

(18) 透水量係数推定の逆問題としての定式化について

京都大学工学部 正 ○古市 徹
同 正 井上 頼輝
同 学 寺脇 正文

1. はじめに

汚染物質の気圏、水圏、地圏中での環境移行過程を解明する場合、通常これら媒体を均一と仮定して、物質移動に関する基礎方程式を解くことが多い。また、環境中の諸要因、例えば水深、粗度係数、その他の不均一分布が既知の場合には、有限要素法・有限差分法等の数値解析の手法により、不均一媒体中での物質移動を解析する。しかし、環境中の諸要因を媒体の不均一性に応じて細かく観測することは、時間的・経済的その他の理由で困難なことが多い。そこで媒体中の諸点で圧力、水位等比較的観測しやすいデータから、不均一媒体中の透水量係数等の諸要因の値を推定することが考えられる。これがいわゆる逆問題 (inverse problem) といわれるもので、本研究では特に不均一性が著しく、かつ粒度、透水量係数等のデータを数多く取りにくい地層について考え、不均一地層中での地下水の流れを支配する透水量係数の推定について検討する。これは、地下水の流れによる汚染物質の移動を正確に予測するための前段階であり、フィールドデータを数学モデルに反映させることの必然性を前提としている。

2. 逆問題の定式化

(1) モデリングとしての逆問題

いかに予測精度の良い数学モデルを得るかを、データの取得・処理の観点から考えるに当たって、逆問題の位置付けをしておく必要がある。P. Eykhoff⁽¹⁾ は、「モデルとは実システムの本質的な部分に関する知識を、有用な形に縮約して表現したものと考えられる。」としているが、モデルは対象実システムの種類、使用目的等によって異なってくることは勿論である。一般にモデル選択の基準としては、次のような事項が考えられる。①対象の時間スケールと空間スケール、②使用目的、③取得できるデータの量と種類、④考慮すべき環境要因、⑤汚染物質（状態変数）の種類と性質、などである。しかしながら、前述の研究目的においては、媒体の不均一性をどのように評価するかが当面の目的であるので、水平方向 2 次元帯水層を対象として、次のような簡略化した数学モデルを仮定する。

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(T(x,y)\frac{\partial h}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(T(x,y)\frac{\partial h}{\partial y}\right)=0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

ここに、 $h(x,y)$ は水位、 $T(x,y)$ は不均一平方性の透水量係数である。すなわち、空間的に変動する透水量係数 $T(x,y)$ によって、場の不均一性を表現し、地下水流れのシミュレーションを行うわけである。この場合、実システムの挙動をできる限り良く近似するように T を推定する必要がある。従来、水位についての実験および観測結果を再現するために、パラメータ T をただ単に試行錯誤的に変化させてシミュレートし、結果にのみ適合させる方法がとられてきた。これはパラメータの任意性および現象の物理法則を考えれば、たとえ結果が一致したとしても、理論的根拠のない方法といえ、計算効率や客観性の観点からも問題がある。そこで本研究ではモデリングの基本に帰って、パラメータの同定（推定）を考えることにする。G. A. Mihram⁽²⁾ によるモデリングのステップは、① System analysis、② System synthesis、③ Model verification、④ Model validation、⑤ Model analysis である。パラメータ同定は③に相当する。このステップは、L. A. Zadeh⁽³⁾ による同定の定義「対象としているシステムのある種の挙動に等価なシステム（モデル）を入力と出力に基づいて決定すること」に従うと、②のステップで構成された数学モデルをデータから推定することになる。データから逆にパラメータを同定する問題を逆問題という。これは物理特性を既知としてシミュレーションを行う順問題に対して、例えば式(1)において、データ (h) を与えて逆にパラメータ (T) を求めるという手順から由来している。パラメータ同定は、客観的に最適化手法を用いて行われ、その手法は一般に、①データ、②モデル構造、③パラメータ推定理論、④パラメータ推定のアルゴリズムなどによって特徴付けられる。前述のMihramのモデリングのステップから明らかなように、逆問題に続く次の問題として、パラメータ同定されたモデルの検証段階がある。研究の目的

