43. 連続群論法による相似変換を用いた乱流境界層方程式の解析手法の提案

劉　佳[1*]・山田　正[2]

[1]中央大学大学院（〒112-8551 東京都文京区春日1-13-27）

[2]中央大学（〒112-8551 東京都文京区春日1-13-27）

＊ E-mail: *ryuka.0215@civil.chuo-u.ac.jp*

本研究では，連続群論のアプローチを用いて，偏微分方程式の相似変換を導く手法を用い，乱流境界層の速度分布を導く手法あるいはモデルを提案する．得られた乱流境界層の速度分布は従来の対数分布分布を包含するものとなっており，これで，乱流境界層の速度分布を決まった．また，本研究で用いた連続群論法による相似変換は，現象の物理性を考える必要がなく，自動的に偏微分方程式の相似変換を導く．最後に，本研究で提案する手法は，様々な境界層問題に応用できると考えられる．

Key Words : *similarity transformation, partial differential equation, nonlinear diffusion equation,continuous group theory*

1. はじめ

流体力学の世界では，偏微分方程式は様々な現象を説明するため，広く応用されている．例えば，境界層方程式は非線型偏微分方程式である．しかし，非線型偏微分方程式を厳密に解くのは困難なため，数学の分野でも1つの大きなトピックであり，現在も精力的に研究が行われている．また，従来の流体力学の教科書[1)]では層流境界層において境界層厚の変化を仮定するプラントルの境界層方程式とブラジウスによるアプローチは書かれている．しかし，他方，乱流境界層においては，速度分布を仮定するカルマンの運動量方程式によるアプローチの記載があるものの，乱流に応用したプラントル - ブラジウス型のアプローチは書かれていない．そのため，本研究では，連続群論のアプローチを用いて，偏微分方程式の相似変換を導く手法を用い，乱流境界層の風速分布を導く手法またモデルを提案する．

2. 連続群論法による相似変換の手法

相似変換は偏微分方程式を解析的に解く方法の1つである．相似変換の手法は大きく分けて4つがあり，それぞれ自由パラメータ法，変数分離法，連続群論法，次元解析法である．そのうち，連続群論法によるアプローチは高度な知識が必要とされている手法であり，著者らの知る限り応用例があまりない．

本研究で用いた連続群論法による相似変換は，現象の物理性を考える必要がなく，自動的に偏微分方程式の相似変換を導くことができる．

連続群論法に基づく相似変換の手法について簡単に説明する．以下に定義を示す．

定義 1：ある連続関数の集合は $Z^i = f^i\left(z^1, z^2, ..., z^m; a\right)$ である．パラメータ a に依存する変数変換を用い，変数 $z^1, z^2, \ldots z^m$ を変数 $Z^1, Z^2, \ldots Z^m$ に変換できる．ここで，$Z^i = f^i\left(z^1, z^2, ..., z^m; a\right)$ を連続変換群と呼ばれる．

定義 2：ある関数 $g\left(z^1, z^2, ..., z^m\right)$ に対して，変換 $Z^i = f^i\left(z^1, z^2, \ldots z^m; a\right)$ を行う．もし関数 g の形式が変わらなければ（つまり $g\left(z^1, z^2, \cdots, z^m\right) = g\left(Z^1, Z^2, \cdots, Z^m\right)$ を満たすならば），関数 g は変換 Z^i に対して不変である．

定義 3：ある微分方程式(式(1))に対して，式(2-1)，式(2-2)に示す変換を行い，もし微分方程式の形式が変わらなければ(つまり以下の式(3)を満たすなら

ば）微分方程式$\phi_j = 0$は，変換X^i，U^iに対して不変である．

$$\phi_j\left(x^1,\cdots,x^m,u^1,\cdots u^n,\frac{\partial^k u^1}{\partial(x^1)^k},\cdots,\frac{\partial^k u^n}{\partial(x^m)^k}\right)=0 \quad (1)$$

$$X^i = f^i(x^1,x^2,\cdots x^m;a) \quad (X^i, x^i \text{ は独立変数}) \quad (2\text{-}1)$$
$$U^j = h^j(u^1,u^2,\cdots u^n;a) \quad (U^j, u^j \text{ は従属変数}) \quad (2\text{-}2)$$

$$\phi_j\left(X^1,\cdots X^m,U^1,\cdots,U^n,\frac{\partial^k U^1}{\partial(X^1)^k},\cdots,\frac{\partial^k U^n}{\partial(X^m)^k}\right)=0 \quad (3)$$

