

(10) 大気拡散方程式の擬スペクトル解法に関する考察

DISCUSSION ON PSEUDOSPECTRAL METHOD
FOR ATMOSPHERIC DIFFUSION EQUATION

金 善泰*・平岡 正勝*

Sun-Tae KIM*, Masakatsu HIRAOKA*

ABSTRACT ; Pseudospectral Method is one of the methods to solve the partial differential equations numerically. Pseudospectral methods involve the expansion of the solution to a differential equation in high-order orthogonal expansion, the coefficients of which are determined by a weighted-residual projection technique. The main attraction of pseudospectral method is accuracy; however complex flow problems are typically difficult to solve. Several problems in practical solution of pseudospectral method for atmospheric diffusion equation are considered. The accuracy of Fourier expansion and Chebyshev expansion methods, FFT(Fast Fourier Transform) algorithm, the treatment of boundary condition and Gibbs phenomenon etc. are discussed, and the results of pseudospectral solution are compared with the results of analytical solution at steady state.

KEYWORDS ; Atmospheric Diffusion Equation, Numerical Method, Pseudospectral Method, Accuracy, Fast Fourier Transform, Numerical Smoothing

1 は じ め に

コンピュータの発達につれ、移流と拡散現象を記述する式(1)のような大気拡散方程式を数値的に直接解こうとする種々の試みが行われている。

$$\begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial t} + u \frac{\partial c}{\partial x} + v \frac{\partial c}{\partial y} + w \frac{\partial c}{\partial z} \\ = \frac{\partial}{\partial x} \left(K_x \frac{\partial c}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_y \frac{\partial c}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z \frac{\partial c}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (1)$$

ここで、 u, v, w は x, y, z の各方向の平均風速であり、 K_x, K_y, K_z は乱流拡散係数である。 y 方向に対して濃度一定の線源の問題と考え、また水平方向の拡散項と鉛直方向の移流による影響を無視するという仮定のもとで、式(1)を $Z = z/H, X = xK_z(H)/H^2 u(H), \tau = K_z(H)t/H^2, U = u/u(H), K = K_x/K_z(H), C = u(H)Hc/Q_0$ のように無次元化すると式(2)のようになる。ここで、 H は混合層高さである。

$$\frac{\partial C}{\partial \tau} + U(Z) \frac{\partial C}{\partial X} = \frac{\partial}{\partial Z} \left(K(Z) \frac{\partial C}{\partial Z} \right), \quad (2)$$

$$C(X, Z, 0) = 0, \quad (3)$$

$$C(0, Z, \tau) = \delta(Z - \theta)/U(\theta), \quad (4)$$

$$\frac{\partial C}{\partial Z} = 0, \quad Z = 0, 1. \quad (5)$$

*京都大学工学部 (Faculty of Engineering, Kyoto University)

式(4)の中で $\theta = h/H$ であり、 h は発生源の高さである。ここで、式(6)と式(7)のように水平風速の鉛直分布と乱流拡散係数分布が考えられる。

$$U(Z) = U(0)Z^m \quad (6)$$

$$K(Z) = K(0)Z^n \quad (7)$$

偏微分方程式を数値的に解く方法として、有限差分法と有限要素法が現在まで良く知られている。有限差分法は偏微分方程式の偏微分項を差分に近似して解く方法として、基本原理と近似過程が簡単であるため、流体解析の様々な分野で最も広く使われている方法である。なお、有限要素法は対象領域を幾つかの要素に分割し、要素内で近似方程式を組み立てて解く方法で、複雑形状に適用しやすいという利点を持っている。しかし、この二つの方法は近似上での空間誤差が比較的大きく、また非線形の問題に適用しにくいという欠点を持っている。

一方、偏微分方程式を数値的に解くための方法の一つであるスペクトル法は物理量の分布を幾つかの適当な関数の組み合わせで表そうとするものである。言い換えれば、スペクトル法は物理量の分布を種々の波長を持つ三角関数の和で表し、その波長区間で偏微分を解析する方法である。スペクトル法は空間分布の値が連続的に与えられるので、格子点モデルのような打ち切り誤差が生じないという決定的な利点を持っている [1]。

