43. 決定論と確率論を表現できる新しい微分方程式の導出

諸岡　良優[1*]・山田　正[2]

[1]中央大学理工学研究科都市環境学専攻（〒112-8551 東京都文京区春日1-13-27）

[2]中央大学理工学部都市環境学科（〒112-8551 東京都文京区春日1-13-27）

＊ E-mail: *yoshimasa-m@civil.chuo-u.ac.jp*

水理学や気象学における移流拡散方程式は河川や大気中の物質の移流と拡散を表す方程式である．また金融工学におけるBlack-Scholes方程式は株価の変動を表す方程式であり，これも移流拡散方程式と同様の式形である．前者は勾配則や保存則といった物理法則のみから決定論的に導かれるのに対し，後者はランダムな現象であり確率論的に導かれる．本論文では確率論的に移流拡散方程式を導く事が知られているChapman-Kolmogorov方程式を拡張し，決定論を組み込む事により，決定論的かつ確率論的に成り立つ現象を表現できる新しい微分方程式の導出を行った．

Key Words : *advection-diffusion-wave equation, Markov prosesses, Chapman-Kolmogorov equation*

1. はじめに

河川及び河川流域における土砂移動現象は，河床や流路の変化を生じさせ，治水・防災上大きな影響を及ぼす．流砂現象の解明，普遍的な流砂量式の確立を目指して，現在まで様々な観点からアプローチされてきた．具体的には，個々の砂礫の確率的な運動特性を問題にせず，物理法則に従って平均的な量を対象として掃流砂量式を求める決定論的モデルと，Einstein[1)]によって提案された掃流砂の運動を河床での「長い休止時間」(rest period) と「瞬間的な位置の変化」(step length) の２つの確率変数の組み合わせで表現する確率過程モデルがある．これらのモデルは決定論的・確率論的それぞれ別の観点から現象をモデル化しているが，実現象は確率論的な運動と決定論的な運動の両者によって成り立っている．

本論文では決定論的かつ確率論的な立場から成り立つ現象を表現できる新たな式の導出を行った．一般的にChapman-Kolmogorov方程式[例えば2) 3)]から確率論的に移流拡散方程式が導かれることが知られている．本研究ではChapman-Kolmogorov方程式から確率論的に移流拡散方程式を導出する過程で，時間に関して従来よりも小さいオーダーまで考慮することにより移流拡散波動方程式の導出を行った．さらに，確率論的な移流拡散方程式の導出に決定論を組み込み，確率論と決定論の両方を表現できる新しい微分方程式の導出を行った．

2.　移流拡散波動方程式の導出

確率論的に移流拡散方程式を導く方法について述べる．Chapman-Kolmogorov方程式は，未来の状態が現在の状態のみで決定され，それより過去の状態には依らないというMarkov過程における遷移確率が満たす方程式である．連続状態のMarkov過程を考え，時刻tで位置xから時刻s $(s>t)$で位置yへ遷移する確率密度関数を$p(s,y|t,x)$とすると時刻s，位置yにおける確率密度関数$p(s,y)$と，初期時刻t，位置xにおける確率密度関数$p(t,x)$を結ぶ関係として以下の様に表される．

$$p(s,y)=\int_{-\infty}^{\infty}p(s,y|t,x)\cdot p(t,x)\,dx \tag{1}$$

(1)式を連続状態のChapman-Kolmogorov方程式という．

ここで時刻t，位置xにおける確率的な遷移を伴う物理量を$c(t,x)$とする．定常な遷移確率密度関数を$\phi(x)$として，時間増分をτとすると時刻$t+\tau$，位置xでの物理量$c(t+\tau,x)$は(1)式より任意の位置ξを用いて以下の式で表される．

$$c(t+\tau,x)=\int_{-\infty}^{\infty}\phi(\xi)\cdot c(t,x-\xi)\,d\xi \tag{2}$$

(2)式の左辺の$c(t+\tau,x)$，右辺の$c(t,x-\xi)$をTaylor展開して 2 次のオーダーまで考慮すると以下の様になる．

$$c(t,x)+\frac{\partial c}{\partial t}\tau+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 c}{\partial t^2}\tau^2=\int_{-\infty}^{\infty}\phi(\xi)\cdot\left\{c(t,x)-\frac{\partial c}{\partial x}\xi+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}\xi^2\right\}d\xi \tag{3}$$

$\phi(\xi)$ は遷移確率密度関数であるため $\bar{\xi}$ を遷移距離の期待値(平均値)，σ_{ξ}^2 を遷移距離の分散とすると，

$$\int_{-\infty}^{\infty}\phi(\xi)d\xi=1，\quad \int_{-\infty}^{\infty}\xi\phi(\xi)d\xi=\bar{\xi}，\quad \int_{-\infty}^{\infty}\xi^2\phi(\xi)d\xi=\sigma_{\xi}^2 \tag{4}$$

の関係があるため (4) 式を (3) 式に代入すると以下に示す (5) 式が得られる．

拡散方程式

$$\frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 c}{\partial t^2}+\frac{\partial c}{\partial t}+\frac{\bar{\xi}}{\tau}\frac{\partial c}{\partial x}=\frac{\sigma_{\xi}^2}{2\tau}\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \tag{5}$$

