

B-36 汚濁小河川が流入する一般河川の流れ挙動解析 —— 直交選点有限要素法による数値解析 ——

○蛸子 翼・大久保 孝樹

函館工業高等専門学校 (〒042-8501 北海道函館市戸倉町 14 番 1 号)

E-mail: ohkubo@hakodate-ct.ac.jp.

1. はじめに

従来の数値計算に用いられる差分法には境界条件の設定が複雑であること、高精度差分になれば計算が複雑になること、一般の選点法では、選点の位置で正解を得ることは困難、などの不利な点がある。

そこで著者らは直交選点有限要素法を確立し、直交選点有限要素法による定常 Navier-Stokes 方程式の数値解析の確立を目指すべく、直交選点有限要素法による定式化を行い、2次元水路モデルでの任意の境界形状における流速ベクトル分布を求めてきた。本研究ではこれに用いられたプログラムを応用し、一般河川に小河川が流入する場合の流れの挙動解析を行った。そのために直交選点有限要素法による定式化を行い、2次元合流河川モデルの境界形状における流速ベクトル分布を求めることにする。なお、その計算例として定常の Navier-Stokes 方程式の解析を行う。

直交選点有限要素法とは、直交選点法を有限要素法に応用し、2次元空間の離散化手法としたものである。直交選点有限要素法の利点としては、定式化・高精度である高次の計算が容易であること、直交選点において正解に近い値が得られることなどが挙げられる。また、直交選点有限要素法は差分法とは違い、厳密な直接解法である。このプログラムでは境界条件の設定に関して、差分法のプロプログラムに比べ汎用性がある。

2. 無次元化について

無次元量 $R = \frac{U_0 H}{\nu}$ とおくと、無次元化され、以下のような式が求まる。

境界条件の無次元化

$$\begin{aligned} \left(-P + \frac{2}{R} \frac{\partial u}{\partial x}\right) l + \frac{1}{R} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) m &= \hat{S}_x \\ \frac{1}{R} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) l + \left(-P + \frac{2}{R} \frac{\partial v}{\partial y}\right) m &= \hat{S}_y \\ \frac{\partial P}{\partial x} l + \frac{\partial P}{\partial y} m &= \hat{S}_p \end{aligned} \quad (1)$$

Navier-Stokes 方程式の無次元化

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) \end{aligned} \quad (2)$$

3. 直交選点法による定式化

選点法は重みつき残差法的一种であり、多項式によって作られた微分方程式の残差を選点で0となるようにする。直交選点法は、その選点の位置を直交多項式の根としている。

いま、 Z の乗べき項で表される直交多項式を考え、補間関数(試行関数、形状関数)を次式のように表す。なお、 Z が $[0, 1]$ 区間で補間されるものとする。

$$y(z) = b + cz + z(z-1) \sum_{i=1}^N a_i P_{i-1}(z) \quad (3)$$

ここで、多項式 $P_i(Z)$ は、次式によって定義される。

$$\int_0^1 w(z) P_n(z) P_m(z) dz = 0 \quad n \neq m \quad n, m = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (4)$$

直交選点法として、 N 個の選点の位置は $P_N(Z)$ の式によって求めるが、この式は $W(Z)=1$ であるルジャンドルの直交多項式として次式によって表される。

$$P_N(z) = \sum_{r=0}^N (-1)^r \binom{N}{r} \binom{n+r}{r} z^r \quad (5)$$

上式より、 Z を求めるとよい。

(3)式は、次式で表される多項式と同等に表される。

$$y(z) = \sum_{i=1}^{N+2} d_i z^{i-1} \quad (6)$$

以上のことを踏まえ、座標 x - y を用い、流速 u 、 v 、圧力 P を直交関数で表現すると、2次元の直交多項式は1次元の直交多項式の積として表される。以下、流速 u のみに関して表示するが、 v 、 P に関しても同様の表示となる。

$$u = \left(\sum_{i=1}^{N+2} a_i x^{i-1} \right) \left(\sum_{j=1}^{N+2} b_j y^{j-1} \right) \quad (7)$$