本研究では大気拡散方程式の実際のスペクトル解法に当たって、スペクトル法的基本原理、スペクトル法の精度及び構成アルゴリズムと、最後にスペクトル法による大気拡散方程式への適用例について検討を行った。

2 スペクトル法的基本原理

スペクトル法は重み付き残差法の一つとして試行関数と評価関数により構成される。試行関数の選択がスペクトル法を有限差分法及び有限要素法と区別させる特徴で、スペクトル法における試行関数は $\exp$, $\cos$, $\sin$ 関数のような無限に微分可能なグローバル関数である。なお、スペクトル法は評価関数の選択によって Galerkin 法、Collocation 法、Tau 法などに分けられるが、その単純さと変数係数と非線形問題にも適用しやすいという点からスペクトル法の中では Collocation 法 (擬スペクトル法) が最もよく使われている。本研究においてのスペクトル法による数値計算はすべてこの擬スペクトル法を用いて行った。擬スペクトル法では試行関数と選点 (Collocation Points) の選択が解の精度において重要な要因で、等間隔の選点や三角多項式を試行関数とするフーリエ変換と非等間隔の選点や Chebyshev 多項式を試行関数とする Chebyshev 変換が主に使われている。

フーリエ変換法は、式(8)の離散逆フーリエ変換よりフーリエ係数を求めた後、式(10)と式(11)によって各々変換空間での1次微分係数と2次微分係数が求まり、最後に式(9)の離散フーリエ変換によって物理空間へ戻される一連の過程によって偏微分を解析する方法である。式の中で L_x は x 方向の周期であり、 $x_j = jL_x/N$ である。

$$\tilde{u}_k = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} u(x_j) e^{-2\pi i k x_j / L_x} \quad -N/2 \leq k \leq N/2 - 1 \quad (8)$$

$$u(x_j) = \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} \tilde{u}_k e^{2\pi i k x_j / L_x} \quad j = 0, \dots, N-1 \quad (9)$$

$$u'(x_j) = \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} (ik) \tilde{u}_k e^{2\pi i k x_j / L_x} \quad j = 0, \dots, N-1 \quad (10)$$

$$u''(x_j) = \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} (-k^2) \tilde{u}_k e^{2\pi i k x_j / L_x} \quad j = 0, \dots, N-1 \quad (11)$$

Chebyshev 変換法は式(12)の逆 Chebyshev 変換によって Chebyshev 係数を求め、式(13)と式(14)の循環式によって変換空間での1次微分係数と2次微分係数を求める。次に、変換空間での1次、2次微分係数は式(15)と式(16)によって物理空間へ戻される。

$$\tilde{u}_k = \frac{2}{N} \sum_{n=0}^{N''} u(x) T_k(x_n) = \frac{2}{N} \sum_{n=0}^{N''} u(x_n) \cos(\pi k n / N), \quad |k| \leq N/2 \quad (12)$$

Table 1 The results of numerical solution of 1-D diffusion equation.

x	analytical	element	difference	x	analytical	spectral
0.00	0.0000000000	0.0000000000	0.0000000000	0.00	0.0000000000	0.0000000000
0.12	0.2960708737	0.2950658798	0.2970397472	0.04	0.0922872705	0.09229220
0.25	0.5470677018	0.5452119112	0.5488579273	0.15	0.3435217828	0.34352076
0.37	0.7147783637	0.7123488188	0.7120996714	0.31	0.6380488179	0.63805222
0.50	0.7736706734	0.7710455060	0.7707717419	0.50	0.7736701071	0.77366792
0.62	0.7147788405	0.7123606801	0.7121006846	0.69	0.6380488179	0.63805222
0.75	0.5470682979	0.5452331305	0.5450184345	0.85	0.3435217828	0.34352076
0.87	0.2960714698	0.2950848341	0.2949619293	0.96	0.0922872705	0.09229220
1.00	0.0000000000	0.0000000000	0.0000000000	1.00	0.0000000000	0.0000000000

$$\begin{aligned} \hat{u}_{N-1}^{(1)} &= 2N\hat{u}_N \\ \hat{u}_{N-2}^{(1)} &= 2(N-1)\hat{u}_{N-1} \end{aligned} \quad k = N-1, N-2, \dots, 0 \quad (13)$$

$$\hat{u}_{k-1}^{(1)} = \hat{u}_{k+1}^{(1)} + 2k\hat{u}_k \quad (14)$$

$$u(x_n) = \sum_{k=0}^N \hat{u}_k T_k(x_n), \quad n = 0, 1, \dots, N$$

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x} = \sum_{k=0}^N \hat{u}_k^{(1)} T_k(x_n) \quad (15)$$

$$\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x^2} = \sum_{k=0}^N \hat{u}_k^{(2)} T_k(x_n) \quad (16)$$

