

40. 小規模河床波方程式の定常進行波の 非周期性に関する考察

徐 承煥^{1*}・山田 正²

¹中央大学大学院（〒112-8851 東京都文京区春日）

²中央大学理工学部研究科（〒112-8851 東京都文京区春日）

* E-mail: jamesseo@civil.chuo-u.ac.jp

小規模河床波現象において、河床波の支配方程式は非線形系方程式として現れる。その非線形方程式を河床波の基本式として用いると、河床波を振動問題として取り扱うことができる。本論文では、河床波方程式の定常解の特性及び解の振る舞いにおいて空間的局在構造について調べた結果を示す。

Key Words : Sand Wave, Periodic External Force, Limit Cycle, Chaos Motion

1. はじめに

移動床流れにおいては、流水と流砂の相互作用の結果として、河床波が形成される。河川防災や河道維持において、どのような形状特性を持った河床形態になるか予測することが重要である。そのため、従来、河床波の形成機構を線形安定問題とした多くの研究が行われてきた。本研究では、河床波の支配方程式を用い、河床波を振動運動として取り扱い、河床波基本式の定常進行波解の特性及び解の振る舞いに関して考察した。

$$G(x) = \left\{ \frac{\partial F(x)}{\partial x} - \delta \frac{\partial^2 F(x)}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \delta^2 \frac{\partial^3 F(x)}{\partial x^3} \right\} f + F(x) \left\{ \frac{\partial f}{\partial x} - \delta \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \delta^2 \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \right\}$$

$$F(x) = \bar{q} m \left\{ 1 + (m-1) \frac{\eta}{h} + (m-1) \frac{m-2}{2} \frac{\eta^2}{h^2} + \alpha \frac{\partial \eta}{\partial x} \right\}$$

さらに、式(1)を $\eta' = \eta/h$, $x' = x/h$, $t' = \bar{q}/h^2 t$ で無次元化すると、式(2)を得る。

$$\frac{\partial \eta'}{\partial t'} + m \left\{ 1 + (m-1) \eta' \right\} \frac{\partial \eta'}{\partial x'} + \left\{ \alpha - m \frac{\delta}{h} (1 + (m-1) \eta') \right\} \frac{\partial^2 \eta'}{\partial x'^2} + \left\{ \frac{1}{2} m \frac{\delta^2}{h^2} (1 + (m-1) \eta') - \alpha \frac{\delta}{h} \right\} \frac{\partial^3 \eta'}{\partial x'^3} + \frac{1}{2} \alpha \frac{\delta^2}{h^2} \frac{\partial^4 \eta'}{\partial x'^4} = G(x') \quad (2)$$

2. 河床波の基本式方程式及び定常解導出

(1) 河床波の基本方程式 $\bar{a}$

移動床過程では「流砂運動-流れの特性-境界面の形態」の相互作用が基本的かつ支配的な関係である。各相互作用を表す流砂の連続式と、流水特性及び河床形状の関係式を用いて山田ら¹⁾により導出された1) 河床波の支配方程式は式(1)であり、各記号は次のように定義する。 u_0 : 底面流速, η : 基準面からの河床高, $\bar{q}$: 平均流砂量, δ : 遅れ距離, h : 水深, α : 河床勾配効果, f : 水面形の関数, m : 流砂量関係式の係数である。

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + m \frac{\bar{q}}{h} \left\{ 1 + (m-1) \frac{\eta}{h} \right\} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \bar{q} \left\{ \alpha - m \frac{\delta}{h} \left(1 + (m-1) \frac{\eta}{h} \right) \right\} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \bar{q} \left\{ \frac{1}{2} m \frac{\delta^2}{h^2} \left(1 + (m-1) \frac{\eta}{h} \right) - \alpha \delta \right\} \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} + \frac{1}{2} \alpha \frac{\delta^2}{h^2} \frac{\partial^4 \eta}{\partial x^4} = G(x) \quad (1)$$