上式は、次式と同等である。

$$u = \sum_{i=1}^{N+2} \sum_{j=1}^{N+2} d_{ij} x^{i-1} y^{j-1} \quad (8)$$

上式の直交選点(0m点)での第1微分と第2微分を求める。

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x_{lm}} &= \sum_{i=1}^{n+2} \sum_{j=1}^{n+2} (i-1)x_i^{i-2}y_j^{j-1}d_{ij} \\ \frac{\partial u}{\partial y}\bigg|_{x_{lm}} &= \sum_{i=1}^{n+2} \sum_{j=1}^{n+2} (j-1)x_i^{i-1}y_j^{j-2}d_{ij} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\bigg|_{x_{lm}} &= \sum_{i=1}^{n+2} \sum_{j=1}^{n+2} (i-1)(i-2)x_i^{i-3}y_j^{j-1}d_{ij} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\bigg|_{x_{lm}} &= \sum_{i=1}^{n+2} \sum_{j=1}^{n+2} (j-1)(j-2)x_i^{i-1}y_j^{j-3}d_{ij} \\ \frac{\partial u}{\partial x \partial y}\bigg|_{x_{lm}} &= \sum_{i=1}^{n+2} \sum_{j=1}^{n+2} (i-1)(j-1)x_i^{i-2}y_j^{j-2}d_{ij}\end{aligned}\quad (9)$$

ベクトルと行列で表すと、次式のようにになる。

$$\begin{aligned}\bar{u} &= \bar{Q} \bar{d} \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} &= \bar{D}_x \bar{d}, \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \bar{D}_y \bar{d} \\ \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} &= \bar{E}_x \bar{d}, \quad \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} = \bar{E}_y \bar{d} \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial x \partial y} &= \bar{F}_{xy} \bar{d}\end{aligned}\quad (10)$$

ここで、

$$\begin{aligned}Q_{lm} &= x_l^{l-1}y_m^{m-1} & n &= (n_1+2)(n_2+2) \\ D_{xlm} &= (i-1)x_l^{i-2}y_m^{m-1} & l &= 1, 2, \dots, n \\ D_{ylm} &= (j-1)x_l^{i-1}y_m^{j-2} & m &= 1, 2, \dots, n \\ E_{xlm} &= (i-1)(i-2)x_l^{i-3}y_m^{m-1} & i &= 1, 2, \dots, (n_1+2) \\ E_{ylm} &= (j-1)(j-2)x_l^{i-1}y_m^{j-3} & j &= 1, 2, \dots, (n_2+2) \\ F_{xylm} &= (i-1)(j-1)x_l^{i-2}y_m^{j-2}\end{aligned}\quad (12)$$

(10)式より $\bar{Q}$ の逆行列を用いると直交多項式の係数 $\bar{d}$ は次式によって表される。

$$\bar{d} = \bar{Q}^{-1} \bar{u} \quad (13)$$

(11)式に(13)式を代入すると

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} &= \bar{D}_x \bar{Q}^{-1} \bar{u} = \bar{A}_x \bar{u} \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} &= \bar{D}_y \bar{Q}^{-1} \bar{u} = \bar{A}_y \bar{u} \\ \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} &= \bar{E}_x \bar{Q}^{-1} \bar{u} = \bar{B}_x \bar{u} \\ \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} &= \bar{E}_y \bar{Q}^{-1} \bar{u} = \bar{B}_y \bar{u} \\ \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x \partial y} &= \bar{F}_{xy} \bar{Q}^{-1} \bar{u} = \bar{C}_{xy} \bar{u}\end{aligned}\quad (14)$$