式中の $''$ は最初の項と最後の項に対してだけ $1/2$ をかけることを意味する。

3 スペクトル法の精度とアルゴリズムに関する考察

3.1 スペクトル法の精度

擬スペクトル法を大気拡散方程式の解法として利用しようとする最も大きな理由の一つはスペクトル法の高精度のためであろう。ここで、スペクトル法の精度について他の数値解法である有限差分法と有限要素法の結果と比較検討する。式(17)のような1次元の拡散方程式を式(18)の初期条件と式(19)の境界条件のもとで解く問題を考える。この問題の解析解は式(20)のようである。

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (x \in (0, 1), 0 < t < \infty) \quad (17)$$

$$u(x, 0) = \sin(\pi x) \quad (x \in [0, 1]) \quad (18)$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0 \quad (0 \leq t < \infty) \quad (19)$$

$$u(x, t) = e^{-\pi^2 t} \sin(\pi x) \quad (20)$$

有限差分法の場合はCrank-Nicolson法により離散化し、その三重対角行列をThomas法で解いた[2][3]。有限要素法においては二節点の一次線要素と時間変数に対してはCrank-Nicolson法を用いて導いた行列式を解くことにし[4]、スペクトル法ではChebyshev変換法を用いた。

各方法による解析結果($t = 0.026 \text{ sec}$)がTable 1に示されている。スペクトル法における選点は非等間隔であるので各方法による結果を直接比較できないが、解析解との比較からわかるように、スペクトル法が三つの数値解法の中で最も精度が高い。

スペクトル法では試行関数の選択が解の精度と密接な関係があり、次に $\sin(x)$ と $\exp(x)$ の1次微分を求める問題を対象としてフーリエ変換とChebyshev変換の精度について調べる。Table 2は試行関数としてフーリエ変換を用いて解いた結果であり、Table 3はChebyshev変換を用いて解いた結果である。試行関数としてフーリエ変換を用いる場合は $\sin(x)$ のような周期関数に対しては非常に良い精度の結果を示しているが、 $\exp(x)$ のような非周期関数に対して大幅の振動現象が

Table 2 The accuracy of fourier spectral collocation method.

a) 1st differentiation of $f(x) = \sin(x)$.			b) 1st differentiation of $f(x) = \exp(x)$.		
x	exact	$f'(x)$	x	exact	$f'(x)$
0.00	1.0000000000	1.0000005960	0.00	1.0000000000	-697.0435180664
0.39	0.9238795042	0.9238790870	0.39	1.4809726477	311.2330627441
0.79	0.7071067691	0.7071065903	0.79	2.1932799816	-184.2607421875
1.18	0.3826834261	0.3826835155	1.18	3.2481877804	127.0765075684
1.57	-0.0000000437	0.0000001377	1.57	4.8104777336	-79.0491180420
1.96	-0.3826835155	-0.3826830685	1.96	7.1241860390	61.4985389709
1.36	-0.7071067691	-0.7071073055	2.36	10.5507240295	-19.6193237305
2.75	-0.9238796234	-0.9238792658	2.75	15.6253366470	24.1029205322
3.14	-1.0000000000	-0.9999999404	3.14	23.1406955719	35.6959228516
3.53	-0.9238795042	-0.9238792062	3.53	34.2707328796	-0.2939758301
3.93	-0.7071066499	-0.7071070671	3.93	50.7540283203	110.2615966797
4.32	-0.3826831281	-0.3826831579	4.32	75.1653442383	-15.2737426758
4.71	0.0000000119	0.0000000185	4.71	111.3177795410	244.6258392334
5.11	0.3826836050	0.3826836050	5.11	164.8586120605	-37.6771888733
5.50	0.7071070075	0.7071069479	5.50	244.1511383057	589.3893432617
5.89	0.9238795638	0.9238784313	5.89	361.5810546875	-470.6661376953

