

(10) 開領域移流分散問題への無限要素法の適用 APPLICATION OF THE METHOD OF INFINITE ELEMENTS TO CONVECTION-DISPERSION PROBLEMS IN INFINITE DOMAINS

米 田 稔*, 井 上 頼 輝*
Minoru YONEDA*, Yoriteru INOUE*

ABSTRACT; It was shown that a enormous error could appear when convection-dispersion problems in infinite domains were solved by Galerkin finite element method assuming an infinite domain by a finite one. Infinite elements suggested by Bettess which easily satisfy boundary conditions at infinity were applied to some convection-dispersion problems and their applicability was examined. Following conclusions were obtained on the problems about a continuous point source in an infinite domain. The best attenuation length contained in a weighting function for infinite elements was found to be proportional to $\sqrt{D_x D_y}/v$, where D_x and D_y were dispersion coefficients for x and y direction respectively and v, the flow rate. Infinite elements were efficiently applicable to the steady and unsteady problems under the uniform flow fields and the steady problem under the nonuniform flow field.

KEYWORDS; convection-dispersion problem, infinite domain, numerical simulation, infinite elements

1. 序 論

環境における汚染物質の移動を予測するため、移流分散方程式を解くことが必要となることが多い。移流分散方程式の解法としては解析的な手法もあるが、複雑な計算条件を扱うためには、差分法、モンテカルロ法、有限要素法などの数値解法に頼らざるを得ない。このうち有限要素法は境界条件の取り扱いの簡単さ、空間的離散化の自由さなどの利点から、最近多く用いられるようになった。

移流分散方程式を解いて濃度分布を求めようとするとき、境界が実際に濃度分布を求めたい領域から、はるか遠方に離れて存在する場合は、境界が無限遠に存在するとみなして、開領域問題として定式化することが妥当となる場合も多いと考えられる。従来、有限要素法を用いてこのような開領域問題を解く場合、実際に濃度分布を求めたい領域よりも大きめに解析領域をとって、開領域を有限領域で近似し、仮想境界にDirichlet条件あるいはNeumann条件を与えることが多かった。しかし、この方法では必要以上に解析領域をとるため、計算容量、計算時間の増大を招き、また開領域を有限領域で近似することによる誤差も心配となる。このため本研究では開領域を有限領域で近似して解くことによる誤差の一例を示すとともに、有限要素法を用いて開領域問題を解くとき、比較的簡単に無限遠での境界条件を考慮できる手法として、Bettessらによって導入された無限要素法^{1),2),3)}をとり上げ、その指数減衰型無限要素に修正を加えて移流分散方程式の開領域問題に適用し、指数減衰項に含まれる減衰長の値が解の精度に及ぼす影響と、最適な減衰長と各種パラメータとの関係を調べ、無限要素の開領域問題に対する有効性と、不均一場への適用可能性について考察した。

2. 基礎方程式と境界条件

次の2次元移流分散開領域問題を考える。

$$\text{基礎式: } \frac{\partial C}{\partial t} - D_x \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - D_y \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + v \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{1}{\theta} \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \quad \dots\dots\dots (1)$$

*京都大学 Univ. of Kyoto

$$\text{初期条件: } C = 0 \quad \text{at everywhere} \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$\text{境界条件: } C = 0 \quad \text{at } |x|, |y| = \text{infinity} \quad \dots\dots\dots (3)$$

ここに C は物質の溶液中濃度, D_x, D_y はそれぞれ x, y 方向の分散係数, v は x 方向の流速, θ は間隙率, $\delta(x)$ は Dirac の delta 関数であり, 点 (x_0, y_0) に単位時間当たり単位量の連続点汚染源を仮定している。

3. 無限要素

有限要素法では解析領域を多数の有限な大きさの要素に分割するが, 無限要素はその要素の一边を無限遠に置いたものであり, 有限要素法の自然な拡張と言える³⁾ Fig. 1 に本研究でとり上げた 4 節点 2 次元無限要素を示す。Fig. 1 で局所座標 $\xi - \eta$ 系とは, 全体座標 $x - y$ 系におけるそれぞれの要素内に原点をとり, それぞれの要素領域内での積分を簡単に行えるように新たに定める座標系である。全体座標 $x - y$ 系から局所座標 $\xi - \eta$ 系への変数変換は次式に従って行われる。

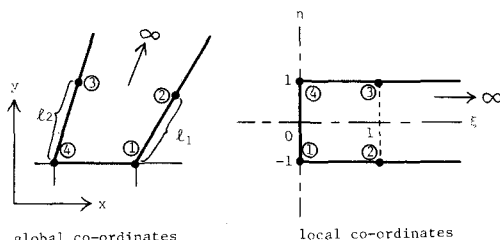


Fig. 1 4-node two-dimensional infinite element.

$$x = \sum_{i=1}^4 x_i M_i, \quad y = \sum_{i=1}^4 y_i M_i \quad \dots\dots\dots (4)$$

ここで M_i は局所座標 $\xi - \eta$ 系において, ξ 方向の 1 次の Lagrange 多項式と η 方向の 1 次の Lagrange 多項式の積であり, 次式で表わされる。

$$\left. \begin{aligned} M_1(\xi, \eta) &= \frac{1}{2} (1-\xi)(1-\eta) \\ M_2(\xi, \eta) &= \frac{1}{2} \xi(1-\eta) \\ M_3(\xi, \eta) &= \frac{1}{2} \xi(1+\eta) \\ M_4(\xi, \eta) &= \frac{1}{2} (1-\xi)(1+\eta) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (5)$$

M_i は第 i 節点でのみ 1 となり, 他の節点では 0 となる。また, x_i, y_i はそれぞれ x, y の第 i 節点での値である。この場合, Fig. 1 に示すように, 全体座標系におけるそれぞれの要素の節点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4)$ は, 局所座標系における節点 $(0, -1), (1, -1), (1, 1), (0, 1)$ にそれぞれ対応する。無限要素での内挿関数としては, 無限遠で 0 になり, かつ無限要素領域での積分が有限である必要があり, このような条件を満たす内挿関数として様々なものが提唱されている。^{2), 4), 5)}

本研究では次式のような内挿関数を用いた。

$$N_i(\xi, \eta) = M_i \cdot f_i \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad \dots\dots\dots (6)$$

