

(1) 琵琶湖南湖における藻類異常増殖の確率予測について

A STOCHASTIC MODEL FOR ALGAL BLOOM IN LAKE BIWA

原沢英夫*・住友 恒**

Hideo HARASAWA*・Hisashi SUMITOMO**

ABSTRACT; One of the major concerns of lake management in nutrient rich areas is the potential for algal blooms. Large algal population can clog filters in water supply systems and cause heavy damage to various uses of water resources. Simulation models can be used to predict the potential for algal blooms and thus can be used to help estimate the effective use of alternative management strategies.

This paper discusses a stochastic model for simulating short-term variation of spatial pattern of harmful blue-green algae in a lake. This model is theoretically derived on the basis of the Markov process and simplified for practical application. The basic idea of this model is as follows; (1) Algal growth mechanism in two-dimensional water body is separated into two functional elements—growth and transportation of algae, which are formulated as growth probability and transport probability respectively. (2) Growth probability is estimated by the analysis of the data observed in the actual occurrence of algal bloom and transport probability by the lake flow simulation model considering wind effect. Each probability is described as the matrix notation for calculation. This model is applied to the southern part of Lake Biwa, and the ability of the model is examined. As a result, it is found that this model is a helpful tool to predict algal bloom and from the standpoint of simulation the initial condition setting is dominant factor for prediction of short-term spatial variation of algal bloom in lake.

KEYWORD; ALGAL BLOOM, STOCHASTIC MODEL, MARKOV PROCESS

1. はじめに

富栄養化した湖沼における藻類の大量発生やそれに起因する異臭味水の発生は、湖沼のリクリエーション的価値や水資源としての価値を大いに減少させている。特に水道原水を湖沼から取水している浄水場では深刻な問題で、異臭味水対策に毎年のように頭を悩ませている。このため藻類の異常発生や異臭味水の発生機構を解明し、その効果的な対応策を講ずることが浄水管理の点から重要な検討課題の一つとなっている。また効果的な対応策を時間的余裕をもって実施するためには、水源としての湖沼の水質監視を強化する必要があるが、経済的、人的制約から湖沼全域を常に監視することは一般に困難な現状である。こうした状況下で水源の水質監視を効率良く行うには、藻類の発生予測や予報などを可能にするモデルの利用が有効であると考えられる。

*国立公害研究所 The National Institute for Environmental Studies

**京都大学工学部 Kyoto University, Faculty of Engineering

湖沼での藻類の異常増殖現象は、比較的短期間で発生、消滅すること、またその発生は局所的な水域に限定されることが特徴として挙げられる⁽¹⁾。このため異常増殖の予測では単に湖全体の発生時期、量ばかりではなく、どの水域で発生しそうかの情報が水質管理上は重要となる。従来の湖沼生態系モデルの大半は比較的長期間（月～年単位）の藻類、栄養塩の収支を扱うことを主たる目的としており、また藻類を中心とした生態学的関係を重視し、水理過程に関しては水域を完全混合槽と仮定するなどの簡単化を行っているのが特徴である。このため藻類の発生、流下に関する情報など対策をたてる上で必要な情報を十分に得ることはできない。

湖沼など2次元的に広がる流れの場で面的に藻類変化を予測するためには、湖沼の各地点に存在する藻類が時間とともにどのように増殖・死滅しながら流下するかを定量化する方法を確立することが必要であり、その方法としては、決定論的に藻類の流下過程を数式表示しておく方法と、確率論的に地点間の藻類の遷移確率を定量化しておく方法の二つが考えられる。本研究では後者の立場をとり、湖沼など二次元的に広がる流れ場において、藻類の移動、増殖の過程を確率的に変動するものとし、遷移確率として定量化し、藻類の分布パターンの短期的予測を行うモデルを提案するものである。特に確率論的モデルに着目したのは、藻類異常増殖の機構についての知見が未だ十分得られておらず不確実性の高い現象であること、また水質管理上対策を講じる際には降水確率のような確率予報が水源監視や、浄水処理の強化など対策を具体化する際の情報として有効であると考えられるからである。

確率予測については気象の分野では、はやくから研究がすすめられており、周知のように降水確率として実用化されている。現在降水確率は人間活動を決定する際の一つの重要な情報と位置付けることができる。一方水質現象については、2章に示したような確率論的モデルについての研究がみられるが、気象予報のように実用化を目指した研究についてはこれまであまりなされていない。

2. 水質変化の確率論的モデルについて

生物の増殖・死滅過程の確率論的モデルについては、Pielue⁽²⁾に代表される数理生態学の分野で多くの研究がなされている。生物体集団の一次増殖モデルである出生死滅過程(Feller-Arley過程)、外部からの移動を考慮したKendall過程などマルコフ過程により定式化した確率論的モデルが代表的である⁽³⁾。湖内の藻類動態ではさらに、面的流下過程、すなわち空間的分布をも考慮する必要があるが、数理生態学の分野で生物の増殖・流下の影響による空間分布を同時に定式化し、解を得たモデルは殆んどない。

一方、自然水中の藻類量は有機性水質指標であるBODのように反応性（非保存性）の水質物質とみなすことができる。一次元的な流れ場として近似しえる河川、感潮部については、BOD、DOなどの水質変化を確率論的に定式化した水質変化モデルに関する研究がマル

TABLE 1 Types of stochastic water quality model

TYPE	CHARACTERISTICS	RESEARCHER
① Markov process ・ Markov chain ・ random walk ・ birth-and-death process	formulation of water quality by state and transition probability	Loucks et.al. (1966) Thayer et.al. (1967) Custer et.al. (1969) Schofield et.al. (1972,4) Stochastic Incorporated (1971) Goda et.al. (1969)
② ARIMA model	application of Box and Jenkins' time series analysis method	Metha et.al. (1975)
③ Monte-Carlo simulation	a large number of numerical solutions generated Monte-Carlo procedure	Kothandaraman et.al. (1969) Shih (1975) Whitehead et.al. (1979) Fedra (1983)
④ Variance (Error) propagation equation	evaluation of variance propagation	Chamberlain et.al. (1974) Burgess et.al. (1975)
⑤ Kalman filter	real time control and prediction	Beck et.al. (1976) Bowles et.al. (1978)
⑥ Stochastic differential equation	theoretical and numerical calculation of differential equation with error term	Tiwari et.al. (1976) Finney et.al. (1982) Papadopoulos (1983)