Table 3 The accuracy of chebyshev spectral collocation method.

a) 1st differentiation of $f(x) = \sin(x)$.			b) 1st differentiation of $f(x) = \exp(x)$.		
x	exact	$f'(x)$	x	exact	$f'(x)$
-1.00	0.5403022766	0.5403067470	-1.00	0.3678794503	0.3678789139
-0.98	0.5563701987	0.5563693047	-0.98	0.3750165105	0.3750163913
-0.92	0.6027290821	0.6027295589	-0.92	0.3969759941	0.3969759941
-0.83	0.6737905741	0.6737899184	-0.83	0.4354089499	0.4354081750
-0.71	0.7602446079	0.7602446079	-0.71	0.4930686951	0.4930697680
-0.56	0.8495998383	0.8496000767	-0.56	0.5737450123	0.5737447143
-0.38	0.9276659489	0.9276659489	-0.38	0.6820287704	0.6820286512
-0.20	0.9810301661	0.9810303450	-0.20	0.8227604032	0.8227601051
0.00	1.0000000000	0.9999991059	0.00	1.0000000000	0.9999984503
0.20	0.9810301661	0.9810301065	0.20	1.2154207230	1.2154214382
0.38	0.9276659489	0.9276661277	0.38	1.4662139416	1.4662148952
0.56	0.8495997787	0.8495991826	0.56	1.7429348230	1.7429311275
0.71	0.7602446079	0.7602440119	0.71	2.0281150341	2.0281152725
0.83	0.6737905145	0.6737904549	0.83	2.2966916561	2.2966908409
0.92	0.6027289629	0.6027221680	0.92	2.5190443993	2.5190219879
0.98	0.5563701987	0.5563793182	0.98	2.6665494442	2.6665725708

生じているのがわかる。一方、Chebyshev 変換を用いる場合は周期関数 $\sin(x)$ に対して勿論のことであり、非周期関数であるが連続関数である $\exp(x)$ に対しても非常に高い精度の結果を示している。

3.2 高速フーリエ変換

スペクトル法における計算の中心部分はフーリエ変換で、スペクトル法のアルゴリズムの中で最も計算時間のかかるところである。Cooley and Tukey(1965)[5]の複素数高速フーリエ変換以来、種々の FFT 法が紹介された。Cooley ら (1970)[6]は実数のデータの FFT とそれに基づいた高速 sine 変換と cosine 変換法を提案した。この方法は、従来の複素数 FFT 法が実数データに対して虚数の部分に 0 を入力して計算する非経済的な面を改善したものである。すなわち、Cooley ら (1970)の方法は実数データを 2 つの部分に分けて一つのデータ群は実数部分に、もう一つのデータ群は虚数部分に入れて計算することによりさらに計算時間を減らした方法である。したがって、この方法を用いて計算するには複素数 FFT を利用するためのデータの前処理と後処理の作業が必要となる。本研究では Cooley ら (1970)の方法に基づいて、フーリエ cosine 変換と Chebyshev 変換に同時に利用できる FFT を作成して [7][8] 用いることにした。

2 次元のフーリエ cosine 変換について、FFT を使わずに直接計算する場合と複素数 FFT により計算する場合及び、本研究での前処理と後処理による実数データの FFT により計算する三つの方法による計算時間の比較を Fig. 1 に示す。Fig. 1 の計算時間は NEC の PC98RX(16 ビットパソコン)のシステムで比較した結果で、データの個数が多くなるにつれ、FFT の使用有無に伴う計算時間の差は大幅なものとなり、また実数データの FFT が従来の複素数 FFT 法より計算時間が短いのがわかる。