と表示される。A、B、C は微分作用素行列として表示される。

N を内部選点数として、微分作用素行列 A、B の次元 ian は次式で表される。

$$ian = (N+2) * (N+2)$$

直交選点法によって Navier-Stokes 方程式を定式化すると、それぞれ連続の式・運動方程式は以下のようになる。

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^N A_{xy} u_j + \sum_{j=1}^N A_{xy} v_j &= 0 \\ u_i \sum_{j=1}^N A_{xy} u_j + v_i \sum_{j=1}^N A_{xy} u_j &= - \sum_{j=1}^N A_{xy} P_j + \frac{1}{R} \left(\sum_{j=1}^N B_{xy} u_j + \sum_{j=1}^N B_{xy} v_j \right) \\ u_i \sum_{j=1}^N A_{xy} v_j + v_i \sum_{j=1}^N A_{xy} v_j &= - \sum_{j=1}^N A_{xy} P_j + \frac{1}{R} \left(\sum_{j=1}^N B_{xy} v_j + \sum_{j=1}^N B_{xy} u_j \right)\end{aligned}\quad (15)$$

要素間の境界条件を定式化すると以下の式にな

る。

$$\begin{aligned}\left[\left(-P_i + \frac{2}{R} \sum_{j=1}^N A_{xy} u_j \right) l + \frac{1}{R} \left(\sum_{j=1}^N A_{xy} u_j + \sum_{j=1}^N A_{xy} v_j \right) m \right] \\ = \left[\left(-P_i + \frac{2}{R} \sum_{j=1}^N A_{xy} u_j \right) l + \frac{1}{R} \left(\sum_{j=1}^N A_{xy} u_j + \sum_{j=1}^N A_{xy} v_j \right) m \right]^T \\ \left[\frac{1}{R} \left(\sum_{j=1}^N A_{xy} u_j + \sum_{j=1}^N A_{xy} v_j \right) l + \left(-P_i + \frac{2}{R} \sum_{j=1}^N A_{xy} v_j \right) m \right] \\ = \left[\frac{1}{R} \left(\sum_{j=1}^N A_{xy} u_j + \sum_{j=1}^N A_{xy} v_j \right) l + \left(-P_i + \frac{2}{R} \sum_{j=1}^N A_{xy} v_j \right) m \right]^T \\ \left[\sum_{j=1}^N A_{xy} P_j l + \sum_{j=1}^N A_{xy} P_j m \right] = \left[\sum_{j=1}^N A_{xy} P_j l + \sum_{j=1}^N A_{xy} P_j m \right]^T\end{aligned}\quad (16)$$

4. モデルの要素・選点配置について

要素-選点の配置関係は局所選点番号として要素左下を 1 として反時計回りに 1~4 までとし、次に境界線上の外部選点を反時計回りに番号付けし、最後に内部選点を x 方向順に番号付けをした。

この要素-選点番号配置は、自動的に配置するプログラムを開発し、任意の境界条件でも配置できるようにした。さらに選点(節点)を順番に番号付けできるように、再配置プログラムの開発を行った。今回はこれに改良を加え、下部の小水路(汚濁河川)からの流入による合流河川モデルの検討を行う。このプログラムにより、図 1 に示すケース[要素数 33、内部選点数 7×7]の河川モデルを作成した。このモデルにおいて、定常の Navier-Stokes の流体挙動解析を直交選点有限要素法を用いて検討を行った。

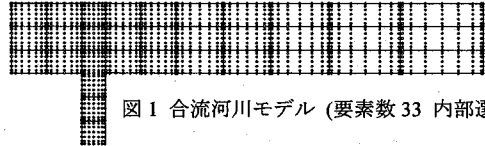


図 1 合流河川モデル (要素数 33 内部選点数 7×7)

5. 計算結果と考察

同モデルにおいてレイノルズ数および小水路と河川の流速比を変化させた場合の直交選点有限要素法による数値計算を行った結果、全ての計算が相対誤差 1×10^{-6} 以内で収束した。ケース 1 は流速比が 0.01、レイノルズ数が 1000 の場合で、ケース 2 は流速比が 0.1、レイノルズ数が 1000、ケース 3 は流速比が 0.01、レイノルズ数が 5000、ケース 4 は流速比が 0.1、レイノルズ数が 5000 の場合の図である。数値解析上では収束したもの、これらを含めた全体の流速ベクトル図をみると、レイノルズ数が 5000 と大きくなると、かえって安定することが見てとれるが、小水路と河川との流速比が増すほどに不安定な挙動を示すことがわかる。これは、Navier-Stokes 方程式には移流項が含まれているためであると考えられる。移流項は流速が増したり複雑な流れになることにより、非常に不安定な挙動を示すためである。なお、直交選点法