が、不均一性をどのように評価するかという段階から、流れ場を精確に計算することに向けられるならば、モデリングという立場に立った逆問題を考えなければならない。これは単にパラメータフィティングで事足りるとせずに、シミュレーションまでも考えたモデリングプロセスとして、逆問題を考えることを意味している。

(2) 逆問題の不適切性

問題が与えられた場合、①解が存在すること、②その解が一意であること、③解が入力の変化に連続的に変化すること、の3つの条件を満たすとき、問題は適切であるといわれる。⁽⁴⁾逆問題は、①の条件は仮定するとしても、一般に②と③の条件を満たさない、すなわち不適切問題となるとところに難しい点がある。実際これは、水位データにおける観測誤差が T の推定に敏感に影響したり、流速や水位勾配についての情報不足により解すなわち推定値 T が一意に決まらないという形で現われる。③の条件を満たさない例として、⁽⁶⁾式(1)の1次元の場合である次式で考える。

$$\frac{\partial}{\partial x}(T(x) \frac{\partial h}{\partial x}) = 0 \quad 0 \leq x \leq 1 \quad \dots\dots\dots (2)$$

$T(0) = 1$, $h(x) = 2x$ として、 $h_k(x) = h(x) + (1/k) \sin(kx)$ とすると、 $k \rightarrow \infty$ のとき $h_k(x) \rightarrow h(x)$ となる。しかるに T については次式のようになる。

$$\|T - T_k\| = \max |\cos(kx) - 1| / |\cos(kx) + 2| = 2 \quad \dots\dots\dots (3)$$

これは T が h に対して連続に依存しないことを示している。次に、観測誤差による T の高感度性の例として、⁽⁶⁾式(2)を用い、 $x=0$ で $T \partial h / \partial x = q_0$ とし $h^*(x) = h(x) + \varepsilon(x)$ とすると T の誤差は次のように評価できる。

$$|T - T^*| = |q_0| \cdot \left| \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right| / \left| \frac{\partial h}{\partial x} \left(-\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right) \right| \quad \dots\dots\dots (4)$$

これは T の誤差が h の誤差 ε ではなく、 ε の微分に影響されることを示し、 ε が小さくても $\partial \varepsilon / \partial x$ は大きくなりうるので、 T の誤差は大きくなる可能性があることを示している。

(3) 推定手法の分類

T を推定する手法は、取得できるデータの種類と量によって、逆問題を解く手法とデータ処理の手法とに分類できると考えられる。

- (a) 逆問題を解く手法…… h についてデータが得られる(T についてはほとんどない)場合で、 T を独立変数として扱い境界値問題として解く直接法と、 T を仮定して h に関する式を解き、 h の観測値との偏差を最小にするように T を逐次自動的に修正していく間接法に分類される。直接法は独立変数 T の次数の決定の仕方により、間接法は繰り返しのけるパラメータの修正の仕方と評価関数のとり方により手法が異なってくる。本研究は逆問題を解く手法を主眼としているので、この2つの方法については次章以下で詳しく述べる。
- (b) データ処理の手法…… T についてのデータがある程度得られる場合で、このデータを直接処理する手法である。気象学での客観解析法、変分法、⁽⁷⁾Kriging法⁽⁸⁾などが考えられる。このとき、客観解析法などの決定論的な補間法と、変分法・Kriging法などの確率論的な内挿法との区別は本質的である。変分法は物理法則を束縛条件としてデータ処理できる点と、Kriging法は逆問題のための初期推定値を得ることもできる点が重要である。

3. 直接法による解析

空間的に変動する透水量係数を推定することの目的は、より予測精度の良い拡散シミュレーションを行うためである。そのために、濃度予測に与える透水量係数の感度について検討し、推定することの意義を示し、次に直接法による推定方法およびその結果について述べる。