表2に示すように多くが河川を一次元的流れ場とし、

TABLE 2 Stochastic water quality models based on Markov Process

RESEARCHER	WATER BODY	VAR.	STOCHASTIC VAR.	METHOD	NOTE
Loucks and Lynn (1966)	river, 1-dim. stationary	DO, BOD	DO	Markov chain	assessment of wastewater systems evaluation of environmental standard
Thayer and Krutchkoff (1967)	river, 1-dim. stationary	DO, BOD	DO, BOD, line source, B.S.	random walk	evaluation of probability distribution of river water quality
Kothandaraman and Wing (1969)	river, 1-dim. stationary	DO, BOD	deoxygen and reaeration coe	Monte-Carlo simulation	combination of revised Streeter-Phelps model
Custer and Krutchkoff (1969)	tidal river 1-dim. nonsta.	DO, BOD	DO, BOD, line source, B.S.	random walk	evaluation of tidal effects on water quality
Goda, Somiya and Nishizawa (1969)	river, 1-dim. stationary	BOD	BOD	formulation by transient prob.	considering uncertainty of water quality variation
Stochastic Incorporated (1971)	tidal river 1-dim. nonsta.	DO, BOD	DO, BOD, line source, B.S.	random walk	evaluation of tidal effects segmentation of water body
Schofield and Krutchkoff (1972)	tidal river 1-dim. nonsta.	DO, BOD	DO, BOD, line source, B.S.	random walk	
Schofield and Krutchkoff (1974)	tidal river 1-dim. nonsta.	several water v.	all water quality items	continuous 2-dimensional random walk	enhancement of Markov model to deal with several water quality items

B.S. : bottom sediment

流速変動がない定常状態を対象としてモデル化を行っており、またモデル化にあたってはいくつかの仮定を設けている場合が多い。既存の研究では二次元流れ場として湖へマルコフ過程を適用した例はみられないが、他の確率論的モデルに比べて以下の観点から二次元流れ場への適用が容易であると考えられる。

- ① 水中の浮遊性物質や溶解性物質の挙動を取り扱う水質変化の動的解析法として、移流拡散型物質収支式が用いられるが、これに生物反応項を含めて藻類個体を浮遊性物質として取り扱うモデルが提案されている。自然水中での藻類個体を浮遊性物質として取り扱い、増殖・死滅を反応項で表現することにより、ランダムウォークとして定式化できる。
- ② 藻類増殖と湖内の流動状態との直接的な関連性については知見も乏しく、現段階では定式化が困難である。マルコフモデル適用上は、藻類増殖と流動については独立な現象とみなすことにより現象の次元を下げることができ、定式化及び解法が簡単になる。
- ③ マルコフモデルは状態確率及び状態間の推移確率により特徴づけられるが、これらの確率を用いて、初期・境界条件より逐次、藻類分布の時間的変化を追跡しうる。

3. 遷移確率による藻類動態モデル

湖内の藻類量を個体数濃度で表し、 i [N/ml: $i=0, 1, 2, \dots$ の整数値] とする。湖内の場所 (x, y) 、時間 t で藻類量 i をとる状況を考え、これを『状態』と呼ぶことにし、その確率を『状態確率』として $\nu(x, y, i, t)$ で表現する。状態間の変化は推移確率により記述されるが、状態 (x, y, i, t) から状態 (x', y', i', t') へと推移する確率を $P_T(x, y, i, t | x', y', i', t')$ と記して『遷移確率』と呼ぶ。

定式化にあたっては、

- ① 湖を二次元流れ場とし水深方向の流速は 0、また藻類個体数分布も一様とする。
- ② マルコフ性が成立する。
- ③ 水理過程に起因する移動と藻類増殖による個体数の増減は独立な現象とみなし、また十分短い時間では定常性が満たされる。

の仮定を置く。

3.1 遷移確率の定式化

二次元流れ場での位置 (x, y) を一定値 $\Delta x, \Delta y$ で離散化し、 $(m, n) = (x/\Delta x, y/\Delta y)$ とおく。時間 t についても一定値 Δt で割り離散化して $k = t/\Delta t$ 、藻類については個体数濃度 i で表し、状態確率、遷移確

率を各々 $\nu(m, n, i, k)$, $P_T(m, n, i, k | m', n', i', k')$ とおく。

時点 k , 位置 (m, n) に存在する個体数濃度 i の状態にある藻類が隣接する位置 $(m+1, n)$, $(m, n+1)$ 等に単位時間 Δt の間に移動する確率を x の正, 負方向に Δx 進む時, 各々 $p_x(m, n, k)$, $q_x(m, n, k)$, y の正, 負方向に Δy 進む確率を各々 $p_y(m, n, k)$, $q_y(m, n, k)$ とおく (図 1)。また個体数 i から j に変化する確率を $r_{ij} \Delta t$ とする。仮定③のように移動及び個体数変化が独立な事象とし, 移動しかつ変化するなどの複合的事象の確率を無視すれば,

$$p_x(m, n, k) + q_x(m, n, k) + p_y(m, n, k) + q_y(m, n, k) + \sum_{j=1}^I r_{ij}(m, n, k) \Delta t = 1 \quad (1)$$

ここに I は個体数のとりえる最大値を示す。

また r_{ij} に関しては,

$$\sum_{j=1}^I r_{ij}(m, n, k) \Delta t = R_i(m, n, k) \Delta t \quad (2)$$

と置く。

時点 k_0 に位置 (m_0, n_0) より出発した藻類が時点 k , 位置 (m, n) , 個体数 i の状態にある確率を初期の状態も区別するために $\nu(m, n, i, k | m_0, n_0, k_0)$ とおく。ここで $\nu(m, n, i, k | m_0, n_0, k_0)$ は次の関係式を満たす。

$$\sum_{i=0}^I \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \nu(m, n, i, k | m_0, n_0, k_0) = 1.0 \quad (3)$$

状態確率 $\nu(m, n, i, k | m_0, n_0, k_0)$ はマルコフ性の仮定より遷移確率および 1 時点前の状態確率より求めることが出来る。

$$\begin{aligned} \nu(m, n, i, k | m_0, n_0, k_0) = & p_x(m-1, n, k-1) \cdot \nu(m-1, n, i, k-1 | m_0, n_0, k_0) \\ & + q_x(m+1, n, k-1) \cdot \nu(m+1, n, i, k-1 | m_0, n_0, k_0) \\ & + p_y(m, n-1, k-1) \cdot \nu(m, n-1, i, k-1 | m_0, n_0, k_0) \\ & + q_y(m, n+1, k-1) \cdot \nu(m, n+1, i, k-1 | m_0, n_0, k_0) \\ & + R_i(m, n, k) \cdot \Delta t \end{aligned} \quad (4)$$

初期条件は,

$$\begin{aligned} \nu(m, n, i, k | m_0, n_0, k_0) = & P_0(m_0, n_0, i, k_0); m=m_0, n=n_0, k=k_0 \\ = & 0; m \neq m_0, n \neq n_0, k \neq k_0 \end{aligned} \quad (5)$$