式(2)が河床波の基本式である。基本式が非線形偏微分方程式系で与えられたので、線形分散関係式の性質を調べることにより、河床波の基本的な性質がわかる。また、物理的なパラメータを考え、それらによる解の様子を調べ、次の近似式(3)を得る²⁾。無次元量の「'」は省略し、右辺の $G(x)$ は基本式と同様で水面形による外力を表している。

$$\eta_t + m \eta_x + A \eta \eta_x + B \eta_{x,x} + C \eta_{x,x,x} + D \eta_{x,x,x,x} = G(x) \quad (3)$$

$$A = m(m-1), \quad B = \alpha - m(\delta/h)$$

$$C = 0.5m(\delta/h)^2 - \alpha(\delta/h), \quad D = 0.5\alpha(\delta/h)^2$$

ここで、河床波の発生条件となる B は正(負の拡散または異常拡散)であるとする、 D は負の拡散による系の不安定性を回復するために必要である。また、 B がゼロの極限では KdV 方程式が得られ、 C がゼロの極限では Kuramoto-Sivashinsky 方程式に帰

着する．ここでは外力の有無による定常進行波の解の特性を調べる．まず，小規模河床波のうち外力の影響がない場合であるRipplesを対象として取り扱う．式(3)を次のようにスケール変換すると，式(4)が得られる．

$$\eta = \left(\frac{B^3}{DA^2} \right)^{1/2} \eta \quad x = \left(\frac{D}{B} \right)^{1/2} x \quad t = \frac{D}{B^2} t$$

$$\eta_t + \eta \eta_x + \eta_{x,x} + \gamma \eta_{x,x,x} + \eta_{x,x,x,x} = 0 \quad (4)$$

ここで， $\gamma = C / (B^{3/2} D^{1/2})$ であり，分散性と不安定性・散逸性との相対的な強さを示している．

(2) 河床波の定常解の導出

式(4)で，無限領域 $-\infty < x < \infty$ で，一定の速度 c で伝達する定常進行波の解として， $\eta = u(x - ct)$ を導入し， $\xi = x - ct$ とおき， u が ξ のみに依存すると仮定すると，常微分方程式(5)が得られる．

$$-c \frac{du}{d\xi} + \frac{1}{2} \frac{du^2}{d\xi} + \frac{d^2u}{d\xi^2} + \gamma \frac{d^3u}{d\xi^3} + \frac{d^4u}{d\xi^4} = 0 \quad (5)$$

式(5)を積分すると式(6)になる．

$$-cu + \frac{1}{2}u^2 + \frac{du}{d\xi} + \gamma \frac{d^2u}{d\xi^2} + \frac{d^3u}{d\xi^3} = C_1 \quad (6)$$

式(6)は，3階常微分方程式であり，位相空間で解析する方法によって，解の性質を調べる．式(6)は無限遠で $u = du/d\xi = d^2u/d\xi^2 = 0$ となる進行解に対しては積分常数 $C_1 = 0$ となる．式(6)を1階連立常微分方程式に書き直すと，式(7)が得られる．

$$\begin{aligned} du/d\xi &= v \\ dv/d\xi &= w \\ \frac{dw}{d\xi} &= cu - \frac{1}{2}u^2 - v - \gamma w \end{aligned} \quad (7)$$

式(7)は，未知量 (u, v, w) に対する連立常微分方程式であり，解は3次元位相空間 (u, v, w) 内の軌跡となる．そこで，非線形方程式である式(7)の解は数値的に求められ，時間変化による解の周期性を把握することによって河床波方程式における安定解と非周期性が共存する現象に関して述べる．

3. 数値実験

数値実験において， c は線形波の位相速度を用い，分散関係式から $v_{phase} = \omega / k$ で与えることができる．初期値は $u = v = w = 0.1$ として，外力の有無による河床波を対象として解の振る舞いを観察した．

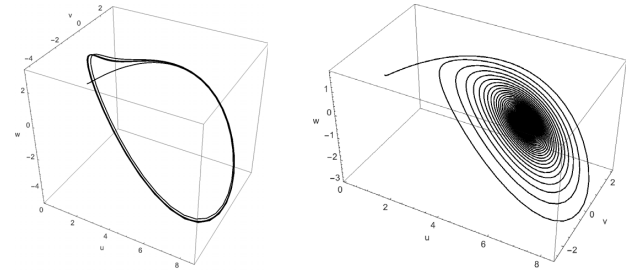


図-1 定常進行波の軌跡 (左: $\gamma = 2.0$, 右: $\gamma = 3.2$)