ここで f_i は節点 i で 1 となり, 無限遠で 0 となる指数減衰項である。このとき無限要素内の濃度 C は次式で近似される。

$$C = \sum_{i=1}^4 C_i N_i \quad \dots\dots\dots (7)$$

ここで C_i は第 i 節点での C の値である。

指数減衰項 f_i ($i = 1, 2, 3, 4$) として Bettles は次式のようなものを提唱している。²⁾

$$f_i(\xi) = \exp [(\xi_i - \xi)/L] \quad \dots\dots\dots (8)$$

あるいは,

$$f_i(x, y) = \exp [(r_i - r)/L] \quad \dots\dots\dots (9)$$

ここで ξ は局所座標系において無限遠方向に延びる座標, つまり ξ 座標の値であり, r は全体座標 $x - y$ 系における, ある原点(例えば汚染源の位置)から点 (x, y) までの距離である。また ξ_i, r_i はそれぞれ第 i 節点における ξ, r の値, L は減衰長と呼ばれる定数である。(8)式は局所座標系において減衰長 L を定義したものであり, (9)式は全体座標系で L を定

義している。(8)式のように局所座標系で L を定義した場合、 L の値が同じ、したがって局所座標系では内挿関数の減衰傾向が同じでも、全体座標系に変換すると、無限遠方向の全体座標系での節点間距離が短い無限要素の内挿関数は、節点間距離が長い無限要素の内挿関数に比べて、急激な減衰傾向を表わすことになる。このように全体座標系における減衰傾向は、全体座標系における各要素の節点の配置に大きく影響され、各要素で内挿関数の減衰傾向が大きく異なることもある。よって全体座標系での減衰傾向、したがって L の値と、計算誤差との関係をより適確に把握するには、全体座標系における減衰傾向が各要素でほぼ等しくなる(9)式の方が望ましいと考えられる。しかし(9)式は x と y の関数であるため、局所座標系に変換しても一般に ξ と η の関数となり、プログラミングが複雑になる欠点がある。そのため本研究では、プログラミングが簡単で、かつ全体座標系における減衰傾向が各要素でほぼ等しくなる減衰関数として、次式を用いた。

$$f_i = \exp \left[\left(\frac{\partial \ell}{\partial \xi} \right)_i \cdot (\xi_i - \xi) / L \right] \quad \dots\dots\dots (10)$$

ここで ℓ は、Fig.1において、 f_1, f_2 については全体座標系において節点①、②を結ぶ直線上にとった節点①からの距離、 f_3, f_4 については全体座標系において節点③、④を結ぶ直線上にとった節点④からの距離である。また $(\partial \ell / \partial \xi)_i$ は、 $\partial \ell / \partial \xi$ の節点 i における値である。Fig.1のような無限要素の場合、全体座標系における節点①、②間の距離を ℓ_1 、節点④、③間の距離を ℓ_2 とすると、

$$\left(\frac{\partial \ell}{\partial \xi} \right)_1 = \left(\frac{\partial \ell}{\partial \xi} \right)_2 = \frac{\ell_1}{\xi_2}, \quad \left(\frac{\partial \ell}{\partial \xi} \right)_3 = \left(\frac{\partial \ell}{\partial \xi} \right)_4 = \frac{\ell_2}{\xi_3} \quad \dots\dots\dots (11)$$

の関係がある。ただし、 ξ_2, ξ_3 はそれぞれ局所座標系における節点②と③の ξ 座標の値で、それぞれ局所座標系における節点①、②間の距離と節点④、③間の距離を表わす。また今の場合、 $\xi_2 = \xi_3 = 1$ である。

(10)式は、局所座標系における無限遠方向の距離と $(\partial \ell / \partial \xi)_i$ との積によって、全体座標系における無限遠方向の距離を近似しようとしたものであり、(4)式のように変数変換する場合、節点①、②を結ぶ直線上、および節点④、③を結ぶ直線上においては、 $\xi \cdot (\partial \ell / \partial \xi)_i$ は ℓ に等しくなる。減衰関数として(10)式を用いる場合は、(9)式を用いる場合に比べてプログラミングが簡単であり、また(10)式のような減衰関数を用いても、全体座標系での減衰傾向は各要素でほぼ等しくなると考えられる。

4. 解析領域と計算条件および計算方法

解析領域をFig.2に示す。

今、Fig.2の太線内の濃度分布を求めるため、Fig.3に示すように領域を4節点四角形要素に分割し、太線の外部にも有限要素の層を何層か設定する(この層の数を K とする)。太線の外部の要素について、無限遠方向に延びる全ての要素境界線はFig.2の境界 Γ_4 上に焦点を持つ。Fig.3に示すように Γ_4 上の x 座標をとると、Fig.3の外部要素境界の焦点の x 座標 $x_f = 0$ である。

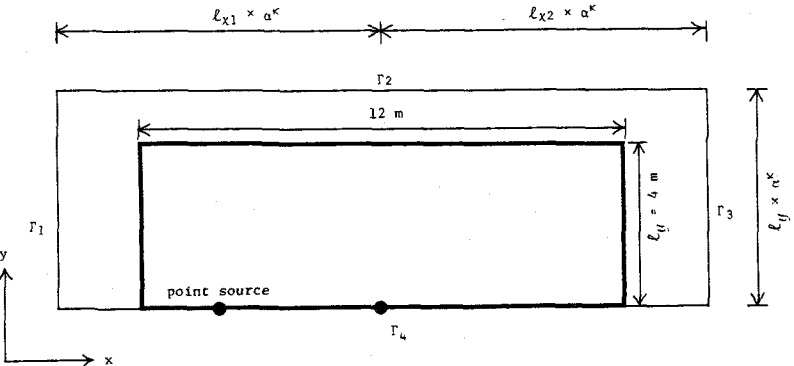


Fig. 2 Domain analyzed. (Example of the case of $X_f=0$ and $X_0=-4$, in this case $\ell_{x1}=\ell_{x2}=6\text{ m.}$)

次に(1)式をGalerkin法で定式化して、次の4種類の境界条件で解く。

- 境界条件1 : $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$ 上で $\partial C / \partial n = 0$ (n は法線ベクトル)
- 境界条件2 : $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ 上で $C = 0$, Γ_4 上で $\partial C / \partial n = 0$
- 境界条件3 : Γ_1 上で $C = 0$, $\Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$ 上で $\partial C / \partial n = 0$
- 境界条件4 : Γ_4 上で $\partial C / \partial n = 0$, $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ には無限要素を接続

ただし $K=m$ の場合、境界条件1,2,3では m 層の外部有限要素層を設定し、境界条件4では $m-1$ 層の外部有限要素層を設定し、その外部に無限要素を接続する。このとき境界条件1~4は全て同じ節点数となる。

なお本研究では、(1)式中のパラメータ v, D_x, D_y, θ 、そしてFig.3に示すように外部有限要素層の厚さを決めるパラメータ α 、外部有限要素層の数 K 、外部要素境界の Γ_4 上の焦点の位置の x 座標 x_f 、 Γ_4 上の点汚染源の位置の x 座標 x_0