で与えられる。ここで $P_0(m_0, n_0, i, k_0)$ は時点 k_0 , 位置 (m_0, n_0) で個体数 i をとる確率である。 p_x, q_x 等は 1 式及び次の 6~8 式を仮定することにより, 9 式のように表現することができる。

$$p_x - q_x = U \Delta t / \Delta x \quad (6)$$

$$p_y - q_y = V \Delta t / \Delta y \quad (7)$$

$$p_x + q_x = p_y + q_y \quad (8)$$

$$\left. \begin{aligned} p_x(m, n, k) &= \frac{1}{4} \left(1 - \sum_{j=1}^I r_{ij} \Delta t \right) + \frac{U \Delta t}{2 \Delta x} \\ q_x(m, n, k) &= \frac{1}{4} \left(1 - \sum_{j=1}^I r_{ij} \Delta t \right) - \frac{U \Delta t}{2 \Delta x} \\ p_y(m, n, k) &= \frac{1}{4} \left(1 - \sum_{j=1}^I r_{ij} \Delta t \right) + \frac{V \Delta t}{2 \Delta y} \\ q_y(m, n, k) &= \frac{1}{4} \left(1 - \sum_{j=1}^I r_{ij} \Delta t \right) - \frac{V \Delta t}{2 \Delta y} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

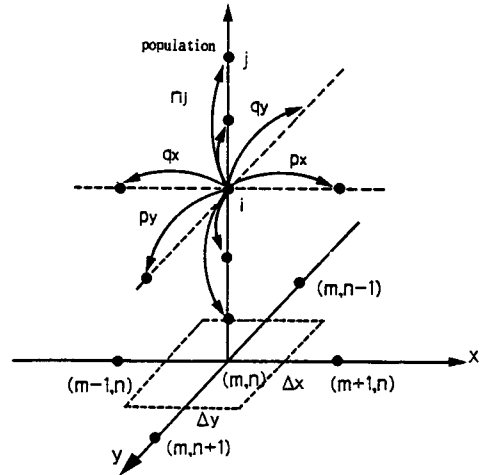


Fig.1 Schematic view of transport probability and growth probability

ここに U , V は x , y 方向の流速である。また、 p_x , q_x 等が確率として意味を持つためには、 $U\Delta t/\Delta x < 1$, $V\Delta t/\Delta y < 1$ なる制約を満たすよう U , V , Δt , Δx , Δy をとる必要がある。

4 式において Δx , Δy , $\Delta t \rightarrow 0$ となる極限を考えると状態確率 $\nu(m, n, i, k | m_0, n_0, k_0)$ は連続関数としての確率密度関数 $g(x, y, i, t | x_0, y_0, t_0)$ に漸近する。 $g(\cdot)$ で 4 式を書き直すと、

$$\begin{aligned} g(x, y, i, t + \Delta t | x_0, y_0, t_0) = & p_x(x - \Delta x, y, t) \cdot g(x - \Delta x, y, i, t | x_0, y_0, t_0) \\ & + q_x(x + \Delta x, y, t) \cdot g(x + \Delta x, y, i, t | x_0, y_0, t_0) \\ & + p_y(x, y - \Delta y, t) \cdot g(x, y - \Delta y, i, t | x_0, y_0, t_0) \\ & + q_y(x, y + \Delta y, t) \cdot g(x, y + \Delta y, i, t | x_0, y_0, t_0) \\ & + R_i(x, y, t) \cdot \Delta t \end{aligned} \quad (10)$$

上式を Taylor 展開した後、 $(\Delta x)^2/\Delta t = 2E_x$, $(\Delta y)^2/\Delta t = 2E_y$ (一定値) となるように Δx , Δy , $\Delta t \rightarrow 0$ にすると、

$$\frac{\partial g}{\partial t}(x, y, i, t | x_0, y_0, t_0) + U \frac{\partial g}{\partial x} + V \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{E_x}{2} \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{E_y}{2} \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + R_i \quad (11)$$

11 式より得られる $g(x, y, i, t | x_0, y_0, t_0)$ は時点 t_0 、位置 (x_0, y_0) より放出された藻類個体が時点 t で位置 (x, y) に移動し、かつ個体数が i に変化する確率の一般的表現である。11 式は水質物質を対象とした移流・拡散方程式に生成、消滅を示す反応項が加わった形となっている。各時点で各地点から放出される個々の個体の挙動を追跡し、重ね合わせることで任意時点、任意地点の藻類の存在状態の確率分布を求めることができることを示している。

極限をとることによって得られる 11 式を実際の二次元流れ場へ適用するには初期条件、境界条件の設定が煩雑であり、また個々の藻類について得た確率密度関数の合成関数 (convolution) も数値計算によらざるを得ない。解法上の工夫としては、遷移確率の定義式に戻り逐次シミュレーションを行い、藻類の挙動を追跡する方法が考えられる。状態間の遷移をマルコフ連鎖として扱う方法や Monte-Carlo シミュレーションにより個々の藻類個体に着目して時間的・空間的に追跡し、集計する方法がある。

ここでは、状態間の推移を遷移確率を用いて逐次計算するマルコフ連鎖による方法を取った。仮定③により遷移確率 $P_T(m, n, i, k | m', n', i', k')$ を次式のように到達確率と増殖確率の積で表現する。

$$P_T(m, n, i, k | m', n', i', k') = P_A(m, n, k | m', n', k') \cdot P_G(i, k | i', k') \quad (12)$$

ここで、 $P_A(m, n, k | m', n', k')$ は時点 k 、位置 (m, n) の藻類個体が時点 k' に位置 (m', n') に移動する確率であり、ここでは『到達確率』と呼ぶ。 $P_G(i, k | i', k')$ は時点 k で状態 i にあった藻類個体が時点 k' で状態 i' へ推移する確率であり、藻類を対象とする時は増殖・死滅を表すことから『増殖確率』と呼ぶ⁽⁵⁾。

到達確率及び増殖確率は各々湖の流動条件、藻類増殖条件が時間に依存しない定常状態とみなしうる場合には時間差 $\tau = k' - k$ により、 $P_A(m, n | m', n', \tau)$, $P_G(i | i', \tau)$ で表現しうる。この時遷移確率は $P_T(m, n, i | m', n', i', \tau)$ となる。時間差 τ として単位時間 Δt をとる単位の遷移確率を $P_T(m, n, i | m', n', i', \Delta t)$ とする。時点 k' 、位置 (m', n') で、個体数 i' をとる状態確率 $\nu(m', n', i', k' | m_0, n_0, k_0)$ は初期状態に依存しないから、単に $\nu(m', n', i', k')$ と記すと、1 時点前の状態から次のように表しうる。

$$\begin{aligned} \nu(m', n', i', k') = & \sum_i \sum_n \sum_m P_T(m, n, i | m', n', i', \Delta t) \cdot \nu(m, n, i, t - \Delta t) \\ = & \sum_i \sum_n \sum_m P_A(m, n | m', n', \Delta t) \cdot P_G(i | i', \Delta t) \cdot \nu(m, n, i, t - \Delta t) \end{aligned} \quad (13)$$

