

コールブルック・ホワイト式を用いた管路流出型管網の解析とその応用

北海道大学工学部 ○高桑哲男, 船水尚行

1. はじめに

配水管網の初期設計で各種代替案を検討するための管網解析法には、流量式にヘーゼン・ウィリアムス式等の指数型式、水量流出モデルは節点に需要水量を集中させた節点流出型が用いられる。需要水量、管路粗度の推定誤差のほうが支配的と考えられるからである。これに対し、実際に運用中の管網を対象とする配水管理や拡張設計のためには正確な需要水量と管路粗度の情報が必要であり、これらを得るための状態推定法を開発する段階では、現実の流況を表現する流量式と水量流出モデルによる管網解析データに基づくシミュレーション結果について方法論の適否が吟味されねばならない。

本報告では、コールブルック・ホワイト(CW)式を用いた管路流出型管網の解析法を示すとともに、同式の特徴を利用した状態推定法について述べる。特徴としては、①管路粗度に関するパラメータが一つであること、②流量と損失水頭が指数乗比例の関係にないこと、があげられる。

2. 管路流出型管網解析法

2-1 管路流出型モデル

図1のように1本の管路がK区間に分割され、各管路区間では一様に p_n 、区間 n 、 $n+1$ の境界点からは q_{n+1} の水量が流出するものとする。このとき、管路上流端流量を Q とすると、管路区間 n の上流側流量 Y_n は

$$Y_n = Q - \sum_{m=1}^n (p_m + q_m) \quad (\text{ただし, } p_0=0, q_1=0) \quad (1)$$

と表される。また、節点 i のまわりの流量収支は、図2の例示を一般化して次のように書かれる。

$$\sum_u Q_{ui} - \sum_d Q_{id} = P_i + \sum_u SP_{ui} \quad (2)$$

ここに、 u 、 d は節点 i の上流側、下流側節点番号、 P は節点からの直接流出量、 SP は各管路流出量の総和、すなわち、式(1)の右辺第2項で $n=K$ とおいたときの値。

2-2 管路損失水頭の表現

長さ L_n 、直径 D_n 、摩擦損失係数 f_n ($n=1, 2, \dots, K$)の管路区間より成る管路の損失水頭 H は

$$H = \frac{8}{\pi^2 g} \sum_{n=1}^K \int_0^{L_n} \frac{f_n}{D^5} \left(Y_n - \frac{p_n}{L_n} \right) \left| Y_n - \frac{p_n}{L_n} \right| dx \quad (3)$$

となる。積分部分は、 $p_n = 0$ の区間では容易に積分され、 $p_n \neq 0$ の区間では数値積分によって求められる。 f_n はCW式によって次式のように表される。

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 1.14 - 2.0 \log \left\{ \frac{k}{D} + \frac{9.35}{Re \sqrt{f}} \right\} \quad (4)$$

ここに、 k は絶対粗度、 $Re = 4 \bar{Q} / (\pi D \nu)$ 、 $\bar{Q}$ は管路区間中央点の流量、 ν は動粘性係数。

2-3 計算手順

1)各節点のエネルギー位の仮定値 E' を与える。2)各管路 ij の上端流量について、仮定値 $Q'' = 0$ から

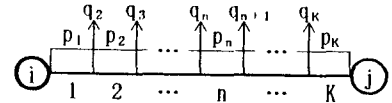


図1 管路流出型モデル

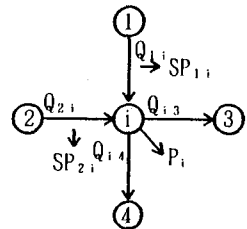


図2 節点の流量収支

表1 直径 D(m)

管路	区間1, 2	区間3, 4	区間5, 6
1	1.35	1.20	1.10
2	1.10	1.00	0.90
3	0.90	0.80	0.70
4	0.60	0.50	0.50
5	1.00	0.90	0.90
6	0.80	0.80	0.80
7	0.70	0.60	0.60
8	0.40	0.40	0.40
9	0.80	0.80	0.80
10	0.80	0.70	0.70
11	0.60	0.50	0.45
12	0.80	0.70	0.70
13	0.60	0.50	0.50
14	0.50	0.50	0.50
15	0.40	0.30	0.25
16	0.60	0.50	0.50
17	0.50	0.50	0.50
18	0.50	0.50	0.35