移流方程式　波動方程式

(5) 式は，左辺第 2 項と左辺第 3 項でみると移流方程式，左辺第 2 項と右辺第 1 項でみると拡散方程式，左辺第 1 項と右辺第 1 項でみると波動方程式であるので (5) 式は移流拡散波動方程式であることが明らかである．従来は (5) 式を τ について 1 次のオーダーまで考慮し，Chapman-Kolmogorov方程式から導かれる式は以下に示す移流拡散方程式とされている．

$$\frac{\partial c}{\partial t}+\frac{\bar{\xi}}{\tau}\frac{\partial c}{\partial x}=\frac{\sigma_{\xi}^2}{2\tau}\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \tag{6}$$

(5)，(6) 式の移流項の係数は，遷移距離の期待値(平均値)によって決まる確率分布の偏りが表す移流速度であることが分かる．ここで，遷移距離の期待値(平均値) $\bar{\xi}=2$，遷移距離の分散 $\sigma_{\xi}^2=8$，時間増分 $\tau=2$ とし，初期条件:$c(0,x)=\exp(-x^2)$，境界条件：$c(t,-300)=0$，$c(t,300)=0$ の下で (5) 式と (6) 式を解き，比較した結果を図−1に示す．移流拡散方程式と比較して波動の項が効いていることが確認できる．

3. Chapman-Kolmogorov方程式の拡張

確率的な遷移を伴う物質の濃度 $c(t,x)$ が速度 v で流れている状態を考えると時刻 $t+\tau$ での Δx 区間の濃度は以下の様に表される．

$$c(t+\tau,x)=\int_{-\infty}^{\infty}\phi(\xi)c(t,x-\xi)d\xi+\frac{\tau}{\Delta x}\left\{c(t,x)-c(t,x+\Delta x)\right\}v \tag{7}$$

(7) 式の右辺第1項は Δx 区間に $x=x-\xi$ から確率的に遷移してくる濃度，右辺第 2 項は τ 時間に移流速度 v で Δx 区間に流出入する濃度fluxの差である．(7) 式の右辺は Δx 区間に確率論的に決まる濃度と，移流速度 v によって決定論的に決まる濃度の和であり，確率論と決定論の両方が考慮されている．先ほどと同様に (7) 式をTaylor展開して 2 次のオーダーまで考慮し，整理すると (7) 式は

$$(\text{左辺})=c(t,x)+\frac{\partial c}{\partial x}\tau+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}\tau^2$$

$$(\text{右辺})=c(t,x)-\bar{\xi}\frac{\partial c}{\partial x}+\frac{\sigma_{\xi}^2}{2}\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}-\tau v\frac{\partial c}{\partial x}$$

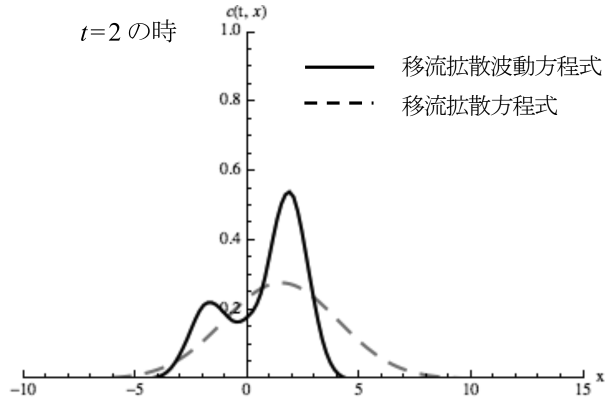

図-1　移流拡散方程式と移流拡散波動方程式の比較

となるので，(7) 式は以下の様になる．

$$\frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 c}{\partial t^2}+\frac{\partial c}{\partial t}+\left(\frac{\bar{\xi}}{\tau}+v\right)\frac{\partial c}{\partial x}=\frac{\sigma_{\xi}^2}{2\tau}\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \tag{8}$$

(8) 式は (5) 式と同様の式形であるので移流拡散波動方程式である．(8) 式を τ の 1 次のオーダーまで考慮すると以下に示す移流拡散方程式となる．

$$\frac{\partial c}{\partial t}+\left(\frac{\bar{\xi}}{\tau}+v\right)\frac{\partial c}{\partial x}=\frac{\sigma_{\xi}^2}{2\tau}\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \tag{9}$$

ここで (5) 式と (8) 式，(6) 式と (9) 式を比較すると移流項の係数，つまり移流速度は確率論として決まる確率分布の偏りが表す移流速度 $\bar{\xi}/\tau$ と決定論として決まる移流速度vの和となっていることが明らかである．

4. まとめ

本論文では，確率過程を表現するChapman-Kolmogorov方程式に決定論である移流輸送項を組み込むことによりChapman-Kolmogorov方程式を拡張し，決定論と確率論を表現できる新しい微分方程式を導出した．導出した移流拡散波動方程式と移流拡散方程式を比較して波動の項が効いていることを確認した．また，移流拡散波動方程式と一般的なChapman-Kolmogorov方程式から導かれる移流拡散方程式を比較して，移流項の係数が遷移確率密度関数の期待値(平均値)と分散から確率論的に決まる確率分布の偏りによる移流速度と，決定論的に決まる移流速度の和となっていることを明らかにした．

参考文献

1) Einstein,H.A., "The bed load function for sediment transportation in open channel flows", USDA, Soil Conservation Service, Technical Bulletin, No.1026, pp.1-71, 1950.
2) Chapman,S., "On the Brownian displacements and thermal diffusion of grains suspended in a non-uniform fluid", Proc. Roy. Soc. Ser.A, Vol.119 ,pp.34-54, 1928.
3) 小倉久直：続. 物理工学のための確率過程論, コロナ社，1985.