初期状態を $\nu(m_0, n_0, i_0, 0)$ とおくと、時点 $k = 1, 2, \dots$ の各地点 (m, n) における状態確率 $\nu(m', n', i', k')$ を順次計算できる。

3.2 モデル適用上の検討事項

以上の遷移確率モデルを実際の水域へ適用するには、(1)対象水域を適当に分割し、(2)到達、増殖確率の定量化を行い、(3)初期・境界条件を設定した上でシミュレーションを行う必要がある。ここでは、水域を水理的に等質とみなしうる数ブロックに分割し、ブロック間の到達確率、増殖確率をマトリクス表示し、マトリクス演算によりシミュレーションする方法をとった。

(a) 水域のブロック分割

水域を水理的に等質ないくつかのブロックに分割するが、ここでは藻類個体数、水質値などの観測値との対応から観測地点を代表するブロック分割を行った。

(b) 到達確率の定量法

ブロック間の到達確率は以下のように定量化した。式 6, 7 の左辺を各々 P_1, P_2 とおき、単位メッシュ (図 1) の水深を h とすると、

$$P_1 = \frac{U \Delta t}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta y \cdot h}{\Delta y \cdot h} = \frac{\Delta Q_x \cdot \Delta t}{\Delta V} \quad (14)$$

$$P_2 = \frac{V \Delta t}{\Delta y} \cdot \frac{\Delta x \cdot h}{\Delta x \cdot h} = \frac{\Delta Q_y \cdot \Delta t}{\Delta V} \quad (15)$$

ここで、 $\Delta Q_x, \Delta Q_y$ は x, y 方向の流量。 $\Delta V = \Delta x \cdot \Delta y \cdot h$ で単位メッシュの容積。 $P_3 = 1 - P_1 - P_2$ を単位メッシュに留まる確率とすると、 P_1, P_2, P_3 が確率表示できるためには、 $P_1 < 1, P_2 < 1, P_3 < 1$ なる条件をみたすよう $\Delta Q_x, \Delta Q_y, \Delta V, \Delta t$ をとることが必要である。以上をブロックへ拡張して考える。任意のブロックを l とし、隣接する 4 ブロックを図 2 に示したように $l_1 \sim l_4$ ブロックと呼ぶ。ブロック l よりブロック l_1 への到達確率は単位時間を Δt とすると、

$$P_A(l | l_1, \Delta t) = Q_1 \Delta t / V_l \quad (16)$$

ここで、 Q_1 : $l \sim l_1$ 間の流量 [$\text{m}^3 / \text{日}$]

V_l : ブロック l の容積 [m^3]

$P_A(l | l_1, \Delta t)$: ブロック $l \rightarrow l_1$ への到達確率

同様にブロック l より l_2 へ到達する確率、ブロック l 内に留まる確率は 17, 18 式で表される。

$$P_A(l | l_2, \Delta t) = Q_2 \Delta t / V_l \quad (17)$$

$$P_A(l | l, \Delta t) = 1 - Q_1 \Delta t / V_l - Q_2 \Delta t / V_l \quad (18)$$

水域をブロック分割した場合では到達確率をマトリクスで表現できる。ブロック l より l' の到達確率を $P_{l, l'}$ を要素とするマトリクス A を『到達確率マトリクス』と呼ぶ。マトリクス A は、大きさ n (n はブロック数) である。到達確率 $P_{l, l'}$ は、時間とともに湖流が変動する時は時間に依存して変動する確率マトリクスとなる。

(c) 増殖確率の定量法

藻類が増殖する過程を一次反応として平均的には次式で表される反応速度式に従う場合を取り上げる。

$$\frac{dM}{dt} = (\mu - k_d) \cdot M = \hat{\mu} \cdot M \quad (19)$$

ここで M は藻類個体数 [N/ml]、 μ は比増殖速度 [$1/\text{日}$]、 k_d は自己分解速度 [$1/\text{日}$] 及び $\hat{\mu}$ はみかけの増殖速度 [$1/\text{日}$] であり、正負いずれの値も取りえらとする。比増殖速度 μ 、自己分解速度 k_d の値自身が確率的に変動する場合の増殖確率は以下のように定式化できる。19 式を初期条件 $t=0$ で $M(t) = M(0)$ で積分すると、

$$M(t) = M(0) \cdot \exp \{ (\mu - k_d) t \} = M(0) \cdot \exp (\hat{\mu} t) \quad (20)$$

比増殖速度 μ 及び死滅速度 k_d の確率密度関数が既知ならば、 μ と k_d の合成関数によって $\hat{\mu}$ の確率分布が求められるから、以下では $\hat{\mu}$ の確率的変動を中心に検討する。 $\hat{\mu}$ が確率的に変動することから $M(t)$ も確率的に変動する。時間 $t = t_0$ と一定とした時、 $\hat{\mu}, M(t)$

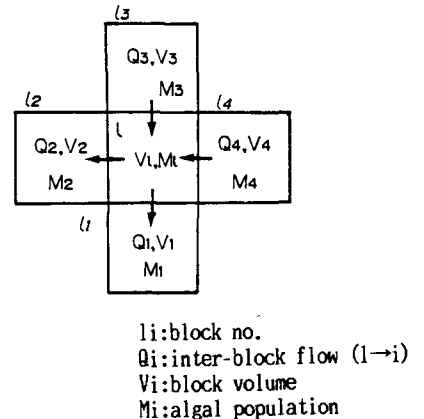


Fig.2 Illustration of the inter-block flow and block volume

の確率密度関数を $f_{\hat{\mu}}(\hat{\mu})$, $f_{M(t_0)}\{M(t_0)\}$ とおけば $f_{M(t_0)}\{M(t_0)\}$ は,

$$f_{M(t_0)}\{M(t_0)\} = \left| \frac{d\hat{\mu}}{dM(t_0)} \right| \cdot f_{\hat{\mu}}(\hat{\mu}) \quad (21)$$