(1) 濃度予測に与える透水量係数の影響

帯水層における汚染物質の拡散移行について、今まで多くの研究がなされている。その手順について示したのが図-1である。従来方法では、フィールド調査によって水位分布、透水量係数を観測し、サンプルとして採取した土壌についてカラム実験を行い、土壌密度(ρ)、空隙率(f)、拡散係数(D)、分配係数(K_d)等を決定している。流速は水位と透水量係数よりDarcy則を用いて計算される。透水量係数を逆問題として推定するか否かが従来方法と本研究による

方法とが異なる点である。拡散シミュレーションの結果と、観測結果とが一致しないことが多いが、これは現実の流速分布とシミュレーションに用いた流速分布が異なることが主な原因と考えられる。すなわち、透水量係数の推定が不正確であり、かつその影響が大きいためと考えられる。これを見るために次のような2次元非定常移流拡散方程式を用いた拡散シミュレーションを行う。

$$\left(1 + \frac{\rho}{e} K_d\right) \frac{\partial c}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D_x \frac{\partial c}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(D_y \frac{\partial c}{\partial y}\right) - u \frac{\partial c}{\partial x} - v \frac{\partial c}{\partial y} - \lambda \left(1 + \frac{\rho}{e} K_d\right) c \quad \dots\dots\dots (5)$$

本式においては、汚染物質の自己崩壊による減衰(λ)と土壌への吸着を考慮している。要素分割の形状が任意にとれ、パラメータの空間分布を要素ごとに異なった値を与えることにより容易に処理できる、という利点をもつ有限要素法によって数値計算を行う。空間についてはピラミッド関数を形状関数にとり、Galerkin 法によって離散化し、時間については安定性の良いCrank-Nicolson 型の差分法を用いて離散化し、次のような代数方程式とした。

$$([E] + \frac{2}{\Delta t} [P]) \{c\}_t = [P] \left(\frac{2}{\Delta t} \{c\}_{t-\Delta t} + \left\{ \frac{\partial c}{\partial t} \right\}_{t-\Delta t} \right) \quad \dots\dots\dots (6)$$

対象領域は長方形とし、境界条件・初期条件とともに図-2に示している。式(6)の連立1次方程式の解法にはガウスの消去法を用いるが、現実の応用で出合う大次元の問題でも容易に解けるユニット消去法を使用する。ある1つのパラメータに着目しそれを変化させ他を一定とした場合に、全体のシミュレーション結果がどのように影響を受けるかについて感度解析的に比較検討を行った。拡散係数に比べ、分配係数・空隙率・流速などが拡散に与える影響が大きい。しかし、流速の空間分布は比較的取得しやすい水位の観測データから求められるが、分配係数・空隙率についてはフィールドからその空間分布を求めることはほとんど不可能に近い。したがって、推定可能な流速分布を操作することにより、現実の現象を反映させるようにして、シミュレーション精度を向上させることは自然といえよう。一例として、透水量係数を変化させた時の濃度分布を図-3に示す。(a)は次の(2)で示す逆問題の直接法によって、推定した透水量係数の空間分布を用いて計算したものである。このときの透水量係数の最大値、平均値、最小値を領域で一定として計算した濃度分布がそれぞれ(b)、(c)、(d)である。