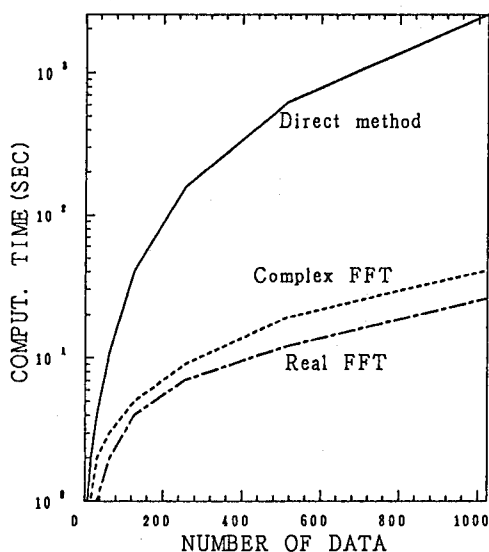


Fig. 1 フーリエ変換の計算時間比較

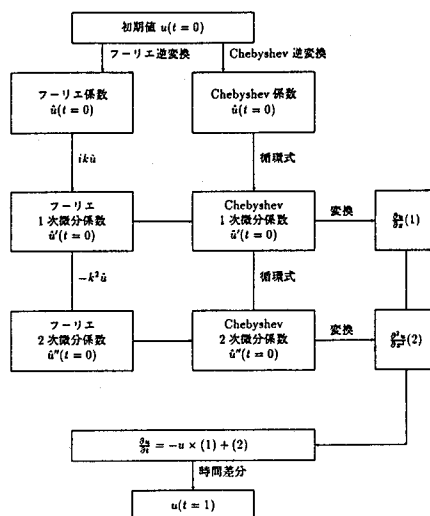


Fig. 2 大気拡散方程式のスペクトル解法の流れ図

3.3 擬スペクトル法による大気拡散方程式の数値解

本研究におけるスペクトル解法の最終的な対象式は、式 (2) の拡散項を分解した次の式 (21) とする。

$$\frac{\partial C}{\partial \tau} = -U(Z) \frac{\partial C}{\partial X} + \frac{\partial K(Z)}{\partial Z} \frac{\partial C}{\partial Z} + K(Z) \frac{\partial^2 C}{\partial Z^2}, \quad (21)$$

Fig. 2 に擬スペクトル法による偏微分方程式の解法の流れを示す。まず、ある初期値から空間変数についてフーリエ逆変換 (式 (8)) または Chebyshev 逆変換 (式 (12)) によりフーリエ係数または Chebyshev 係数を求める。次に、変換空間でフーリエ係数または Chebyshev 係数から 1 次微分係数または 2 次微分係数を求める (式 (10), (11), (13))。求められた微分係数はフーリエ変換 (式 (9)) または Chebyshev 変換 (式 (14)) により物理空間に戻される。最後は、時間変数の近似でスペクトル法では時間に関してもその変化を関数で表すようなことはできないので、時間微分は時間差分に置き換えて解くのが一般的である。ここで差分誤差が生じることは避けられないが、時間差分による打ち切り誤差が水平空間差分による打ち切り誤差よりきわめて小さいことが知られており、スペクトル法によって空間差分の打ち切り誤差をなくすることができるので、時間差分による打ち切り誤差はあまり重要ではない [1]。

Fig. 3 の計算の初期条件は $x = 0, z = 0.19$ の発生源から排出量が 1 であり、他の選点の初期濃度はすべて 0 の不連続場を与えた。水平風速の鉛直速度分布と拡散係数の鉛直方向の分布は式 (6) の $m = 0$ 、式 (7) の $n = 1$ の場合を考えた。地表面での風速 $u(0)$ と拡散係数 $K(0)$ は各々 1 とした。選点数は x 方向に 16 個、 z 方向に 16 個であり、時間間隔は 0.0005 である。スペクトル法での関数の拡張は、 x 軸については Chebyshev 変換、 z 軸については式 (5) の境界条件を自動的に満たすフーリエ cosine 変換を利用した。フーリエ cosine 変換は基底関数を複素数フーリエ変換の指数関数の代わりに cosine 関数を用いて拡張することである。FFT 法については前節で述べたような実数データに対する FFT 法を用い、時間差分においては Adams - Bashford 予測子、修正子法を用いた。Fig. 3 にこれらの条件のもとで擬スペクトル法によって求めた数値解を示す。