の関係より $f_{\hat{\mu}}(\hat{\mu})$ より推定しうる。みかけの増殖速度 $\hat{\mu}$ が正規分布で近似できるとすると、 $M(t)$ は次式で表される対数正規分布することが導かれる。本モデルでは $\hat{\mu}$ の分布に正規分布を仮定した。

$$f_M(M|M_0, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_{\hat{\mu}} M \tau} \exp \left\{ -\frac{(\ln M - \ln \bar{M})^2}{2 \sigma_{\hat{\mu}}^2 \tau^2} \right\} \quad (22)$$

ここで $M(t_0)$ の確率密度関数は初期条件 $t = 0$ で $M = M_0$ であり、 $t = \tau$ の時の条件付き確率密度であるから $f_M(M|M_0, \tau)$ と記した。また $\bar{M} = M_0 \cdot \exp(\hat{\mu} \cdot t_0)$ であり、 $\bar{\mu}$ は $\hat{\mu}$ の期待値、 $\sigma_{\hat{\mu}}$ は $\hat{\mu}$ の標準偏差であることを示す。

藻類個体数 i から τ 時間後に個体数 j へ推移する増殖確率 $P_G(i|j, \tau)$ は,

$$P_G(i|j, \tau) = f_M(j|i, \tau) \cdot \Delta M \quad (23)$$

で表される。ここで ΔM はシミュレーション時の個体数の分割幅である。

個体数 i から j へ推移する増殖確率を q_{ij} とし、これを要素とする増殖確率マトリクスを $G(q_{ij})$ とする。

(d) マトリクス演算によるシミュレーション

時間 t にブロック ℓ で藻類量 i をとる状態確率を $S_{\ell,i}(t)$ とする。 $S_{\ell,i}(t)$ を要素とする状態マトリクスを $S(t)$ で表す。ここで ℓ は $1 \sim L$ (L : 最大ブロック数), i は $0 \sim I$ (I : 藻類状態の最大値) なる値をとる。また $\sum_{\ell} \sum_i S_{\ell,i}(t) = 1.0$ とする。 $t + \Delta t$ での状態 $S(t + \Delta t)$ は,

$$S(t + \Delta t) = G^T \cdot S(t) \cdot A \quad (24)$$

ここに T は転置を示す。

と表され、初期状態 $S(0)$ より任意時点 t の $S(t)$ が逐次計算しうる。

(e) 初期・境界条件の設定法

初期条件 $S(0)$ の設定については、ブロック ℓ の初期藻類量が既知で i_0 ならば、各ブロックで初期藻類量をとる確率 $S_{\ell,i}$ を等しくおく。すなわち、

$$S_{\ell,i} = 1 / L \quad (25)$$

しかし一般に初期条件として実測値を与えることは困難な場合が多いと考えられ、適当な方法で推定することが必要がある。京都市水道局では、琵琶湖南湖から取水し疏水により蹴上浄水場に導水しており、その水質及び藻類種と量については毎日モニタリングを行っている⁽⁶⁾。この毎日データを用い初期藻類分布を与える方法として、条件付き確率を用いた設定方法を示す。いま藻類量を連続的に測定している毎日モニタリング地点の $t = 0$ での藻類量を x_0 、他地点の藻類量を y_i とし、各々対数値を取った値 x_0' , y_i' が次式のように表されたとする。

$$y_i' = a_i \cdot x_0' + b_i \quad (26)$$

実測値より a_i , b_i の係数を求めておけば毎日モニタリング地点の藻類量 x_0 より地点 i の平均的な藻類量 y_i が得られ、その推定精度は地点毎に異なり相関係数で表される。地点毎の推定精度の差を考慮するため、 x_0' , y_i' が次式で示すように二次元正規分布に従うとする。

$$f(x_0', y_i') = \frac{1}{2\pi \sigma_{x_0}' \sigma_{y_i}' \sqrt{1 - \rho_i^2}} \exp \left[-\frac{1}{2(1 - \rho_i^2)} Q(x_0', y_i') \right] \quad (27)$$

$$Q(x_0', y_i') = \left[\left(\frac{x_0' - m_{x_0}'}{\sigma_{x_0}'} \right)^2 - 2\rho_i \left(\frac{x_0' - m_{x_0}'}{\sigma_{x_0}'} \right) \left(\frac{y_i' - m_{y_i}'}{\sigma_{y_i}'} \right) + \left(\frac{y_i' - m_{y_i}'}{\sigma_{y_i}'} \right)^2 \right] \quad (28)$$

ただし、 m_{x_0}' , σ_{x_0}' : x_0' の平均値, 標準偏差

m_{y_i}' , σ_{y_i}' : y_i' の平均値, 標準偏差

ρ_i : x_0' と y_i' の相関係数

実測値 x_0' を得た時の y_1' の条件付き確率密度関数は、平均値 $m_{y_1'} + \rho_1 \frac{\sigma_{y_1'}}{\sigma_{x_0'}} (x_0' - m_{x_0'})$ 、標準偏差 $\sigma_{y_1'} \sqrt{1 - \rho_1^2}$ の正規分布となる。この正規分布を適当に離散化し地点 i の初期条件とすることができる。標準偏差は推定値の変動を表し、地点 i の藻類量変動を示す σ_{y_1}' が大きいほど、また相関係数 ρ_1 が小さいほど推定値の予測誤差が増大することを示している。

境界条件としては、湖北端部からの流入及び南端部、疏水からの流出を考慮した。すなわち流入部（ブロック 2 に相当）については一定の確率分布或いは 27 式から推定される分布を設定する方法をとった。流出については、湖内から湖外への到達確率を設定することにより考慮した。

4. 遷移確率による藻類動態の予測

短期的・面的藻類動態を確率的に予測するマルコフモデルを琵琶湖南湖に適用した。まずモデルを適用する上で重要な到達確率、増殖確率について具体的な定量化例を示す。とくに増殖確率は、水域をブロック分割した場合で、ブロック間の流量収支及び藻類量が既知である時に、現地実測値より直接的に推定したみかけの増殖速度 $\hat{\mu}$ を用いた⁽⁹⁾適用例として昭和 58 年夏の *Anabaena* 異常増殖時の予測を取り上げた。

4.1 到達確率の定量化例

南湖を調査地点を代表とする水域（以下ブロックと呼ぶ）に分割する（図 3-1）。風の影響を考慮した湖流モデル⁽⁸⁾より推定した湖流分布より、各ブロック間の流量収支を算定する。昭和 58 年夏期の卓越風である北東風 1.6 m/s が定常的に吹いた場合の湖流分布（図 3-2）より求めたブロック間の流量収支を図 3-3 に示した。ブロック間の流量収支より求めた到達確率マトリクスを示したのが表 3 である。

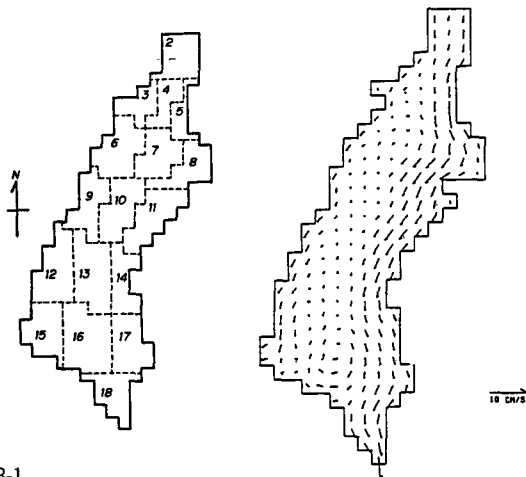


Fig.3-1 Division of the southern part of Lake Biwa into Blocks (number is block no.)