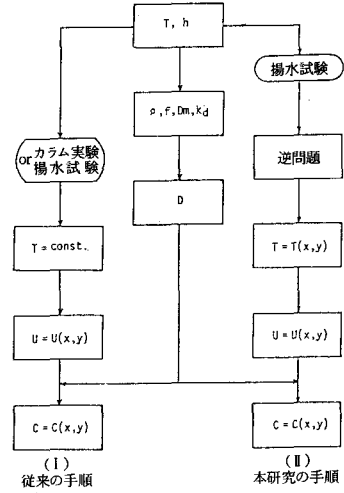


図-1 拡散シミュレーションの手順
 $C(x, y)$: 濃度 $U(x, y)$: 流速

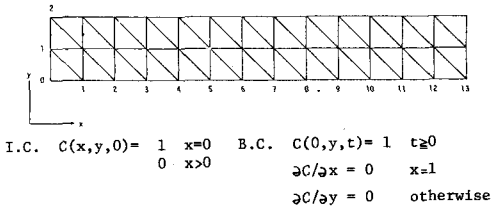


図-2 計算対象領域

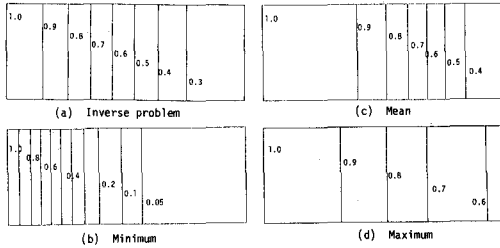


図-3 異なる透水量係数による濃度分布の比較

(2)透水量係数の有限要素法を用いた推定

不均一な等方性の帯水層の2次元定常流を考え、先に述べた式(1)を基礎式とする。一般によく行われる透水量係数 T と水位 h の境界条件とを与え、与式を h についての2階偏微分方程式として解く問題を順問題という。逆に、 h と T の境界条件を与えて T についての1階の偏微分方程式を解くことを逆問題といい、これらの関係については図-4に示している。ここでは逆問題の解法に、Galerkin 法を用いた有限要素法で解く方法について述べる。 T と h の形状関数を次のようにする。

$$T = \sum N_i(x, y) \hat{T}_i, \quad h = \sum \phi_i(x, y) \hat{h}_i \quad \dots\dots\dots (6)$$

但し, $N_i(x, y)$: 1 次の形状関数

$\phi_i(x, y)$: 2 次 (1 次) の形状関数

$\hat{T}_i, \hat{h}_i$: T_i, h_i の節点値

解の誤差を小さくするために, h についての形状関数の次数を T のそれよりも高くしている。⁽⁹⁾ 式 (1) は Galerkin 法により次の T についての 1 次の連立方程式になる。

$$([A] + [B]) \{T\} = 0 \quad \dots\dots\dots (7)$$

$$\begin{aligned} \text{但し, } [A]_m &= \sum \left\{ \int_{\Delta} N_i \left[\frac{\partial N_m}{\partial x} \left(\sum \frac{\partial \phi_j}{\partial x} \hat{h}_j \right) + \frac{\partial N_m}{\partial y} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \left(\sum \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \hat{h}_j \right) \right] d\Delta \right\} \\ [B]_m &= \sum \left\{ N_m N_i \left[l_x \left(\sum \frac{\partial \phi_j}{\partial x} \hat{h}_j \right) + l_y \left(\sum \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \hat{h}_j \right) \right] ds \right\} \end{aligned}$$

l_x, l_y : 方向余弦, $\det([A] + [B]) = 0$

次に式 (7) を次のように整理する。

$$\left(\begin{bmatrix} A_{uu} & A_{uv} \\ A_{vu} & A_{vv} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{uu} & B_{uv} \\ B_{vu} & B_{vv} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} T_u \\ T_v \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \dots\dots\dots (8)$$

但し, T_u : 未知, T_v : 既知 (境界条件)

あるいは,

$$([A_{uu}] + [B_{uu}]) \{T_u\} = -([A_{uv}] + [B_{uv}]) \{T_v\} \quad \dots\dots\dots (9)$$

ここで, 式 (9) の左辺の係数は次の条件を満たさなければならない。

$$\det([A_{uu}] + [B_{uu}]) \neq 0 \quad \dots\dots\dots (10)$$

T が一意の解をもつための条件は, 領域のすべての流線によって横切られる線 Γ に沿って T が既知であることである。⁽¹⁰⁾ 式 (9) を T_0 の境界条件を与えて解く。図-2 と同様に長方形の領域を考え, 三角形要素に分割する ($x=5$ の部分までを用い, 要素数は 20 であり, 節点数は T については 18, h については 33 である)。計算においては, h, T のそれぞれの y 方向の値は等しくとり, x 方向の変化について考えている。