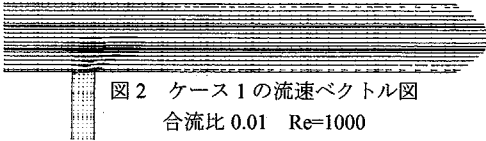


図2 ケース1の流速ベクトル図
合流比 0.01 $Re=1000$



図3 ケース1の圧力分布図
 $\max p=0.052$ $\min p=-1.290 \times 10^{-4}$



図4 ケース1の流速分布図
 $\max v=1.003$ $\min v=0$



図5 ケース1の渦度分布図
 $\max w=14.8588$ $\min w=1.322 \times 10^{-11}$

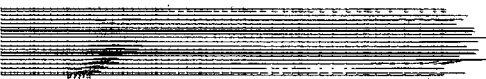


図6 ケース2の流速ベクトル図
合流比 0.1 $Re=1000$



図7 ケース2の圧力分布図
 $\max p=0.109$ $\min p=0$



図8 ケース2の流速分布図
 $\max v=2.355$ $\min v=0$



図9 ケース2の渦度分布図
 $\max w=65.106$ $\min w=1.510 \times 10^{-11}$

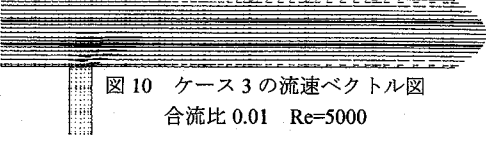


図10 ケース3の流速ベクトル図
合流比 0.01 $Re=5000$



図11 ケース3の圧力分布図
 $\max p=0.012$ $\min p=-2.371 \times 10^{-5}$

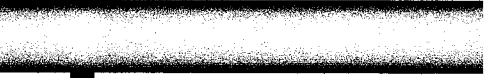


図12 ケース3の流速分布図
 $\max v=1.003$ $\min v=0$



図13 ケース3の渦度分布図
 $\max w=14.826$ $\min w=4.538 \times 10^{-12}$

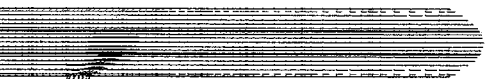


図14 ケース4の流速ベクトル図
合流比 0.1 $Re=5000$



図15 ケース4の圧力分布図
 $\max p=0.017$ $\min p=-1.602 \times 10^{-4}$

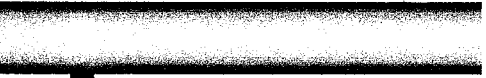


図16 ケース4の流速分布図
 $\max v=1.034$ $\min v=0$



図17 ケース4の渦度分布図
 $\max w=11.873$ $\min w=1.619 \times 10^{-11}$

は、内部選点では正解に近い値が得られることが知られており、また、内部選点を7と高次としているので外部境界上の外部選点付近に内部選点がよく近傍にあり外部選点でも良好な値が得られるものと考えられる。圧力は、値を見るとレイノルズ数が増すごとに低くなる傾向が見られる。なお、渦度分布図における渦度は u 、 v の偏微分で表され、直交選点法では正解に近い値が得られないことが知られているが、直交選点法に関しても差分と同じように、7次(差分ではこのような高次は無いが)の高次を用いると微分も正確な値に近くなることが予想される。

6. まとめ

今回、合流部を含む流れの数値解析を、直交選点有限要素法を用いて解析した結果、妥当な結果が得られた。だが、収束した値であるとはいえ、これらが本当に正しい値であるのか考察を行う必要がある。なお、時間項を考慮した Navier-Stokes 方程式の定式化を現在行っている。

参考文献：B.A.フィンレイソン著、鷺津久一郎・山本善之・川合忠彦共訳 The Method Weighted Residuals and Variational Principles 「重みつき残差法と変分原理および流体力学・伝染・物質移動への影響」 培風館