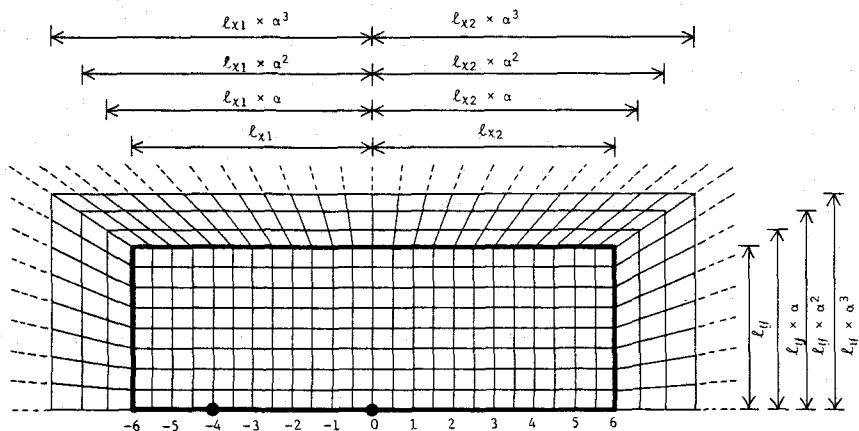


Fig. 3 Division of the domain analyzed into finite and infinite elements.
(Example of the case of $X_f=0$, $X_0=-4$, $K=3$ and $\alpha=1.1$. The elements of the most outside are infinite elements under Boundary Condition 4.)

として特にことわらない限り以下の値を用いる。

$$v = 1 \text{ (m/day)}, \quad D_x = D_y = 1 \text{ (m}^2\text{/day)}$$

$$\theta = 0.3, \quad \alpha = 1.1, \quad K = 1$$

$$x_f = 0 \text{ (m)}, \quad x_0 = -4 \text{ (m)}$$

また、要素マトリックスを構成する際に用いる数値積分として、有限区間の積分には分点数3のLegendre-Gauss 積分公式、半無限区間の積分には分点数3のLaguerre-Gauss 積分公式を用いた。

5. 解の精度の評価基準

(2),(3)の条件下での(1)式の解析解 C_A は次式で与えられる。

$$C_A = \frac{1}{4\pi\sqrt{D_x D_y} \cdot \theta} \exp\left[-\frac{v(x-x_0)}{2D_x}\right] \cdot \int_0^{\frac{v^2}{4D_x}t} \frac{1}{\tau} \cdot \exp\left[-\tau - \frac{v^2}{16D_x} \left\{ \frac{(x-x_0)^2}{D_x} + \frac{(y-y_0)^2}{D_y} \right\} \frac{1}{\tau}\right] d\tau \quad (12)$$

有限要素法で得た数値解を C_N として、平均誤差AEを次式で定義する。

$$AE = \frac{100}{n-1} \sum_{i=1}^n |C_{Ai} - C_{Ni}| / C_{Ai} \quad (\%) \quad (13)$$

ここに、総和はFig.3の太線内および太線上に存在する全節点(節点数 n)についてとるものとし、添字 i は第 i 節点での値を示す。ただし汚染源の存在する第 n_0 節点については、解析解を計算できないため和をとらない。AEが小さいほど数値解 C_N の精度が良いと考える。なお(12)式の積分計算には、高橋・森の二重指数関数型積分公式⁶⁾を用いた。

6. 解析結果

6.1 定常解析

(A) 減衰長の理論的最適値

Bettess²⁾は一点荷重弾性変位問題における減衰長の理論的最適値を、解析解の減衰傾向と無限要素に用いる内挿関数の減衰傾向を比較することにより求めて良好な結果を得ている。本研究では(1),(2),(3)式の下での解析解が簡単な形で表われないので、1次元と3次元での開領域移流分散問題の定常解析解の減衰傾向と、内挿関数の減衰傾向を比較することにより、最適な減衰長の推定を行った。

(1) 1次元の場合

$$\text{基礎式: } \frac{\partial C}{\partial t} - D_x \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + v \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{1}{\theta} \delta(x) \quad (14)$$

$$\text{初期条件: } C = 0 \quad \text{at everywhere} \quad \dots\dots\dots (15)$$

$$\text{境界条件: } C = 0 \quad \text{at } |x| = \text{infinity} \quad \dots\dots\dots (16)$$

上の基礎式、および初期・境界条件下での定常解は次式で表わされる。

$$C(x) = \frac{1}{v\theta} \cdot \exp \left[-\frac{v}{2D}(x-|x|) \right] \quad \dots\dots\dots (17)$$

点汚染源の下流側では $C(x) = 1/v\theta = \text{一定}$ となるため、点汚染源の上流側への $C(x)$ の減衰傾向と内挿関数の減衰傾向を比較する。

本研究で用いた指数減衰型の内挿関数を用いたとき、 $C(x)$ の近似式 $\bar{C}(x)$ は点汚染源の上流側については一般に次式で表わされる。

$$\bar{C}(x) = (ax+b) \cdot \exp [x/L] \quad (x < 0) \quad \dots\dots\dots (18)$$

ここに、 a, b はある定数である。 $\bar{C}(x)$ と $C(x)$ がある2点、 x_1, x_2 で等しくなるように減衰長 L を決めるとすると、

$\bar{C}(x_1) = C(x_1)$, $\bar{C}(x_2) = C(x_2)$ より次式が導かれる。

$$\frac{1}{L} = \frac{v}{D} + \frac{\ln(ax_2+b) - \ln(ax_1+b)}{x_2 - x_1} \quad \dots\dots\dots (19)$$

今、 $x_2 \rightarrow x_1$ の極限操作を行うと、

$$\frac{1}{L} = \frac{v}{D} + \frac{1}{x_1 + b/a} \quad \dots\dots\dots (20)$$

となる。よって右辺第1項に比べ、右辺第2項が無視できる場合（点汚染源から十分離れたところでは常に無視できる。）

$$L \simeq \frac{D}{v} \quad \dots\dots\dots (21)$$

の関係が成り立つ。

(2) 3次元の場合

$$\text{基礎式: } \frac{\partial C}{\partial t} - D_x \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - D_y \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} - D_z \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} + v \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{1}{\theta} \delta(x-x_0) \delta(y-y_0) \delta(z) \quad \dots\dots\dots (22)$$

$$\text{初期条件: } C = 0 \quad \text{at everywhere} \quad \dots\dots\dots (23)$$

$$\text{境界条件: } C = 0 \quad \text{at } |x|, |y|, |z| = \text{infinity} \quad \dots\dots\dots (24)$$