(3) 計算結果

仮想データとして与える水位の形状 (直線変化と曲線変化) の違いによる。 T の推定に与える影響をみると, 直線の場合は理論的に計算した値と推定値と一致するが, 曲線の場合は図-5 のように両者に差が生じている。図-5 と同様に理論的に計算した h と T に仮想観測雑音 (標準偏差 0.05 の正規乱数) を加え, 観測値 T を与えて h を計算する順問題と, 観測値 h を与えて T を計算する逆問題とを考慮, 観測雑音に対する解の感度を比較したものが図-6 である。逆問題として T を推定することの流速への影響を示したのが図-7 であるが, これは上述の (1) の図-3 の濃度分布を計算するのに用いた流速であり, (a) ~ (d) はそれぞれ対応している。その他い

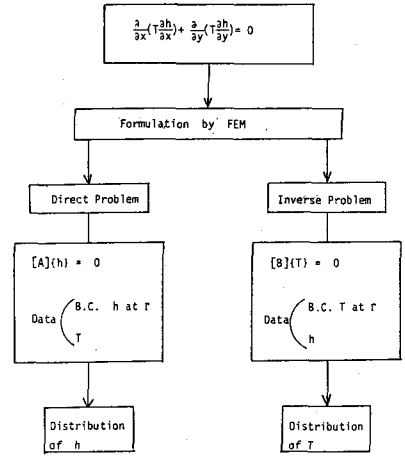


図-4 逆問題と順問題の比較

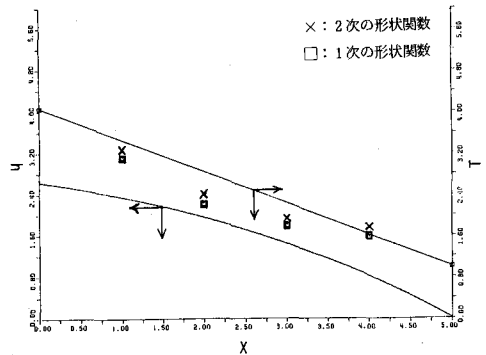


図-5 水位の近似度の違いによる透水量係数の推定傾向

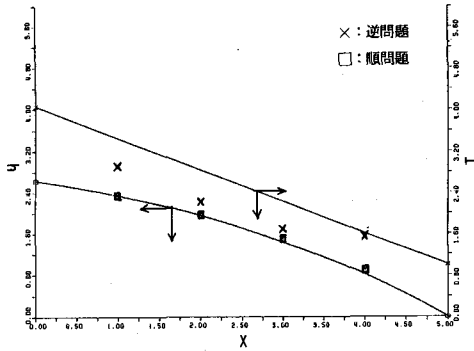


図-6 逆問題と順問題の観測誤差に対する感度の比較

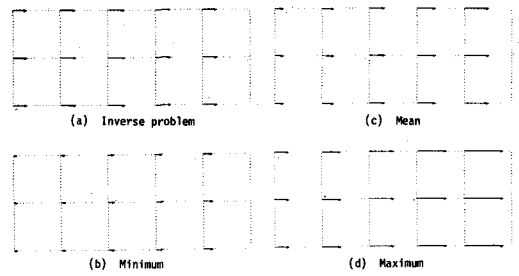


図-7 異なる透水量係数による流速分布の比較

くらかの計算により次のような考察が得られた。

- ①観測水位の形状が一樣なほど、 T の推定精度は良い。また、水位を正確に表現（形状関数を1次関数よりも2次関数とする）した方が推定精度が良い。
- ②水位勾配が急なほど、 T の推定精度は良い。
- ③順問題より逆問題の方が、入力データ（ h あるいは T ）の誤差に対して計算結果が敏感である。
- ④ T の値の流速分布に与える影響は、相対的に大きい。
- ⑤逆問題は1階の偏微分方程式を解くので、片端のみで T の境界値を与えると解が振動した。これは検算の結果、式(9)の左辺の行列のランクが落ちたため（条件(10)が成立しない）と考えられる。したがって今回の計算結果はもう一端の境界値を与えて、ランクを回復して得られたものである。

4. 間接法による解析

間接法によるアプローチは、追加情報を考慮したり誤差評価がしやすいなどの観点から、近年逆問題の解法の主流となっている。本研究ではその中でも、観測誤差が必ず存在するという現実の下で、推定誤差が評価できる統計的アプローチについて述べる。^(11,12)