Fig. 3 の中の解析解は Demuth(1978) の定常状態での解析解で、式 (6), (7) のもとで式 (22) のように求められる。Fig. 3 の擬スペクトル法による数値解は地表面の濃度分布において境界条件と振動現象のため解析解と少しの差が見えるが、全体的に解析解と非常に一致する結果となっている。

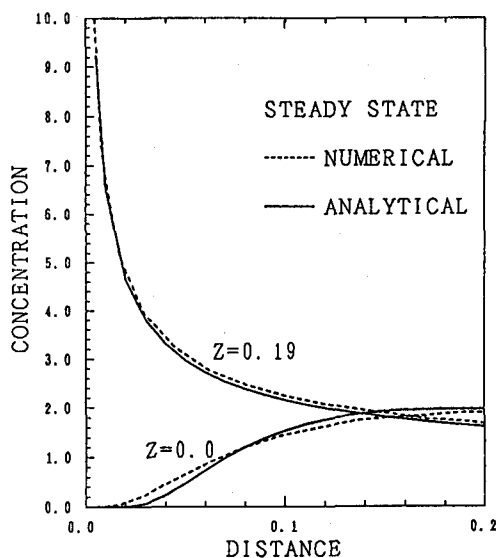


Fig. 3 大気拡散方程式のスペクトル解法による
定常状態における濃度分布

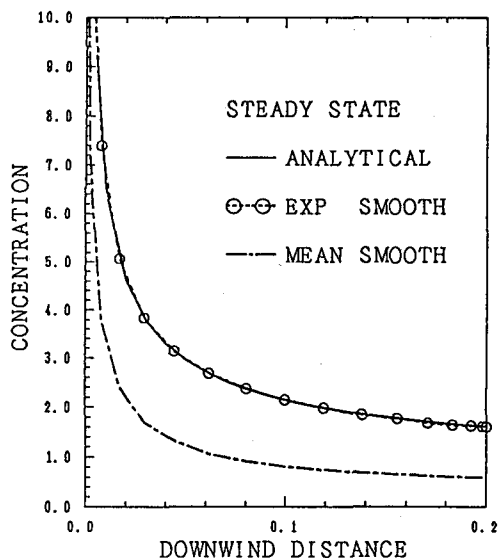


Fig. 4 大気拡散方程式のスペクトル解法における
平滑化法の比較

$$C(x, z) = \frac{2qQ}{Hu(H)} \left[\mu + \left(\frac{zh}{H^2} \right)^p \sum_{l=1}^{\infty} \frac{J_{\mu-1}(j_{\mu,l}h^q/H^q)J_{\mu-1}(j_{\mu,l}z^q/H^q)}{J_{\mu-1}^2(j_{\mu,l})} \times \exp \left\{ -j_{\mu,l}^2 \frac{q^2 K_z(H)}{H^2 u(H)} x \right\} \right] \quad (22)$$

ここで、 Q は排出量、 J は Bessel 関数であり、 j は Bessel 関数の根である。 p, q, μ は次のようである。

$$2p = 1 - n, \quad 2q = m - n + 2 > 0, \quad \mu = (m + 1)/(m - n + 2) \quad (22)$$

3.4 スペクトル法の振動現象と平滑化

スペクトル法は一般に周期、連続関数については他の方法と比べて最も精度の高い方法であるが、ステップ関数やデルタ関数のように極端な不連続部分が存在する場合は不連続付近の Gibbs 現象や区間全体にかかる振動現象が発生する。この振動現象によって数値発散や実際の応用において非現実値の負の値が生じるので、これらに対する平滑化処理が必要である。特に、時間的な濃度変化とその結果の可視化などの作業においてはこれらの振動現象の処理によってはまったく異なる結果となる恐れも有り得る。

振動現象と関連してスペクトル法で使われている平滑化法は、元の関数を滑らかにして解析する前処理法と数値計算の結果を平滑化する後処理の方法に分けられる。大気拡散方程式のスペクトル解法と関連し、平滑化の作業が簡単であり、かなり精度の高い方法として移動 2 項平均による後平滑化処理法と指数平滑化が考えられる [9][10]。Fig. 4 に大気拡散方程式を解く過程で生じる振動現象を移動 2 項平均と指数平滑化により平滑化した結果を示す。