上の基礎式および初期・境界条件下での定常解は次式で表わされる。

$$C(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\theta\sqrt{D_x D_y D_z} \cdot \sqrt{\frac{(x-x_0)^2}{D_x} + \frac{(y-y_0)^2}{D_y} + \frac{z^2}{D_z}}} \cdot \exp \left[\frac{v(x-x_0)}{2D_x} - \frac{v}{2\sqrt{D_x}} \sqrt{\frac{(x-x_0)^2}{D_x} + \frac{(y-y_0)^2}{D_y} + \frac{z^2}{D_z}} \right] \quad \dots\dots\dots (25)$$

今、 $z = 0$, $D_x = D_y = D_z = D$ とおくと、

$$C(x, y, 0) = \frac{1}{4\pi\theta DR} \cdot \exp \left[\frac{v(x-x_0)}{2D} - \frac{v}{2D} R \right] \quad \dots\dots\dots (26)$$

ただし、 $R = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$ である。

本研究で用いた指数減衰型の内挿関数を用いたとき、 $C(x, y, 0)$ の近似式 $\bar{C}(x, y, 0)$ の一般形は(18)式のように簡単な形では表わせないが、近似的に次式で表わすことができると考えられる。

$$\bar{C}(x, y, 0) = (aS+b) \cdot \exp [-S/L] \quad \dots\dots\dots (27)$$

ただし、 $S = \sqrt{x^2 + y^2}$ で、無限遠に延びる無限要素の各辺の焦点の位置（4章の $(x_f, 0)$ に相当する。）を原点とする。また a, b はある定数である。 $\bar{C}(x, y, 0)$ と $C(x, y, 0)$ が無限遠に延びる無限要素のある辺上の2点 $(x_1, y_1, 0)$, $(x_2, y_2, 0)$ で等しくなるように減衰長 L を決めるとすると、次式が導かれる。

$$\frac{1}{L} = \frac{v}{2D} \cdot \frac{R_2 - R_1}{S_2 - S_1} - \frac{v}{2D} \cdot \frac{x_2 - x_1}{S_2 - S_1} + \frac{\ln R_2 - \ln R_1}{S_2 - S_1} + \frac{\ln(aS_2 + b) - \ln(aS_1 + b)}{S_2 - S_1} \quad \dots\dots\dots (28)$$

ここに R_1, R_2, S_1, S_2 はそれぞれ点 $(x_1, y_1, 0)$, $(x_2, y_2, 0)$ における R と S の値である。今、座標の原点と点汚染源の位置が R_1, R_2, S_1, S_2 に比べてあまり離れていないとき、 $R_2 - R_1 \approx S_2 - S_1$, $\ln R_2 - \ln R_1 \approx \ln S_2 - \ln S_1$ と近似できるから、 $S_2 \rightarrow S_1$ の極限操作を行うと、

$$\frac{1}{L} \approx \frac{v}{2D} (1 - \cos \theta) + \frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_1 + b/a} \quad \dots\dots\dots (29)$$

となる。ここで角 θ は、2点 $(x_1, y_1, 0)$, $(x_2, y_2, 0)$ の存在する無限要素の辺と x 軸のなす角である。上式では $1/L$ は角 θ に依存するが、 $1/L$ の領域全体での平均値を求めると、 $\cos \theta$ の平均値は 0 となるから (29) 式の右辺第 2 項、第 3 項が $v/2D$ に比べて小さいとき、平均的に

$$L \approx \frac{2D}{v} \quad \dots\dots\dots (30)$$

の関係が成り立つと考えられる。

以上の 1 次元と 3 次元での解析結果より、2 次元の場合にも

$$L \propto \frac{D}{v} \quad \dots\dots\dots (31)$$

の関係が成り立つことが予想できる。しかし、(21) 式や (30) 式の導出過程より明かなように、点汚染源の位置や D, v の値によっては (31) 式の関係が成り立たない可能性も考えられる。

(B) 計算結果

(1) 式において $\partial C / \partial t = 0$ とおき、定常解析を行った。

境界条件 4 について、無限要素の減衰長 L と平均誤差 AE の関係を外部有限要素層の数 $K = 1, 2, 3, 4$ について Fig. 4 に示す。最適な L 値を選択することが重要であることがわかる。 AE が最小となるときの L の値を最適減衰長 L_{best} と呼ぶことにすると、 $K = 1, 2, 3, 4$ について $L_{best} = 1.2$ (m) で一定であった。 K が大きくなるほど L の広い範囲にわたって AE は小さくなった。

Fig. 5 に境界条件 2, 3, 4 での AE と K の関係を示す。境界条件 4 の L の値としては、Fig. 4 より求めた $L_{best} = 1.2$ (m) を用いた。境界条件 2, 3 では $K = 5$ にしても、 AE の値は境界条件 4 の $K = 1$ での値より大きい。境界条件 2, 3 のように無限領域を有限領域で近似した場合、大きな誤差を生じる場合のあることが、また L_{best} が求められたとき、無限要素が有効であることがわかる。

最適減衰長 L_{best} が、全体座標系における無限要素の節点の配置にどのように影響されるかを調べるため、外部有限要素層の厚さを決めるパラメータ α と、外部要素境界の Γ_4 上の焦点の位置の x 座標 x_f を変えて、 L_{best} との関係調べた。例として、Fig. 6 に $x_f = -4$ (m) のときの解析領域と無限要素の節点配置を示す。Table 1 に α と L_{best} の関係、Table 2 に x_f と L_{best} の関係を、 $L = L_{best}$ としたときの AE の値とともに示す。 α が大きくなると L_{best} が小さくなる傾向があるが、Fig. 4 の L と AE の関係から判断してこれは大きな変化ではない。また $L = L_{best}$ のときの AE の値には $\alpha = 1.5$ 以下では大きな差はなかった。 x_f にとっても L_{best} の変化も大きくはなかったが、 $L = L_{best}$ のときの AE の値は、 x_f が原点 (領域の中央) に近い方が小さくなっ

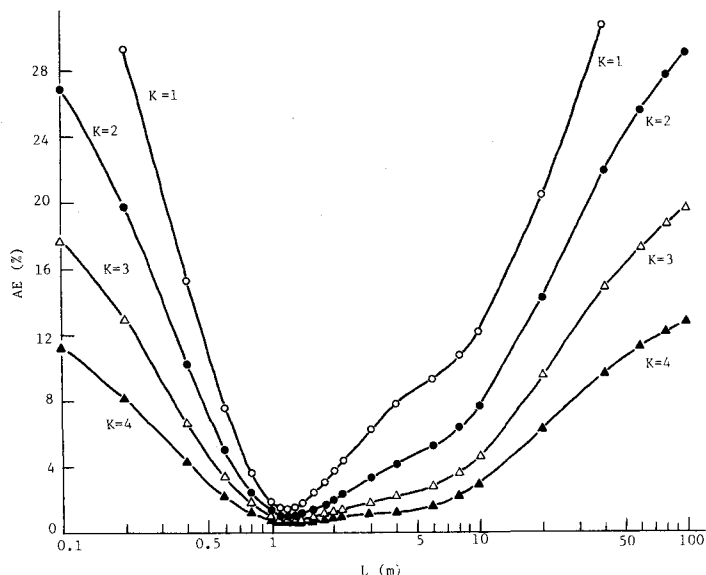


Fig. 4 Relation between L and AE . (Steady condition.)