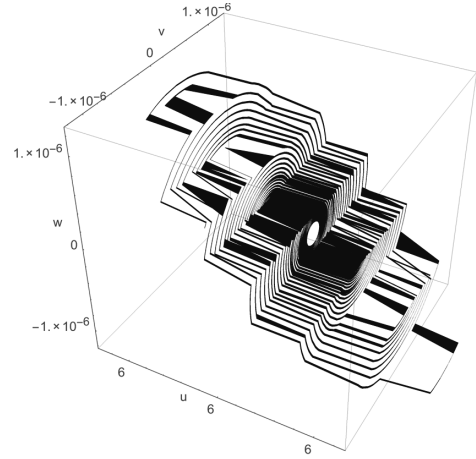


図-2 細かい時間間隔での解軌跡 ($\gamma = 3.2$, $\xi = 1500 \sim 1800$)

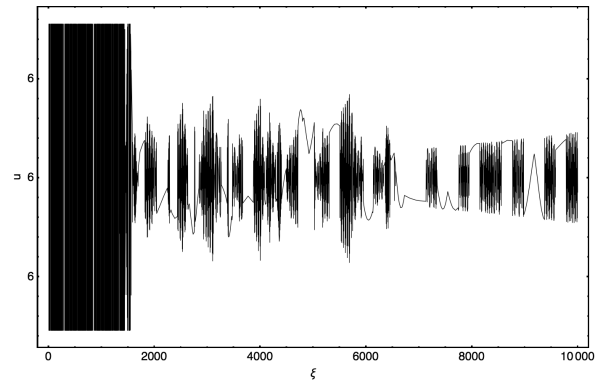


図-3 河床波のカオス解 (外力のない場合)

(1) 定常進行波解の軌跡 (外力のない場合)

図-1では， $\gamma = 2.0$ の場合と $\gamma = 3.2$ の場合の解軌跡を示す．式(7)の右辺をゼロとする特異点あるいは平衡点が現れ，それらは $(u, v, w) = (0, 0, 0)$ 及び $(2c, 0, 0)$ である．図-1のように， $\xi \rightarrow \infty$ で位相空間での解軌跡は特異点 $(0, 0, 0)$ から出て $(2c, 0, 0)$ に収束し，周期性をもつリミットサイクル振動運動をしている．分散性を表すパラメータ γ が小さいほど，安定な解軌跡で運動することがわかる．また，図-2のように， $\gamma = 3.2$ のとき細かい時間間隔での解軌跡を見ると，変動しつつ $(2c, 0, 0)$ に収束している．図-3では解軌跡の非周期性を示し，最初は周期的振動運動をして

いるが、時間の経過とともに解の振る舞いは非周期性をもつカオス解となることがわかる。

(2) 定常進行波解の軌跡（外力の考慮する場合）

強制外力のある場合の河床波を考え、式(7)において外力を正弦波として仮定し、周期的外力項を加えると式(8)が得られる。

$$\begin{aligned} du/d\xi &= v \\ dv/d\xi &= w \\ \frac{dw}{d\xi} &= cu - \frac{1}{2}u^2 - v - \gamma w + a \sin k \end{aligned} \quad (8)$$

ここで、 a は振幅、 k は波数($k = 2\pi/L$)、 L は波長であり、式(8)を数値実験によって、パラメータと外力の振幅及び波長による解の振る舞いについて述べる。図-4に示すように、周期的な外力のある場合も位相空間での解軌跡はリミットサイクル振動運動をしていることがわかる。また、細かい時間間隔での解軌跡は、外力による振幅のため、左右に振動しつつ特異点に収束していくことがわかる。図-5のように、外力の振幅が大きいほど左右への振動幅は大きくなり、外力の波長が長くなるほど、 w 平面に対する解軌跡の変動幅狭くなり、特異点に早く近づいていくことがわかる。さらに、外力を考慮した場合も図-6に示すように、解軌跡の非周期的な振動運動し、カオス解となる。