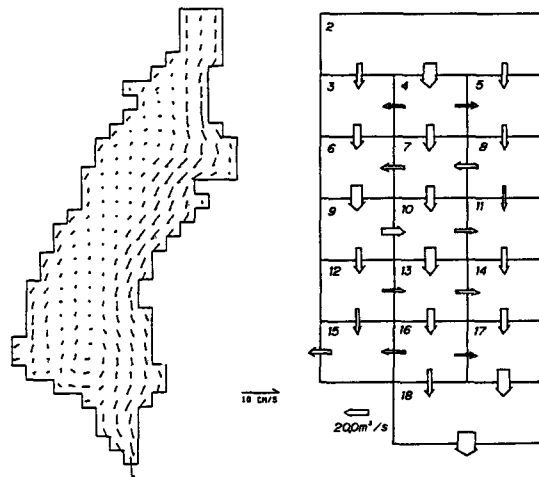


Fig.3-2 Calculated results of lake flow (Wind direction: NE, vel.: 1.6 m/s)

Fig.3-3 Inflow and outflow at each block

TABLE 3 Transport probability matrix (wind dir.: NE, vel.: 1.6 m/s)

BLK.	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	O.L.
2	0.67	0.04	0.13	0.16														
3		0.62	0.36															
4			0.50	0.12		0.38												
5				0.18			0.82											
6					0.95	0.05												
7					0.73			0.27										
8						0.02	0.61		0.37									
9					0.17			0.82		0.01								
10							0.18	0.73	0.05		0.04							
11									0.53			0.47						
12										0.80			0.20					
13											0.11	0.89						
14												0.18	0.09			0.73		
15														0.82	0.10			0.08
16												0.16			0.82		0.02	
17															0.10	0.57	0.33	
18																0.52	0.48	

O.L.: out of lake

表 3 の到達確率マトリクスは北東風 1.6 m/s が吹いた時に単位時間で近接したブロックへ到達する確率を示すから、この到達確率マトリクスより特定の 2 ブロック間の到達確率及び流下時間が得られる。任意の地点で初期 $t = 0$ での状態確率を 1.0（他ブロックでは 0）とし到達確率をかけることにより、各ブロックにおける状態確率の時間的変化が得られる。図 4 は各ブロック（図中の数字）における初期状態確率を 1.0 とした場合に、疏水取水口沖（ブロッ

ク15)で得られる状態確率の時間的変化,すなわち2ブロック間の到達確率を示している。ピークまでの時間は初期設定したブロックと疏水取水口ブロック間の平均的な到達時間であり,またピークの大きさ(確率)は,この地点に到達する確率の最大値(最大到達確率)を示している。この図4より疏水取水口ブロックと他ブロックの2地点間

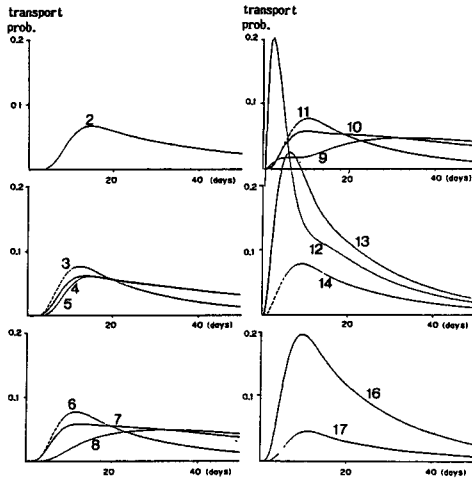


Fig.4 Simulated transport probability at the block no.15 when the initial probability is 1.0 at the specified block (number in figure shows block no.)

TABLE 4
Maximum transport probability and time between the block no.15 and the other block (wind dir: NE, vel.: 1.6m/s)

BLOCK	TIME (day)	MAXIMUM TRANSPORT PROBABILITY
2	15.0	0.067
3	15.5	0.061
4	14.0	0.061
5	12.0	0.076
6	33.0	0.048
7	13.0	0.057
8	12.0	0.076
9	34.0	0.048
10	10.0	0.059
11	10.5	0.078
12	2.0	0.425
13	6.0	0.253
14	9.0	0.079
15	--	--
16	9.5	0.196
17	10.5	0.045

到達確率を読み取り,整理したのが表4である。例えば北湖境界ブロックでは15日程度で流達するが,その到達確率は0.1以下となっている。

4.2 増殖確率の定量例

増殖確率は19式のように一次反応を仮定した場合では,みかけの増殖速度 $\hat{\mu}$ から増殖確率 $P_0(i|j, \tau)$ が一意的に決定され,みかけの増殖速度 $\hat{\mu}$ が正規分布する場合では,22式に示したように藻類分布は対数正規分布で表すことができる。みかけの増殖速度 $\hat{\mu}$ の推定方法としては,(1)藻類の増殖試験やAGP試験による室内実験による方法,(2)現地藻類実測値を活用する方法がある⁽⁷⁾。(2)の方法は湖をブロック分割し,ブロック間の流量収支が得られる場合は現地調査から得た藻類実測値よりみかけの増殖速度を推定することができる。具体的方法については既に報告してあるので,定量例を挙げるにとめる⁽⁹⁾。

昭和58年夏期の*Anabaena* sp. 異常増殖時の湖内分布パターンより*Anabaena*の $\hat{\mu}$ をブロック別に求め,その平均値を面的に示すと図5(a)のようになる。 $\hat{\mu}$ が正の値をとるブロックは定常状態を仮定した上で隣接ブロックからの流入藻類量と当該ブロックからの流出藻類量の差,すなわちブロック内の増殖量が正であることを示しており値が大きい程,増殖量が多いと考えられる。逆に負の $\hat{\mu}$ を持つブロックは増殖に比べて死滅及び沈降等により藻類量が減少することを示している。