以上の定義より，ある微分方程式(式(1))は変換式(2-1)，式(2-2)に対して不変であれば，その微分方程式(式(1)) $\phi_j = 0$の解は以下の新しい微分方程式(式(4))の解で表せる．$\Phi_j = 0$の独立変数は$\phi_j = 0$より1つ減り，η^i，F^jは式(5)を満たす．

$$\Phi_j\left(\eta^1,\cdots\eta^{m-1},F^1,\cdots F^n,\frac{\partial^k F^1}{\partial(\eta^1)^k},\cdots,\frac{\partial^k F^n}{\partial(\eta^{m-1})^k}\right)=0 \quad (4)$$

$$\eta^i = \eta^i(x^1,x^2,\cdots x^m) \quad (5)$$

$$F^j(\eta^1,\eta^2,\cdots\eta^{m-1}) = g^j(x^1,x^2\cdots x^m,u^1,\cdots u^n)$$

関数η^i，F^jは変換X^i，U^jに対して不変である．

この手法はLieとEngelが考えた基礎理論に基づいて，Birkhoff[2]), Morgan[3]), Hansen[4]), Ames[5) 6)]が研究し，得られたものである．

3. 乱流境界層の速度分布

(1) 境界層方程式の相似変換

プラントルが提案した境界層方程式から基本式を導いた．以下の式(6)，式(7)に示す．更に，境界層内の温度拡散問題も考え，式(8)に示す．Pは境界層内の圧力，uとvはx軸とy軸の流速，U_∞は定常な主流流速，θは温度，ε_uは渦粘性係数，ε_θは熱拡散係数である．

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \quad (6)$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=U_\infty\frac{\partial U_\infty}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\varepsilon_u\frac{\partial u}{\partial y}\right) \quad (7)$$

$$u\frac{\partial \theta}{\partial x}+w\frac{\partial \theta}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\varepsilon_\theta\frac{\partial \theta}{\partial y}\right) \quad (8)$$

ここでは，渦度粘性係数ε_uは様々な書き換え方がある．例えば，式(9)に示す．

$$\varepsilon = ku\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|^{n-1} \quad (9)$$

流関数と式(9)を式(7)に代入し，式(10)が得られた．定義1により，変数式(11)を用いて，式(10)に代入すると，式(12)が得る．ここで，連続群論法のアプローチが使える条件は，式(13)を満たすことである．従って，式(13)の関係が成り立てば，式(10)は変換式(11)に対して不変である．

$$\psi_y\psi_{xy}-\psi_x\psi_{yy}=U_\infty\frac{dU_\infty}{dx}+ku\left[\left|\psi_{yy}\right|^{n-1}\psi_{yy}\right]_y \quad (10)$$

$$\tilde{x}=a^{\alpha_1}x \quad \tilde{y}=a^{\alpha_2}y \quad \tilde{\psi}=a^{\alpha_3}\psi \quad \tilde{U}_\infty=a^{\alpha_4}U_\infty \quad (11)$$

$$\begin{aligned}&a^{\alpha_1+2\alpha_2-2\alpha_3}(\tilde{\psi}_y\tilde{\psi}_{yx}-\tilde{\psi}_x\tilde{\psi}_{yy})-\\&a^{\alpha_1-2\alpha_4}\tilde{U}_\infty\frac{d\tilde{U}_\infty}{d\tilde{x}}+a^{-n\alpha_3+(2n+1)\alpha_2}ku\left[\left|\tilde{\psi}_{\tilde{y}\tilde{y}}\right|^{n-1}\tilde{\psi}_{\tilde{y}\tilde{y}}\right]_{\tilde{y}}=0\end{aligned} \quad (12)$$

$$-2\alpha_3+2\alpha_2+\alpha_1=\alpha_1-2\alpha_4=(2n+1)\alpha_2-n\alpha_3 \quad (13)$$