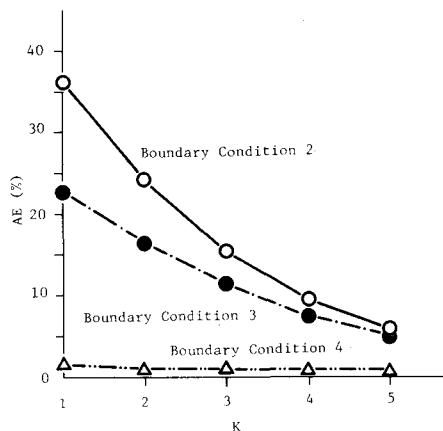


Fig. 5 Relation between K and AE . (Steady condition.)

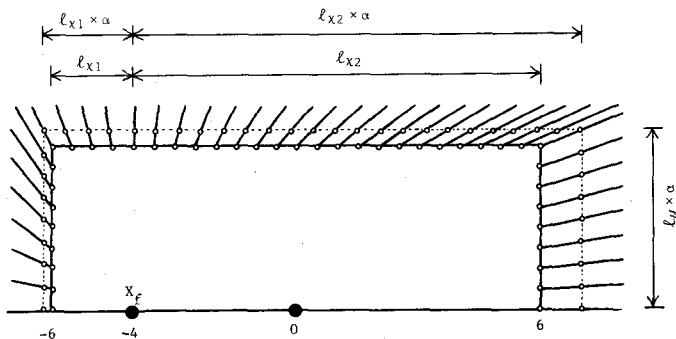


Fig. 6 Division of the outside region into infinite elements in the case of $X_f = -4$.
(Example of the case of $K=1$ and $\alpha=1.1$, in this case $l_{x1}=2$ m, $l_{x2}=10$ m and $l_y=4$ m.)

Table 2 Relation between X_f and L_{best} , with AE at $L=L_{best}$.

X_f	L_{best} (m)	AE (%)
4	1.4	2.6
2	1.3	1.5
0	1.2	1.5
-2	1.2	2.4
-4	1.3	4.7

Table 3 Relation between X_0 and L_{best} , with AE at $L=L_{best}$.

X_f	L_{best} (m)	AE (%)
-5	1.1	2.3
-4	1.2	1.5
-3	1.2	1.7
-2	1.2	2.2
-1	1.2	2.9
0	1.2	3.7

Table 1 Relation between α and L_{best} , with AE at $L=L_{best}$.

α	L_{best} (m)	AE (%)
1.01	1.2	1.8
1.05	1.2	1.7
1.08	1.2	1.6
1.1	1.2	1.5
1.2	1.2	1.3
1.3	1.1	1.3
1.4	1.0	1.5
1.5	0.9	1.7
2	0.9	3.9

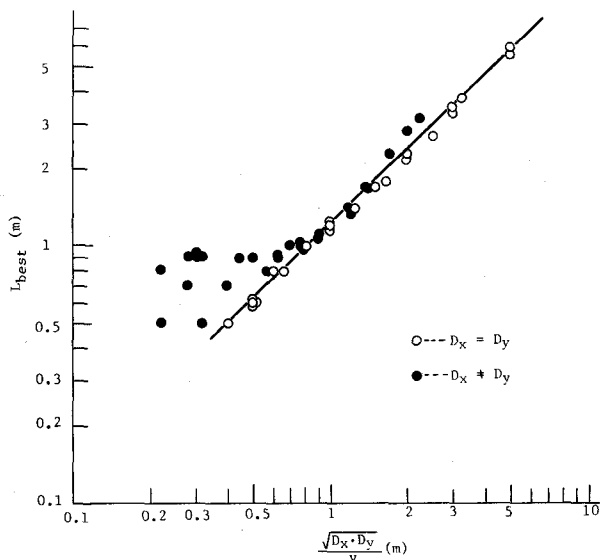


Fig. 7 Relation between $\sqrt{D_x D_y} / v$ and L_{best} .

た。無限要素の節点の配置はAEには少し影響するが、 L_{best} にはあまり影響しないことがわかる。

汚染源の位置が L_{best} に影響するかどうかを調べるため、 Γ_4 上の汚染源の位置の x 座標 x_0 を変えて L_{best} との関係を調べた。Table 3に結果を示す。 x_0 とAEの関係については、 x_0 が変わると解析領域内の濃度分布も変化するため、AEを単純に比較することはできない。本例に示す限りでは、点汚染源の位置は L_{best} にほとんど影響しなかった。

(1)式中のパラメータが L_{best} に与える影響を調べるため、 v , D_x , D_y の値を様々に変えて L_{best} を求めた。Table 4に本研究で調べた v , D_x , D_y の値の組と、そのときの L_{best} を示す。Table 4のデータについて、 $\sqrt{D_x \cdot D_y} / v$ と L_{best} の関係をプロットすると、Fig. 7のようになる。Fig. 7で白丸○で示すのは $D_x = D_y$ の場合、黒丸●で示すのは $D_x \neq D_y$ の場合である。また、 $\sqrt{D_x \cdot D_y} / v$ が小さくなると解は振動を始めるが、Fig. 7には解が振動しない範囲で、できるだけ小さな $\sqrt{D_x \cdot D_y} / v$ の値までプロットしている。Fig. 7より次式の関係があることがわかる。

$$L_{best} \approx 1.2 \cdot \frac{\sqrt{D_x \cdot D_y}}{v} \quad \dots\dots\dots (32)$$

ただし、 $D_x \approx D_y$ の場合で、 $\sqrt{D_x \cdot D_y}/v$ が小さいときだけは、(32)式の関係からはずれる傾向が見られた。

