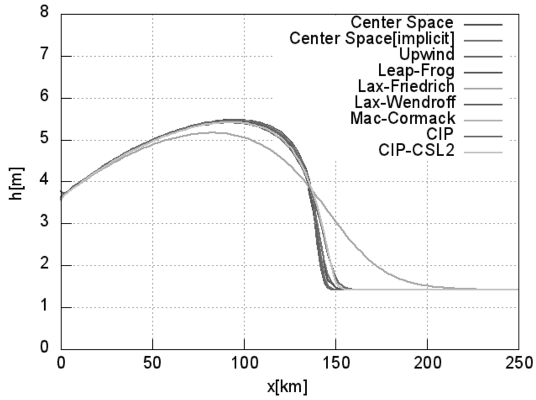

図-1 全差分Schemeの波形比較(⊿t=72[s]，⊿x=2[km])

空間微分は Δx を小さくすればするほど微分の定義式における極限をとっていることに相当するため，洪水波形が収束するのは当然の結果であろう．しかし，時間微分に関しては同様の説明はできない．数値解析において安定に計算するための条件として(4)式に示す CFL 条件がある．

$$\nu = \frac{c}{\Delta x / \Delta t} = \frac{c\Delta t}{\Delta x} \le 1 \tag{4}$$

ここに，ν：クーラン数，c：移流速度 [ms⁻¹]，$\Delta x/\Delta t$：計算速度である．CFL条件を用いて以上の結果を考察すると， CFL条件が1に近い条件で洪水波形が最も収束し，かつ計算が安定するといえるだろう．また，既往の研究[3]よりCFL条件が1に近い条件で体積保存率が良いという結果が得られているため，この条件下で数値解は方程式の解としてより適している．

5. まとめ

本研究で得られた知見を以下に示す．

1) Euler的方法による各種差分schemeを比較したところ，schemeによって洪水波形が広がりに違いがある．
2) Δxを小さくすればするほど洪水波形の広がりは小さくなり，Δtを大きくすればするほど洪水波形は変わらないか大きくなる．
3) CFL条件が1に近い条件で洪水波形が最も収束し，かつ計算が安定する．

参考文献

1) 小石一宇，成岱蔚，山田正：ラグランジュ的方法による 1 次元不定流の数値計算手法と境界条件の検討，土木学会全国大会, 2015.
2) 高橋亮一：計算力学と CAE シリーズ 3　差分法，pp.128-131, 培風館, 1991.
3) 矢本 貴俊，山田正：一次元不定流計算の計算精度に関する研究，土木学会全国大会, 2015.