定義2，定義3により，以下の式(14)が満たされる．次に，変換式(11)を式(14)に代入する．以下の関係が得られた．

$$\begin{aligned}\eta(x,y)&=yx^p=\tilde{y}\tilde{x}^p=yx^{-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}\\f(\eta)&=\psi x^q=\tilde{\psi}\tilde{x}^q=\psi x^{-\frac{\alpha_3}{\alpha_1}}\\he(\eta)&=U_\infty x^r=\tilde{U}_\infty\tilde{x}^r=U_\infty x^{-\frac{\alpha_4}{\alpha_1}}\end{aligned} \quad (14)$$

ここでは，パラメータα_1，α_2，α_3，α_4を決めるため，境界条件等の制約条件が必要である．

(2) 平板上の定常流れの境界層方程式の相似変換

平板上の流れの境界条件は，U_∞は定常のため，$\alpha_4 = 0$より，式(15)の関係が得られた．$n=1$の場合，

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1}=\frac{\alpha_3}{\alpha_1}=\frac{1}{n+1} \quad (15)$$

$$\eta(x,y)=\frac{y}{\sqrt{x}} \qquad f(\eta)=\frac{\psi(x,y)}{\sqrt{x}} \quad (16)$$

である．式(16)を式(7)に代入し，整理すると，以下の式(17)が得られた．この場合は，$ku=1$の時，更に無次元化すると，プラントルの層流境界層方程式を相似変換が行った後の常微分方程式になる．式(18)に示す．非従来の手法でも相似変化が求められる．

$$ff''+2kuf'''=0 \quad (17)$$
$$ff''+2f'''=0 \quad (18)$$

(3) 乱流境界層の速度分布

渦度粘性係数 ε_u には様々なモデルがあるため，ここでは，乱流境界層の速度分布を求めるために，プラントルの混合距離理論(式(20))を用い，式(7)に代入する．式(19)が得られる．

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)-\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)=U_\infty\frac{dU_\infty}{dx}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\kappa^2y^2\left(\frac{d^2\psi}{dy^2}\right)^2\right) \quad (19)$$

$$\varepsilon=\kappa^2y^2\left|du/dy\right| \quad (20) \qquad \varepsilon=klU \quad (21)$$

上の手順の様に，相似変換を行い，得れれた式(23)は層流におけるプラントル - ブラジウスの境界層方程式に次ぐ，乱流の境界層方程式である．次に，渦動粘性係数 ε_u にブシネスクの渦動粘性係数(式(21))を用い，新たな乱流境界層方程式を求めた．式(24)に示す． ε_u を変えることによって，様々な形式な乱流境界層方程式を求められる．本研究で提案したモデルで，乱流境界層方程式を決めた．

$$\eta=\frac{y}{x} \qquad f(\eta)=\frac{\psi}{x} \quad (22)$$

$$-ff''=2\kappa^2\left[\eta(f'')^2+\eta^2f'f'''\right] \quad (23)$$

$$-ff''=k\left[ff''+\eta\frac{d(ff'')}{d\eta}\right] \quad (24)$$

(4) 温度境界層分布

式(8)に流関数とプラントル数 P_r を代入し，式(25)が得られた．ここでプラントルの混合距離理論(式(20))を用い，式(25)に代入し，式(26)を得た．

$$\psi_y\theta_x+\psi_x\theta_y=\frac{1}{P_r}\frac{\partial}{\partial y}\left(\varepsilon\theta_y\right) \quad (25)$$

$$\psi_y\theta_x+\psi_x\theta_y=\frac{\kappa^2}{P_r}\frac{\partial}{\partial y}\left(y^2\psi_{zz}\theta_y\right) \quad (26)$$

式(26)を以上の手順で，相似変換を行い，乱流境界層の温度分布の方程式を求めた．式(27)に示す．θ は η に関する関数である．

$$f\theta'+\frac{\kappa^2}{P_r}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\eta^2f''\theta'\right)=0 \quad (27)$$