以上のことより本研究で調べた条件下では、 L_{best} は K の値や汚染源の位置などにあまり影響されず(31)式の関係がほぼ成立することが確かめられた。

6.2 非定常解析

(1)式の時間微分項 $\partial C/\partial t$ を次式のように差分化して非定常解析を行った。

$$\frac{\partial C^n}{\partial t} = -\frac{\partial C^{n-1}}{\partial t} + \frac{2}{\Delta t} (C^n - C^{n-1}) \quad \dots\dots\dots (33)$$

ここに Δt は時間ステップ幅、 C^n は第 n 時間ステップでの C の値である。また時間微分項の節点値として次式を採用した。

$$\frac{\partial C_i}{\partial t} = \int_{\Omega} \frac{\partial C}{\partial t} N_i d\Omega / \int_{\Omega} N_i d\Omega \quad \dots\dots\dots (34)$$

ここで $\partial C_i/\partial t$ は時間微分項の第 i 節点値、 N_i は第 i 節点で1となる重み関数、 Ω は考えている領域全体を表わす。本研究では $\Delta t = 1$ (day)とした。

Fig. 8に境界条件4、 $\alpha = 1.1$ での L と AE の関係を、 $t = 5, 10, 100$ (days)について示す。 $t = 100$ (days)では定常解に近いと考えられ、 L_{best} の値は定常解での $L_{best} = 1.2$ (m)に時間とともに近づくと考えられるが、 L を大きくすると解が発散してしまうため、 $t = 100$ (days)でも $L_{best} = 0.6$ (m)となってしまった。このため本研究では次のような1次元問題について安定性解析を行い、 L の値と安定性との関係について考察した。

Fig. 9に示す1次元半無限領域を考える。領域内に3つの

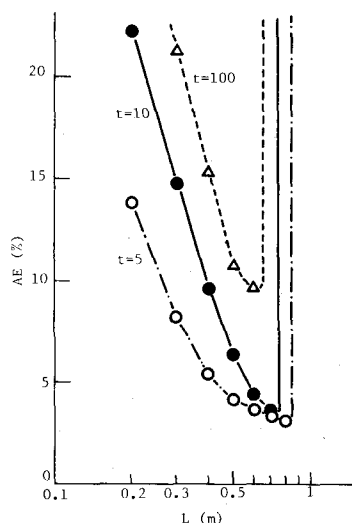


Fig. 8 Relation between L and AE . ($\alpha=1.1$)

Table 4 Combination of the values of v , D_x and D_y where L_{best} was obtained. No value of L_{best} means oscillation of the solution.

v	D_x	D_y	$\sqrt{D_x D_y}/v$	L_{best}
0.2	1	1	5.00	5.6
0.3	1	1	3.33	3.8
0.4	1	1	2.50	2.7
0.5	1	1	2.00	2.2
0.6	1	1	1.67	1.8
0.8	1	1	1.25	1.4
1	1	1	1.00	1.2
1.5	1	1	0.67	0.8
2	1	1	0.50	0.6
3	1	1	0.33	—
1	5	5	5.00	5.5
1	2	2	2.00	2.2
1	1.5	1.5	1.50	1.7
1	0.8	0.8	0.80	1.0
1	0.6	0.6	0.60	0.8
1	0.5	0.5	0.50	0.6
1	0.4	0.4	0.40	0.5
1	0.3	0.3	0.30	—
0.5	1.5	1.5	3.00	3.4
2	6	6	3.00	3.4
0.1	0.1	0.1	1.00	1.2
0.5	0.5	0.5	1.00	1.2
0.5	0.25	0.25	0.50	0.6
2	1	1	0.50	0.6
1	5	1	2.24	3.2
1	4	1	2.00	2.8
1	3	1	1.73	2.3
1	2	1	1.41	1.7
1	1.5	1	1.22	1.4
1	0.8	1	0.89	1.1
1	0.6	1	0.77	1.0
1	0.5	1	0.71	1.0
1	0.4	1	0.63	0.9
1	0.2	1	0.45	—
1	1	2	1.41	1.7
1	1	1.5	1.22	1.4
1	1	0.8	0.89	1.1
1	1	0.6	0.77	1.0
1	1	0.4	0.63	0.9
1	1	0.2	0.45	0.9
1	1	0.1	0.32	0.9
1	1	0.08	0.28	0.9
1	1	0.05	0.22	0.8
1	1	0.02	0.14	—
1	0.8	0.4	0.57	0.8
1	0.8	0.2	0.40	0.7
1	0.8	0.1	0.28	0.7
1	0.5	0.2	0.32	0.5
1	0.5	0.1	0.22	0.5
0.5	0.5	0.3	0.77	1.0
0.5	0.5	0.05	0.32	0.9
2	2	0.5	0.50	0.9
2	2	0.2	0.32	0.9

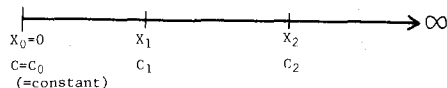


Fig. 9 One-dimensional semi-infinite domain.

節点 $x_0 = 0, x_1, x_2$ ($x_1 < x_2$) をとり、各節点での濃度値をそれぞれ C_0, C_1, C_2 とする。

基礎式および初期・境界条件を次式に示す。

$$\text{基礎式: } \frac{\partial C}{\partial t} + v \frac{\partial C}{\partial x} - D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = f(t) \delta(x - x_2) \quad \dots\dots\dots (35)$$

$$\text{初期条件: } C = 0 \quad \text{at } x > 0 \quad \dots\dots\dots (36)$$

$$\begin{aligned} \text{境界条件: } C &= C_0 (= \text{一定}) \quad \text{at } x = 0 \quad \dots\dots\dots (37) \\ C &= 0 \quad \text{at } x = \infty \end{aligned}$$

(35)式で $f(t)$ はある時間のみの関数であり、(35)式の右辺は、節点 x_2 で物質の付加、あるいは吸収のあることを示す。

(35)式を次式に示す内挿関数を用いて Galerkin 法で定式化し、(33),(34)式を用いて時間差分を行う。

$$\left. \begin{aligned} N_0 &= 1 - x/x_1 \quad 0 \leq x \leq x_1, & N_1 &= x/x_1 & 0 \leq x \leq x_1, \\ &= 0 \quad x > x_1 & &= \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \cdot \exp\left[-\frac{x - x_1}{L}\right] & x > x_1 \\ N_2 &= 0 & x < x_1 \\ &= \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \cdot \exp\left[-\frac{x - x_2}{L}\right] & x \geq x_1 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (38)$$