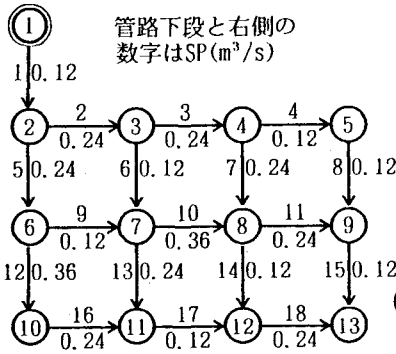


図3 計算対象管網

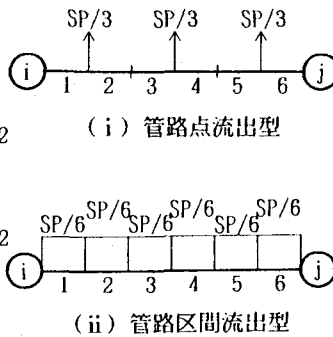


図4 管路流出水量

出発して式(3)を満たす修正値 $Q' = Q'' + \Delta Q'$ を求める操作を補正値 $\Delta Q'$ が十分に小さくなるまで繰り返す。このとき、 $\Delta Q'$ は式(5)を解いて得られる。右辺の偏導関数値は $p_n = 0$ の区間では式(6)、 $p_n \neq 0$ の区間では式(7)から得られる。2')式(5)で用いる f は、与えられた Q'' に対して式(4)が満足されるまで繰り返すことによって求める。3)配水基地を除く全節点について式(8)の右辺が許容誤差以内ならば終了し、さもなければ各節点エネルギー位の補正値 ΔE を式(8)から求め、修正値 $E = E' + \Delta E$ を再び近似値 E' において手順2)へ戻る。

$$E_i' - E_i'' = \sum_{n=1}^K H_n'' + \left(\frac{\partial E_i}{\partial Q} \right)'' \Delta Q' - \left(\frac{\partial E_i}{\partial Q} \right)'' \Delta Q' \quad (5)$$

$$\frac{\partial E_i}{\partial Q} = - \frac{\partial E_i}{\partial Q}$$

$$= \left\{ \frac{16}{\pi^2 g} \sum_{n=1}^K \frac{f_n L_n}{D_n^5} |Y_n| \right\} \quad (6)$$

$$= \left\{ \frac{8}{\pi^2 g} \sum_{n=1}^K \frac{f_n L_n}{D_n^5} \frac{|Y_n| |Y_n| - (Y_n - p_n) |Y_n - p_n|}{p_n} \right\} \quad (7)$$

$$\sum_u \left\{ Q_{ui}' + \left(\frac{\partial Q_{ui}}{\partial E_i} \right)' \Delta E_i + \left(\frac{\partial Q_{ui}}{\partial E_u} \right)' \Delta E_u \right\}$$

$$- \sum_d \left\{ Q_{id}' + \left(\frac{\partial Q_{id}}{\partial E_i} \right)' \Delta E_i + \left(\frac{\partial Q_{id}}{\partial E_d} \right)' \Delta E_d \right\}$$

$$= P_i + \sum_u SP_{ui} \quad (8)$$

2-4 計算例

対象管網は図3である。各管路は長さ600m、等長100mの6区間に分割され、直径は表1のとおり、絶対粗度はすべて 6×10^{-4} m とする。管路流出量の総和SPは図3に示すとおりであり、(A) 図4(i)の点流出型、(B) 同図(ii)の区間流出型、(C) 両型の半量ずつが流出する混合流出型、(D) 半量ずつを上、下流側節点に割

表2 節点エネルギー位 E(m)

節点	(A)	(B)	(C)	(D)
1	30.000	30.000	30.000	30.000
2	25.660	25.660	25.660	25.628
3	22.826	22.828	22.827	22.723
4	20.893	20.898	20.896	20.666
5	19.833	19.846	19.841	19.456
6	22.738	22.739	22.739	22.646
7	21.656	21.659	21.657	21.551
8	20.098	20.114	20.108	19.889
9	18.857	18.900	18.884	18.508
10	21.454	21.463	21.460	21.302
11	20.128	20.160	20.147	19.874
12	18.956	18.993	18.979	18.745
13	17.618	17.793	17.727	16.789

表3 管路上流端流量 Q (m³/s)

節点	(A)	(B)	(C)	(D)
1	3.6000	3.6000	3.6000	3.6000
2	1.8512	1.8510	1.8511	1.7272
3	0.9101	0.9101	0.9101	0.7846
4	0.2665	0.2665	0.2665	0.2131
5	1.6288	1.6290	1.6289	1.5128
6	0.7010	0.7009	0.7010	0.4626
7	0.4036	0.4037	0.4036	0.2715
8	0.1465	0.1465	0.1465	0.0931
9	0.6761	0.6758	0.6759	0.6210
10	0.7670	0.7667	0.7668	0.5921
11	0.3302	0.3310	0.3307	0.1991
12	0.7127	0.7132	0.7130	0.5318
13	0.3701	0.3700	0.3701	0.2514
14	0.2404	0.2394	0.2398	0.1845
15	0.1167	0.1174	0.1172	0.0522
16	0.3527	0.3532	0.3530	0.2318
17	0.2429	0.2432	0.2431	0.1833
18	0.2433	0.2426	0.2428	0.1278