4.3 条件付き確率による初期・境界条件の設定とシミュレーション

本モデルの適用にあたっては,初期条件と境界条件の設定の如何が結果に大きな影響を及ぼすと考えられる。ここで初期条件とは,シミュレーション開始時点の各ブロック毎の藻類存在確率であり,境界条件とは,琵琶湖南湖の場合では北湖からの流入藻類量の確率分布である。実測値或いは推定値から初期・境界条件を設定する方法はいくつかの組合せが考えられる。そこで,初期・境界条件の設定がシミュレーション結果にいかに影響するかをいくつかのケースを選んで検討を加えた。

① 初期条件の設定方法と予測結果の比較

マルコフモデルの初期条件として,各地点の藻類量を一定値,或いは分布の形で与えることが考えられる。次のような3通りの条件を設定して予測結果と実測値との対応を比較検討した。

- 一定値(各地点で同一値)
- 一定値(実測値)
- 確率分布(毎日モニタリング地点における実測値から推定した確率分布)

Anabaena sp. の異常増殖をみた昭和58年8月30日を初期状態として,4日後の*Anabaena*の面的分布

を予測した。予測期間中の風向・風速は北東の風 1.6 m/s で代表し、その状態での平均的湖流分布より求めた到達確率を用いた（表 3）。また、増殖確率はみかけの増殖速度 $\hat{\mu}$ により求められるが、現地 *Anabaena* 実測値より推定した各ブロック別の $\hat{\mu}$ の平均値及び標準偏差を用いた（図 5）。

初期条件として時間 $k = 0$ 、ブロック l における状態確率 $S(0)$ から 24 式により順次ブロック別の状態確率を求めることができる。状態確率は各時点、各地点の藻類個体数分布を与えるから、ブロック l での時刻 t の個体数の期待値 $\bar{M}(l, t)$ 、分散 $\sigma^2(l, t)$ は、次式より計算できる。

$$\bar{M}(l, t) = \frac{\sum_{j=1}^I \{S_{l,j}(t) \cdot j\}}{\sum_{j=1}^I S_{l,j}(t)} \quad (29)$$

$$\sigma^2(l, t) = \frac{\sum_{j=1}^I [S_{l,j}(t) \{j - \bar{M}(l, t)\}^2]}{\sum_{j=1}^I S_{l,j}(t)} \quad (30)$$

初期条件の差が、結果に如何に影響するかを期待値の面的なパターンとして示したのが図 6 である。図には併せて実測値のパターンを示した。さらに実測値との相関を示すと図 7 を得る。一見して各地点とも一律に一定値を初期条件として与えたのでは、有意な予測が不可能なことが読み取れる。②の実測値そのものを与える場合、③ 毎日モニタリング地点の実測値より推定した確率分布（27 式を用いた場合）を与える場合では、後者の確率分布を与えた場合の方が予測の精度は若干良く、前者では計算値に比べ調査実測値が全体に大きくなる傾向がみられる。

確率分布を初期値として与える時には、地点間の藻類量の相関の程度が、設定する分布の広がりに影響し、相関が良いと分布の広がり小さくなり、究極的には実測値に近づくと考えられ、推定分布の信頼度は高まることになる。相関の悪い場合では、分布の広がりが大きく、期待値より大きな値もある一定の確率をもって設定することになるため、相関の程度により予測結果は変化するが、一般的に言って、実測した分布より高めの値が得られると考えられる。

以上はモデルの予測結果から得られる期待値について実測値との比較を行ったものである。予測結果は確率分布として得られるので、超過確率、分散などの統計量も算定できる。最も相関の良いケース③について、4 日後の *Anabaena* の確率分布を累積分布の形で示すと図 8 のようになる。図より分布型は必ずしも正規分布（累積分布では S 字状）ではなく、0 で分布が切れ、裾部に尾をひく対数正規分布に近い形状を示すため、標準偏差のような統計量が、分布の広がりを十分代表していない。この場合、単に期待値±標準偏差で変動範囲を推定するよりも、*Anabaena* など異常増殖藻類を対象とする場合では、一定基準量を越える確率（超過確率）として予測結果を確率表示する方法が考えられる。例えば、図で 500 N/ml を基準とすれば、例示した各地点の超過確率は、0.09, 0.66, 0.76 となる。超過確率はその値が高い程、異常増殖の危険性は高くなることを示しており、例えば 60 % (0.60) を越えたら水源監視を強化し、臭気発生対策を検討するなど、臭気発生の確率予報などには実際的な表示方法と考えられる。

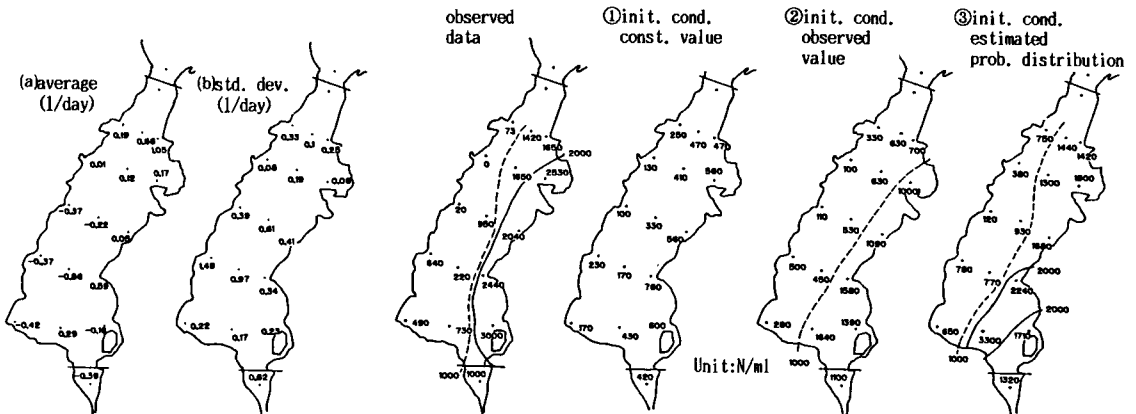


Fig.5 Distribution of $\hat{\mu}$ used in setting initial condition

Fig.6 Calculated results of Markov model under three different initial conditions (4 days after)

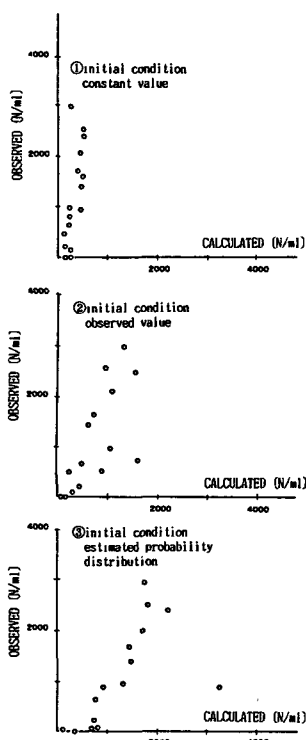


Fig.7 Relation between observed and calculated values under 3 different initial conditions