中心化 2 項移動平均による平滑化式は次のようで、

$$f(i) = (f(i-1) + 2f(i) + f(i+1))/4 \quad (23)$$

この方法は質量保存則を満たしているので、一般に線形のデータについては比較的効果的な方法である。実際ほとんどの統計解析におけるスペクトル解析でこの平滑化法を利用している。しかし、この平滑化法は極値を大幅に滑らかにし、また非線形の場合は周辺のデータにより元のデータが過小または過大評価される可能性が有り得る。特に、反復計算においてはこれらの影響が段々大きくなり、Fig. 4 の定常状態における結果を見ると解析解とかなり離れている。結局、移動 2 項平均によ

る平滑化法は一般に最後のデータに対する1回の平滑化法としては良い方法であるが、反復計算での平滑化法としてはあまり適合していないと思われる。

一方、デルタ関数の振動現象の前平滑化法としての指数平滑化法は、デルタ関数を計算の最初段階で指数平滑化して、フーリエ変換の際振動現象が出ないように滑らかにする方法で、デルタ関数の指数平滑化式は式(24)のようである。

$$x(t) = \delta(t) \longrightarrow f_1(t) = \alpha(1 - \alpha)^t \quad (24)$$

指数平滑化法における平滑化の程度は平滑化係数(α)と対象格子点の数(t)により決められる。Fig. 4は平滑化係数 $\alpha = 0.5$ と格子点の数を16とした場合の定常状態の結果で解析解と非常に一致しているのがわかる。

4 お わ り に

スペクトル法は偏微分方程式を無限に微分可能な試行関数を用いて数値的に解く方法で、他の数値解法と比べて非常に精度の高い方法である。本研究は、大気拡散現象の解析にスペクトル法の高精度を利用しようとする試みの一つとして、スペクトル法の精度及び適用過程で考慮すべき幾つかの問題、すなわち高速フーリエ変換及び振動現象の平滑化等について検討した。また実際の適用例として、擬スペクトル法により大気拡散方程式を解いて解析解と比較した結果、解析解と非常に一致している結果が得られた。

今後、スペクトル法はその高精度を目指して、大気の流れ・拡散現象の解析のための数値解法として良く利用されることが考えられるが、実際の応用まではまだ数多くの問題を残している。今後の研究課題としては、反応性物質と複雑地形に関する考慮[11]、計算時間間隔の厳しさの解決、計算時間の短縮等が挙げられる。

参考文献

- [1] 気象庁予報部：スペクトル法による数値予報(その理論と実際)、電子計算室報告、1982。
- [2] 町田東一、小島紀尾：パソコン BASIC 数値計算 II、東海大学出版会、pp.55-71、1987。
- [3] 杉江日出澄ら：FORTRAN77による数値計算法、培風館、1987。
- [4] 水本久夫・原平八郎：エンジニアリングサイエンスのための有限要素法プログラム編、森北出版株式会社、pp.62-74、1984。
- [5] Cooley J. W. and Tukey, J. W. : An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series, *Math. Comput.*, 19, pp.297-301, 1965。
- [6] Cooley J. W., et al. : The fast fourier transform algorithm-Programming consideration in the calculation of sine, cosine and laplace transforms, *J. Sound Vib.* 12(3), pp.315-337, 1970。
- [7] Brigham E. O. : The Fast fourier transform, Prentice-Hall Inc., pp.128-131, pp.148-171, 1974。
- [8] Canuto C., et al. : Spectral methods in fluid dynamics, Springer-Verlag, Appendix B, 1988。
- [9] 金善泰、平岡正勝：スペクトル法による移流-拡散方程式の解析手法に関する研究 I - デルタ関数のスペクトル解析における平滑化に関する数値実験、第45回土木学会講演要旨集、pp.572-573, 1990。
- [10] 金善泰、平岡正勝：大気拡散方程式のスペクトル解法における平滑化に関する研究、大気汚染学会誌 26(6), pp.371-377, 1991。
- [11] 金善泰、平岡正勝：地形影響を考慮した大気拡散のスペクトル解法に関する研究、京都大学環境衛生工学研究会第13回シンポジウム講演論文集、pp.103-108, 1991。