重み関数として N_1 を用いると最終的に次式が得られる。

$$C_1^n = \frac{2/\Delta t - A}{2/\Delta t + A} C_1^{n-1} + \frac{E/B}{2/\Delta t + A} \cdot (C_2^n + C_2^{n-1}) + \frac{F/B}{2/\Delta t + A} \cdot C_0 \quad \dots\dots\dots (39)$$

$$A = \frac{1}{B} \cdot \left\{ -\frac{D}{x_1} + \frac{D}{(x_2 - x_1)^2} \left(\frac{L}{4} + \frac{x_2 - x_1}{2} + \frac{(x_1 - x_1)^2}{2L} \right) \right\}$$

$$B = \frac{x_1}{2} + L - \frac{L^2}{x_2 - x_1}$$

$$E = \left\{ -\frac{1}{4} \cdot \frac{vL}{x_2 - x_1} + \frac{D}{(x_2 - x_1)^2} \cdot \left(\frac{L}{4} + \frac{x_2 - x_1}{4} \right) \right\} \cdot \exp\left[(x_2 - x_1)/L\right]$$

$$F = v + 2D/x_1$$

今、 $f(t)$ として、 $t > 0$ について $C_2 = \bar{C}_2$ (ある一定値) となるような関数をとるものとする、 C_1^n が収束するための必要十分条件として、次式が得られる。

$$0 < L < \frac{(x_2 - x_1) + \sqrt{x_2^2 - x_1^2}}{2} \quad \dots\dots\dots (40)$$

Fig. 8 を求めた条件下では有限要素の一辺の長さは 0.5(m)、無限要素の無限遠方向の節点間の距離の最小値は $4 \cdot (\alpha - 1)$ (m) となるため、 $x_1 = 0.5$ (m)、 $x_2 = 0.5 + 4 \cdot (\alpha - 1)$ (m) として (40) 式の L の上限を示すと Fig. 10 の実線のようになる。同時に、 α の値を変えて、 $t = 100$ (days) でも解が発散しないときの L の最大値を実際に求めた結果も示す。 α が大きくなると (40) 式の上限は観測値から離れてくるが、(40) 式は α が大きくなると、解が発散しない L の最大値も大きくなる傾向は良く表わしている。

Fig. 11 に $\alpha = 1.4$ での L と AE の関係を $t = 5, 10, 100$ (days) について示す。 $t = 100$ (days) での $L_{best} = 1.0$ (m) は、定常解析から得た Table 1 の結果と同じである。また $t = 5, 10$ (days) について、定常解析で得た L_{best} を用いても大きな誤差は生じないことがわかる。これらのことは定常解析で得た L_{best} を非定常解析にも援用できることの可能性を示している。

Fig. 12 に境界条件 1, 2, 4 での AE の時間変化を示す。境界条件 4 では $\alpha = 1.4$ 、 $L = 1.0$ (m) を用いた。境界条件 1,

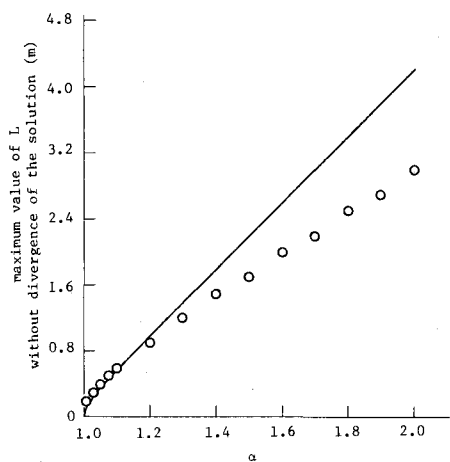


Fig. 10 Relation between α and the maximum value of L without divergence of the solution.
circle $\bigcirc$; observed value
solid line—; theoretical value based on equation (40)

2 では大きな誤差を生じる可能性のあることがわかる。境界条件 2, 4 では AE は時間とともに一定値に近づくが、境界条件 1 では時間とともに AE は増え続ける。境界条件 4 は境界条件 1, 2 に比べ AE も小さく、 t に対して AE もほとんど増加しないことから、適当な L と α の値が選ばれたとき、境界条件 4 は非定常解析にも有効であると考えられる。なお Fig. 12 で t の値が小さいとき、各境界条件で AE の値が大きくなっているのは、空間的および時間的離散化誤差が t が小さいと大きく効いてくるためと考えられる。

6.3 不均一場への適用例

無限に広がる真直な壁に沿った流れの速度が、次式で表わされる場合を考える。

$$v(y) = \sqrt{y} \quad (\text{m/day}) \quad \dots \dots \dots (41)$$

ただし、壁に沿う方向に x 軸、壁に垂直に y 軸をとるとする。

今、Fig. 13 に示すように壁から 1 (m) のところに連続点汚染源があり、 12×4 (m²) の領域について定常濃度分布を正確に求めたい。

分散係数は次式で表わされるものとする。

$$\begin{aligned} D_x &= a_L \times v + D_0, \\ D_y &= a_T \times v + D_0 \end{aligned} \quad \dots \dots \dots (42)$$

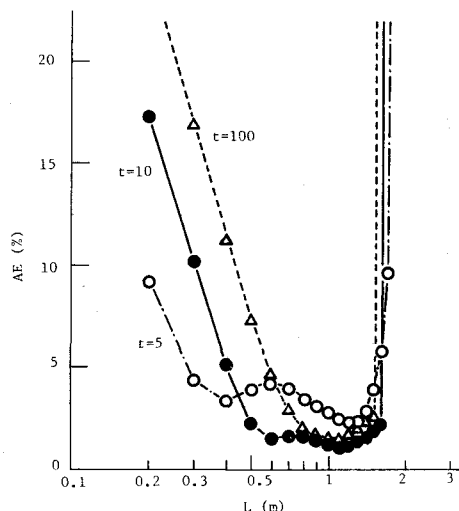


Fig. 11 Relation between L and AE . ($\alpha=1.4$)

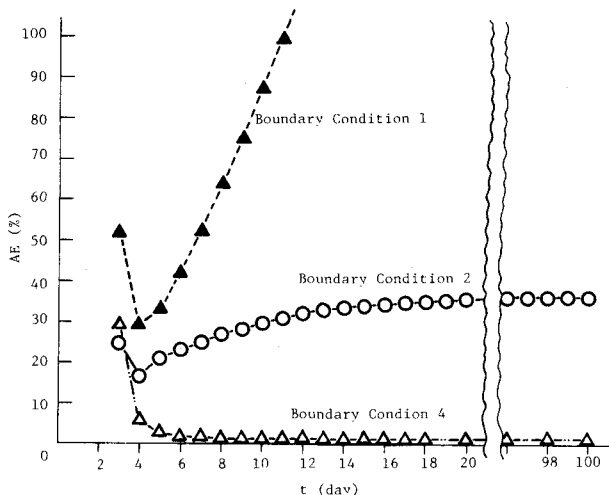


Fig. 12 Relation between t and AE .