4. まとめ

本論では、小規模河床波方程式の定常進行波を位相空間での解軌跡を調べ、時間経過とともに非周期的な振動運動し、解軌跡の不安定性を示した。本研究で得られた結果は次のようである。

- 1) 自励振動によって発生するRipplesは外力の影響ではなく、微小攪乱が発達して安定的な河床波になる形態として現れると知られている。そのうち、基本式に含まれている変数によって、解の非周期性が現れる。
- 2) 小規模河床波のうち、水面波の影響によって発生するDunes形の河床波は、外力の振幅と波長によって、解軌跡が決定されることを確認した。本研究では周期的な外力の影響であるが、非周期性を誘起させる変数に不規則的なランダム要素が入ることにより、周期的な加振と不規則な雑音を同時に受ける非線形系を考えられ、新たな河床波の現象を表現することが可能になる。
- 3) 河床波の基本式は、初期値を決めれば解の時間発展が一意的に決まる決定論的方程式であるが、

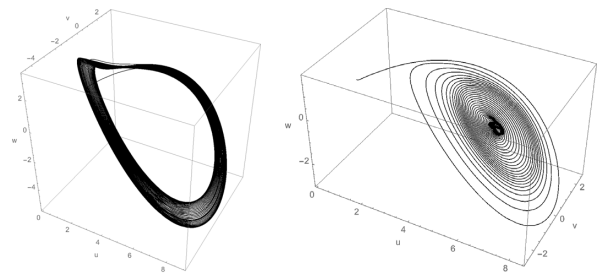


図-4 定常進行波の軌跡（左： $\gamma = 2.0$ ，右： $\gamma = 3.2$ ）

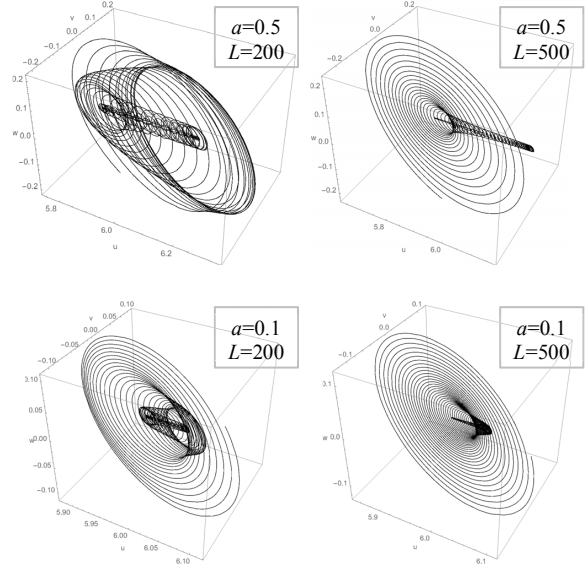


図-5 外力の波長及び振幅による解軌跡

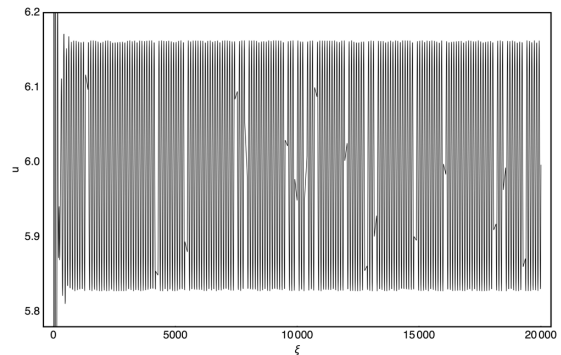


図-6 河床波のカオス解（外力を考慮した場合）

様々な外部要因によるパラメータの変化によって解が増幅され値が次々とずれてしまう。小規模河床波方程式では、時間発展とともに予想不可能な振動形態になる解を内包していると考えられる。

参考文献

- 1) 山田正，池内正幸，植松正伸：小規模河床波の発生発達に関する研究水理講演論文集，pp.665-670,1987
- 2) 徐承煥，山田正：河床波の発生発達に関する基本方程式の非線形効果，土木学会関東支部，II-91, 2015
- 3) 山田正，池内正幸，堀江良徳：不規則底面をもつ開水路流れに関する研究，水理講演論文集，pp.149-155, 1984