りつけた節点集中型の4とおりについて計算した結果を表2、3に示す。

3. 状態推定法

3-1 仮定条件

水圧の測定値を利用する管網状態推定法にあっては、節点方程式と管路損失水頭式だけでは式数が不足するので、何らかの仮定によって補わねばならない。ここでは、各時間帯における管網内の流出水量は一律に変化し、これに伴って各管路の分担流量も一定比率で変化するものとする。更に、管路流出型管網にあっては、未知の管路区間が多いので、管路流量の表現についても仮定が必要になる。ここでは、上端から下端へと変化する管路流量を1個の仮想的流量 $\hat{Q}$ で代表させる。

3-2 推定式

上記の二つの仮定により、各時間帯 t の各データ s の総流出水量 $B_{t,s}$ ($t=1, 2, \dots, T$; $s=1, 2, \dots, S$) に対する各管路の $\hat{Q}_{t,s}$ の比を α とすれば、 $\hat{Q}_{t,s} = \alpha B_{t,s}$ であり、損失水頭の測定値 $H_{t,s}^*$ との差の二乗和 W ：

$$W = \sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^S \left(1 - \frac{8}{\pi^2 g} \cdot \frac{B_{t,s}}{H_{t,s}^*} \times \sum_{n=1}^K f_{n,t,s} \cdot \alpha \left| \alpha \right| \frac{L_n}{D_n^5} \right)^2 \quad (9)$$

を最小にする k と α が求められる。

3-3 計算例

対象管網は図3と同一である。シミュレーションデータは $t=7$ 、 $s=10$ とし、流出水量の平均値は2-3節で示した値の1.0、0.9、 $\dots$ 、0.4倍、変動係数を $0.1 \times r$ (r は平均0、分散1.0の正規乱数)として得た。エネルギー位の有効数字はcm単位とした。計算結果を表4～6に示す。

4. まとめ

1) 現実に近い流況を再現するための管網解析法として管路流出型モデルとCW式を組み合わせた方法を示した。今回の計算例では、三つの管路流出型と節点集中型におけるエネルギー位の差はきわめて小さかった。

2) 各管路流量の一定比率変化と仮想的管路流量を仮定することによる絶対粗度と節点流出水量の同時推定法を示した。今回の計算例では、絶対粗度の推定値と真値の間には0.3～5倍程度の開きが認められたが、節点流出水量については配水基地と末端点を除けば真値の0.7～1.3倍程度の推定値が得られた。

表4 絶対粗度 k ($10^{-3}m$)

節点	(A)	(B)	(C)	(D)
1	0.555	0.668	0.631	0.599
2	0.594	0.470	0.565	0.539
3	0.395	0.457	0.543	0.866
4	1.430	0.330	0.666	0.273
5	0.946	0.643	0.614	0.463
6	1.145	0.781	0.494	0.330
7	1.170	0.500	0.420	0.366
8	0.512	0.579	0.816	0.775
9	0.604	0.480	0.438	0.465
10	0.371	0.342	0.503	0.930
11	0.470	0.284	0.869	0.402
12	1.998	0.460	0.598	0.703
13	0.791	0.505	0.926	0.524
14	1.339	0.516	0.684	0.195
15	2.587	0.736	2.043	0.152
16	0.399	0.547	0.759	0.418
17	0.605	0.424	0.493	0.307
18	1.073	0.345	3.159	0.216

表5 管路流量 $\hat{Q}$ (m^3/s)

節点	(A)	(B)	(C)	(D)
1	.9877	.9683	.9743	.9999
2	.4744	.4857	.4767	.4936
3	.2206	.2165	.2135	.2126
4	.0499	.0583	.0547	.0648
5	.3950	.4127	.4146	.4389
6	.1656	.1731	.1817	.1923
7	.0703	.0770	.0784	.0804
8	.0265	.0258	.0250	.0256
9	.1713	.1748	.1769	.1802
10	.1669	.1670	.1617	.1592
11	.0538	.0556	.0499	.0586
12	.1251	.1479	.1443	.1476
13	.0646	.0670	.0630	.0720
14	.0465	.0511	.0502	.0570
15	.0099	.0111	.0100	.0163
16	.0646	.0617	.0600	.0679
17	.0516	.0531	.0528	.0545
18	.0272	.0290	.0226	.0396

表6 節点流出水量 P (m^3/s)

節点	(A)	(B)	(C)	(D)	真値
1	.0123	.0317	.0257	.0001	.0167
2	.1183	.0699	.0830	.0675	.0833
3	.0882	.0961	.0815	.0833	.0833
4	.1004	.0812	.0804	.0674	.0833
5	.0234	.0325	.0297	.0394	.0333
6	.0986	.0900	.0934	.1111	.1000
7	.1054	.1139	.1339	.1413	.1167
8	.1369	.1373	.1400	.1240	.1333
9	.0704	.0703	.0649	.0679	.0667
10	.0605	.0862	.0843	.0797	.0833
11	.0776	.0756	.0702	.0854	.0833
12	.0706	.0752	.0804	.0719	.0667
13	.0371	.0401	.0326	.0559	.0500