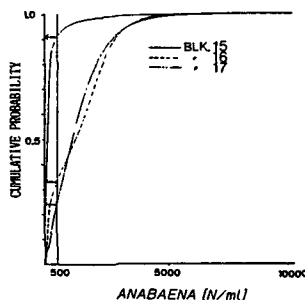


Fig.8 Cumulative representation of the calculated value

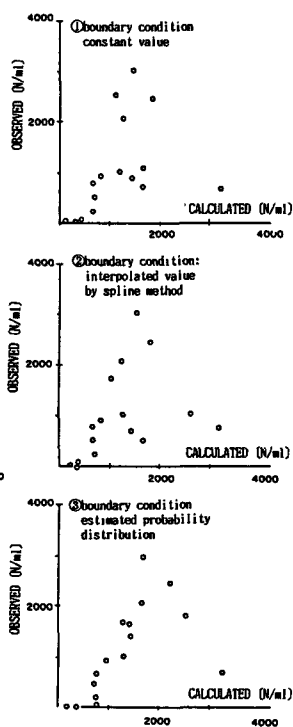


Fig.9 Relation between observed and calculated values under 3 different boundary conditions

② 境界条件の設定方法と予測結果の比較

以上の検討は、北湖端部（図3-1、ブロック2）における藻類流入量が変化しないという仮定のもとに行ったシミュレーション結果である。次に、境界条件の設定方法の差が如何に結果に影響するかを次の3ケースを設定して比較検討した。

- ① 北湖端からの流入藻類量は一定値（初期設定値）
- ② 北湖端からの流入藻類量は実測値（スプライン補間値）
- ③ 北湖端からの流入藻類量は基幹観測地点における藻類量より推定した確率分布

初期条件の例と同様な条件設定を行い、4日後の結果を比較する。ここで、①は境界条件として与えた値を継続して利用する方法、②は実測値よりスプライン補間した値を実測値とみなして、境界条件とする方法、③は毎日藻類量に関する情報が得られる毎日モニタリング地点より、22式により推定した確率分布を境界条件として設定し、時間的に変化させる方法である。

図9が予測結果より期待値を算定し、実測値との相関をとったものである。いずれのケースについても特に際立った差異は見られない。*Anabaena* sp. は現地調査結果より、北湖からの流入はそれ程多くなく、*Anabaena* に関するかぎり、南湖湖内での発生が多いと推定される。この点を考慮すると *Anabaena* sp. の確率予測では北湖からの流入藻類量の影響は、4日後の予測程度ではその結果に余り影響を及ぼさず、むしろ *Anabaena* の発生条件、換言すれば、先述した *Anabaena* の初期条件を十分正確に推定する方が、予測の精度を上げるには有効であろうと考えられる。

5. おわりに

藻類の短期的、面的な挙動を予測するための遷移確率による藻類動態モデルを提示した。本モデルは湖内における藻類の増殖と移動を遷移確率としてとらえ、それを到達確率、増殖確率に分離し表現することにより簡単化を行った上で、琵琶湖南湖への適用を試みた。水域を水理特性がほぼ等質な水域に分割でき、藻類

の増殖過程もみかけの増殖速度 $\hat{\mu}$ で総括的に表せる場合に適用しうる簡便なモデルであるが、モデルに関して得られた知見を列挙すれば、

- ① 本モデルは、いくつかの仮定を置いたうえで定式化しており、特に定常性が仮定できるような気象、水象条件の場合、即ち藻類の異常増殖が生じるような状況では予測ができることが明らかになった。一方気象、水象条件が大きく変動するような状況では、到達確率自身が変動することから、十分な精度での予測は困難であり、到達確率に非定常的な要素を組み入れる必要がある。
- ② 異常増殖の発生予測に主眼をおいたが、モデルの適用上初期条件の設定が重要であることが明らかになった。浄水場の取水地点など連続的に水質値や藻類を計測している毎日モニタリング地点がある時には、これらの観測値より湖内の各地点における臭気原因となる藻類の量を推定でき、初期分布の設定ができる。観測値が得られない場合が一般に多いが、このような場合には別報（文献10）で示した出現係数による *Anabaena* 出現確率の予測モデルが活用しうる。すなわち、比較的計測の容易な水質・水象・気象の観測値より、出現係数を算定し予測式に代入することにより、*Anabaena* の出現確率を推定することができる。
- ③ 予測の結果、藻類の存在確率分布が得られる。確率分布よりある一定数以上の確率を発生確率と呼ぶことにすれば、この確率値の大小によって水源監視や浄水処理の強化を図るなど対策を講じる上での重要な情報が得られる。

到達確率、増殖確率の設定方法や初期条件、境界条件の設定方法については一例を示したにすぎず、今後さらに適用事例を積み重ねながら、モデルの改善をはかる予定である。

最後に、本研究は湖沼の富栄養化現象の解明を目的とした一連の研究の一環として実施したものであり、調査・解析には京都大学水道工学研究室の諸氏並びに京都市水道局に多大のご協力とご支援を頂いた。ここに記して感謝の意を表します。

参考文献

- 1) 住友恒・原沢英夫・河村正純・川村佳則(1984) 栄養塩濃度と藻類増殖に関する現地調査結果, 水道協会誌, 55, 3, 11-18.
- 2) Pielue, E. C. 著, 南雲仁一監訳(1974) 数理生態学, 産業図書.
- 3) 西田俊夫(1973) 応用確率論, 培風館.
- 4) Loucks, D. P. and W. R. Lynn (1966) Probabilistic models for predicting stream quality, Water Resour. Research, 2, 593-605.
- 5) 原沢英夫・住友恒(1984) マルコフモデルによる藻類動態の予測, 土木学会第39回年次学術講演会論文概要集, 755-756.
- 6) 京都市水道局(1983) 水質試験年報.
- 7) 吉田陽一(1976) 微生物の生態3 増殖をめぐる — 自然水域における植物プランクトンの増殖率 — 測定法を中心として —, 学会出版センター, 41-55.
- 8) 岩佐義朗・井上和也・足立敏之(1978) 琵琶湖南湖の湖流と拡散に関する数値シミュレーション, 京都大学防災研究所年報第21号B-1, 293-305, 1978.
- 9) 原沢英夫・住友恒・河村正純(1984) 藻類の動態解析における藻類増殖の取扱いについて, 土木学会衛生工学研究論文集, 20, 63-69.
- 10) 原沢英夫・住友恒・富田宗明(1986) 水象・気象条件と臭気発生の相関分析と予測, 水道協会誌, 55, 1, 18-28.