4. 乱流境界層の速度分布と温度分布

式(23)と式(27)に数値計算を行う．計算の境界条件は以下の式(28)に示すとおりであり，計算結果を図−1 に示す．得られた乱流境界層の速度分布を見ると，対数分布に似た分布をしている．また，**図-2** に速度と温度の分布を示す．温度の分布は速度境界層の分布より高いところで直線に近い分布になる．

$$\eta=0.001:u=0.01 \quad f'=0$$
$$v=0 \quad f=0 \quad \theta=0 \qquad P_r=0.7,\ \kappa=0.4 \quad (28)$$
$$\eta=5 \quad :u=U_\infty \quad f'=1 \quad \theta=1$$

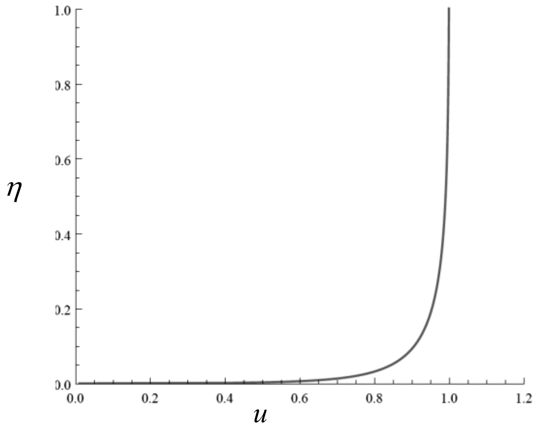

図-1 乱流境界層速度分布

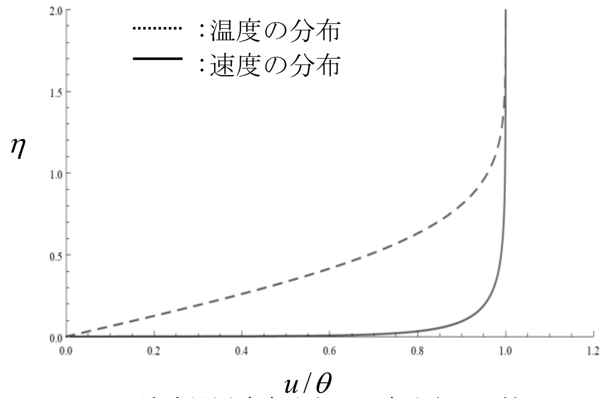

図-2 乱流境界層速度分布と温度分布を比較

5. まとめ

本研究では，連続群論のアプローチによる偏微分方程式の相似変換を導く手法を用いて，乱流境界層の速度分布を導く手法を提案した．

1) 本研究で用いた相似変換は現象の物理性を考える必要がなく，自動的に求められる．しかし，相似変換のパラメータは境界条件から決める必要がある．

2) 提案した手法で得られた乱流境界層の速度分布は従来の対数分布分布を包含するものとなっている．

3) 図−2 は乱流境界層内速度と温度の分布を示している．温度分布は安定して，直線になった時の η は 1.5. η は 0.4 の時，速度分布は安定している．そのため，温度の拡散係数は速度の 1.4 倍と考えられる．

提案した乱流境界層を導くモデルは様々な境界層問題に応用できると考えられる．

参考文献

1) 日野幹雄，流体力学，朝倉書店（1999）.
2) Birkhoff, G., Hydrodynamics, Princeton University Press.
3) Morgan, A. J. A., “Reduction by One of the Number of Independent Variables in Some Systems of Partial Differential Equations”, Quar. Appl. Math., Vol. 3, pp.250-259(1952).
4) Hansen, A. G., Similarity Analyses of Boundary Value Problems in Engineering, Prentice-Hall Inc. (1964).
5) Ames, W.F., Nonlinear Partial Differential Equations in Engineering, Vol.1, Academic Press Inc., New York(1965).
6) Ames. W. F. [Nonlinear Partial Differential Equations in Engineering] Vol. 2, Academic Press Inc. New York(1972).