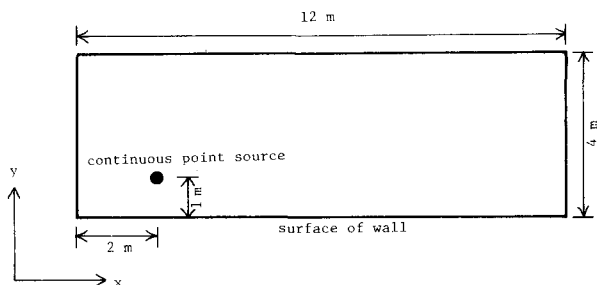


Fig. 13 Condition of the analysis of a nonuniform flow field.

ここに、 a_L , a_T , D_0 は定数で次の値をとるものとする。

$$a_L = 1 \text{ (m)}, \quad a_T = 0.5 \text{ (m)}, \quad D_0 = 10^{-5} \text{ (m}^2/\text{day)}$$

汚染物質の移動は(1)式に従い、壁面上では $\partial C/\partial y = 0$ とする。また $\theta = 1$ とする。

この問題は、流速と分散係数が y の関数であることと、汚染源の位置が異なることを除いて6.1節(B)項で解析した問題とよく似ている。そこでFig.3のようにメッシュ分割し、無限要素を用いる場合(境界条件4)と、Dirichlet条件を用いる場合(境界条件2)の解の比較を行う。比較のための解析解が存在しないので、 $K=10$, $\alpha=1.15$ としてDirichlet条件で計算した解と比較を行う。この条件下では、Fig.13に示す解析対象領域の、 x 軸、 y 軸に沿って約4倍の距離の領域について計算したことになり、仮想境界はFig.13の解析対象領域から十分遠方にあつて、境界条件の影響はほとんど及ばず、開領域問題の近似解として、十分な精度を持つと考えられる。

無限要素に用いる減衰長 L としては、(42)式で D_0 を無視し、(32)式より求めた L を用いた。つまり、

$$L_{best} = 1.2 \cdot \sqrt{D_x \cdot D_y} / v = 1.2 \cdot \sqrt{a_L \cdot a_T} = 0.8 \text{ (m)}$$

$K=1$, $\alpha=1.1$ として2つの境界条件で計算し、 AE を求めると、

Dirichlet条件(境界条件2) : $AE = 27.8 \text{ (%)}$

無限要素使用(境界条件4) : $AE = 0.5 \text{ (%)}$

となり、無限要素を用いると非常に良い結果を得ている。

本節の例のように、不均一流れ場や、非線形問題の開領域問題に無限要素を適用して解く場合は、問題の条件ができるだけ良く似ている、解の良くわかっている問題での L_{best} を求め、この L_{best} を援用して解析するのが実際のだと考える。

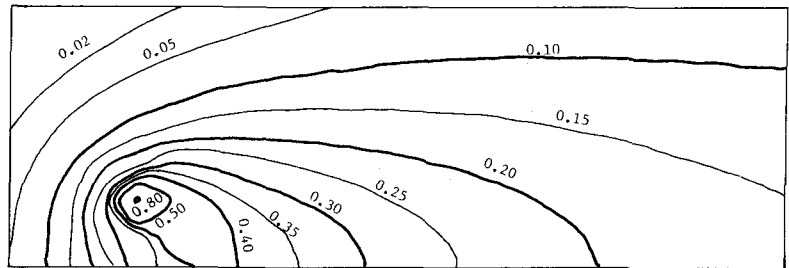
Fig.14に比較の規準とした解と、境界条件2で解いた解の濃度分布を示す。境界条件2を用いた場合、比較の規準とした解に比べて、濃度値が小さくなる傾向のあることがわかる。

7. 結 論

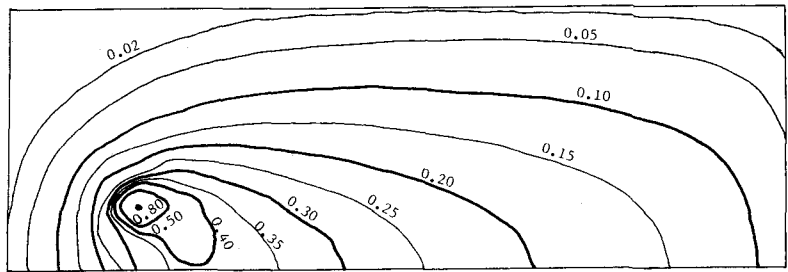
本研究では2次元の開領域において、定常な流れ場に連続点汚染源が1つ存在する場

合の汚染物質の移流分散を、流れ場が均一な場合と不均一な場合の2例について、Galerkin法と無限要素を適用して解析した。本研究で扱った条件下に関する限りでは、以下の結論が得られた。

- (1) 指数減衰型無限要素を用いる場合、最適な減衰長を選択する必要がある。
- (2) 無限領域を有限領域で近似して解析した場合、大きな誤差を生じる場合がある。
- (3) 本研究で用いた指数減衰項の最適減衰長は無限要素の節点の配置、汚染源の位置にあまり影響されない。
- (4) 定常解析では、最適減衰長と $\sqrt{D_x \cdot D_y} / v$ の間に正比例の関係があった。ただし D_x , D_y は、 x , y 方向の分散係数、 v は流速である。
- (5) 最適減衰長が求まったとき、指数減衰型無限要素は、本研究で扱ったような移流分散方程式の開領域問題に対し有効である。



Standard concentration distribution for comparison.



Concentration distribution under Boundary Condition 2.

Fig. 14 Concentration distribution in the nonuniform flow field.

- (6) 均一流れ場で求めた最適減衰長に関する関係式を、不均一流れ場に援用しても良好な結果が得られた。本研究で扱った条件下では、指数減衰型無限要素は不均一流れ場に対しても有効であると考えられる。

参 考 文 献

- 1) P. Bettess : Infinite elements, Int. J. Num. Meth. Engng., 11, pp. 53-64(1977)
- 2) P. Bettess : More on infinite elements, Int. J. Num. Meth. Engng., 15, pp. 1613-1626(1980)
- 3) 加川幸雄：開領域問題のための有限/境界要素法，サイエンス社(1983)
- 4) G. Beer and J. L. Meek : ' Infinite domain ' elements, Int. J. Num. Meth. Engng., 17, pp. 43-52(1981)
- 5) O. C. Zienkiewicz, C. Emson, and P. Bettess : A novel boundary infinite element, Int. J. Num. Meth. Engng., 19, pp. 393-404(1983)
- 6) 「FACOM FORTRAN SSL II使用手引書」，富士通(1979)