(1) 統計的方法の定式化

Neuman⁽¹³⁾の方法に基づいた統計的アプローチのアルゴリズムについて述べる。数学モデルとしての基礎式は、直接法で述べたものと同じで式(1)とする。有限要素法を用いて離散化し、境界条件を考慮して次のような行列方程式が得られるものとする。

$$A h = q \quad \dots\dots\dots (11)$$

但し、 h : 水位ベクトル (N 次元) A : N 次元正方行列、 q : N 次元ベクトル

h^* と q^* をそれぞれ、真値 h と q の初期推定値（観測値あるいは妥当と考えられる仮定値）とし、次のように表現できるものとする。

$$h^* = h + \varepsilon \quad \dots\dots\dots (12)$$

$$q^* = q + \mu \quad \dots\dots\dots (13)$$

但し、 ε と μ は N 次元の誤差ベクトル

さらに、モデル化された式(11)においてもモデル化誤差の N 次元誤差ベクトル η が加わるものとする、式(12)、(13)から式(11)は次のようにかきかえられる。

$$A h^* - q^* = A \varepsilon - \mu + \eta \quad \dots\dots\dots (14)$$

μ や η が ε に比べて評価しにくいことと、 T の推定に与える μ と η の影響が ε に比べて十分に小さいことを考慮して、 ε のみを考えることにする（このモデルの簡略化によって逆問題で得られる T にわずかな偏りが生じるが、不安定にはならないことが示されている⁽¹¹⁾）。すなわち、 ε のみ考慮して次式のようにかきかえられる。

$$h^* - A^{-1} q^* = \varepsilon \quad \dots\dots\dots (15)$$

ε はその平均と共分散が次のように与えられるものとする。

$$E[\varepsilon] = 0, \quad V[\varepsilon] = \sigma_H^2 V_H \quad \dots\dots\dots (16)$$

但し、 V_H は正定値対称行列、 σ_H は正のスカラ―
透水量係数 T は対数正規分布に従うことが知られているので、⁽¹⁴⁾ 次のようにかく。

$$Y(x) = \log_{10} T(x) \quad \dots\dots\dots (17)$$

Y を用いて推定を行うが、その利点としては、 T の推定値が常に正であることが保証され、 Y は正規分布することがあげられる。 $\hat{Y}$ を Y の推定値とすると、統計的アプローチによる間接法では $\hat{Y}$ の値は、次の合成された最小自乗基準を最小にする最適ベクトルとして求められる。

$$J(\hat{Y}) = J_H(\hat{Y}) + \lambda_0 J_Y(\hat{Y}) \quad \dots\dots\dots (18)$$

λ_0 は最適な乗数であり、 J_H, J_Y は次のように定義されている。

$$J_H(\hat{Y}) = [h^* - A^{-1} q^*]^T V_H^{-1} [h^* - A^{-1} q^*] \quad \dots\dots\dots (19)$$

$$J_Y(\hat{Y}) = [Y^* - \hat{Y}]^T V_Y^{-1} [Y^* - \hat{Y}] \quad \dots\dots\dots (20)$$

ここで注意すべきことは、 $A^{-1} q^*$ は $\hat{Y}$ に関して非線形になることである。したがって、Chavent による非線形最小自乗法を拡張した変分理論により、Newton 法と結合した Fletcher-Reeves 法で最適解を求めることになる。 J_H のみを最小にするような $\hat{Y}$ は、誤差が正規分布するならば Y の最尤推定値となるので、 J_H はモデルをデータに適合させたいというモデル適合化条件といえる。一方、 J_Y は、モデル式 (11) と調和しながら初期推定値 Y^* とかけ離れない良好な推定値を得るための基準であり、パラメータの合理性を保つ基準である。また、推定値に平滑化の効果も与える。 Y^* は真値 Y と次のように表現できるものとする。

$$Y^* = Y + \nu \quad \dots\dots\dots (21)$$

ν はその平均と共分散が次のように与えられるものとする。

$$E[\nu] = 0, \quad V[\nu] = \sigma_Y^2 V_Y \quad \dots\dots\dots (22)$$

但し、 V_Y は正定値対称行列、 σ_Y は正のスカラ―

この J_Y を結合させた J を考えることの根拠として、①拡張したベイズ流回帰理論、②多目的計画法、③正則化法などが考えられる。モデリングの仮定と現実の観測データとの整合性を保証するために、 V_H, V_Y の構造のみを仮定し σ_H, σ_Y の大きさは指定しなくてもよいという、事前の仮定に柔軟性をもたせている。

(2) 推定誤差の評価

J を最小にする $\hat{Y}$ を求めるためには、未知パラメータ λ_0 を決定することが重要となる。この値は、 σ_H と σ_Y の初期値がどの位事前情報として与えられるかによって、その決定方法が異なる。 σ_H と σ_Y に関して次の三通りの可能性が考えられる。すなわち、

- ① σ_H と σ_Y がともに既知（ h と T の観測データが得られる）
- ② σ_H が既知、 σ_Y が未知（ h の観測データのみが有用）

③ σ_H と σ_Y がともに未知 (h と T について有用なデータがない) 上記三通りの場合に、それぞれ λ_0 を決定し、 $\hat{Y}$ の最適値を決定するアルゴリズムを図-8に示している。特に、①の場合には λ_0 は、近似的に線形理論の場合から次式のように与えられる。

$$\lambda_0 = \sigma_H^2 / \sigma_Y^2 \quad \cdots \cdots \cdots (23)$$

そしてこのとき、線形化された誤差解析から、推定誤差の平均と共分散はそれぞれ次のようになる。

$$E\{e_Y\} \approx 0, \quad V\{e_Y\} \approx \sigma_H^2 (Z^T V_H Z + \lambda_0 V_T^{-1})^{-1} \quad \cdots \cdots \cdots (24)$$

$$E\{e_H\} \approx 0, \quad V\{e_H\} \approx Z V\{e_Y\} Z^T \quad \cdots \cdots \cdots (25)$$

$$\text{但し、} e_H = \hat{h} - h, \quad e_Y = \hat{Y} - Y$$

$$Z_{n,i} = \partial \hat{h}_n / \partial \hat{T}_i \text{ なる感度行列}$$

次のような指標を用いて推定誤差の評価を行う。

$$\left. \begin{aligned} R_H &= \frac{\Sigma V\{e_H\}}{N} / \frac{\Sigma \sigma_H^2}{N}, \quad r_H = \frac{\Sigma (e_H)^2}{N} / \frac{\Sigma (\epsilon)^2}{N} \\ R_Y &= \frac{\Sigma V\{e_Y\}}{I} / \frac{\Sigma \sigma_Y^2}{I}, \quad r_Y = \frac{\Sigma (e_Y)^2}{I} / \frac{\Sigma (\nu)^2}{I} \end{aligned} \right\} \quad \cdots \cdots \cdots (26)$$

但し、 $e_H, e_Y, \epsilon, \nu, V\{e_H\}, V\{e_Y\}$ はそれぞれ $e_H, e_Y, \epsilon, \nu, V\{e_H\}, V\{e_Y\}$ の要素である。

N, I はそれぞれ h, Y のデータ数であり、 R_T, r_T は R_Y, r_Y と対応して求められる。

ϵ と ν は真値がわからないと求められないが、計算から求める仮想データに対しては知ることができるので、推定アルゴリズムの誤差評価には、上記の指標は有用である。すなわち、 R および r はいわば推定値の誤差分散が初期推定値の誤差分散に対し、どの程度改善されるかを示すものである。そして R はその理論値であり、 r はその実現値であると考えられる。

5.実測データへの適用

統計的アプローチの有効性をみるために、秋田県O市に建造されている模擬帯水層で観測したデータへの適用を考える。この帯水層は、縦6 m、横10 m、深さ3.5 mであり、底部は1/50の流下方向に傾斜をもっている。両端に流入槽と流出槽をもち、両槽での水位差を一定に保つように調整される。帯水層内部は川砂から成り、水位が観測できるように、水平方向で縦方向に1 m間隔で6本、横（流下）方向に2 m間隔で5本、合計30本の観測用のパイプ（直径7.5 cm）が埋込まれている。観測パイプの位置に節点をとった、有限要素メッシュを図-9に示している。まず、仮想データを用いてアルゴリズムの特徴をみってみる。初期推定値は h, T ともに仮定した分散をもつ正規乱数を、真値に付加することによって与えている。図-10に R_H と R_T の関係を示しているが、 σ_H が小さくなる（測定および初期推定の精度が向上すると）、 T の推定値は常に改善（常に $R_T \leq 1$ ）されながら R_T が小さくなっていく（ T の推定精度が向上していく）ことがわかる。また、 σ_T^2 を大きくすると見かけ上 R_T が小さくなっているが、 R_Y の定義と R_T の小さい変化を考えると、推定誤差分散 $V\{e_T\}$

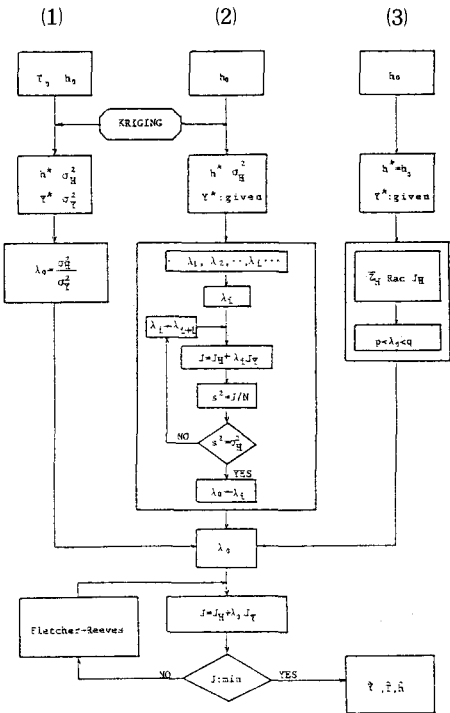


図-8 統計的アプローチのアルゴリズム

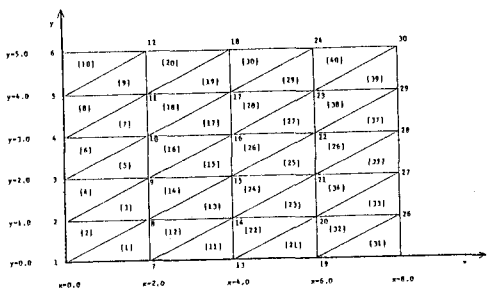


図-9 模擬帯水層の有限要素メッシュ

もそれに見合って大きく
なっていると考えられる。
これは、式 (23), (24)
から λ_0 の影響が大きいこ
とを示している。さらに、
評価基準 J の J_H と J_T は一
般にトレードオフするが
今の場合 λ_0 が小さくなっ
て相対的に J_T の比重を小
さく、すなわち T の初期
推定値よりもモデル式の
物理法則から推定する比
重を大きくしていること

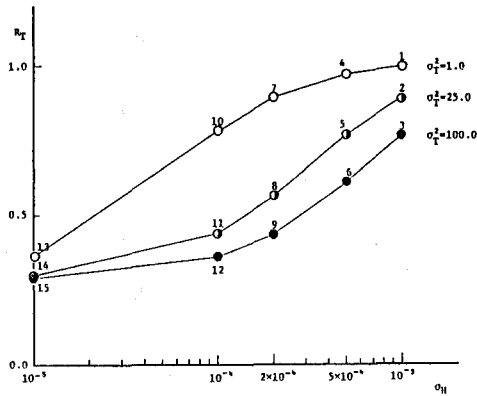


図-10 R_T と σ_H^2 と σ_T^2 の関係

がわかる。次に、実測データを用いるが、一般に σ_T は未知であるので λ_0 が式(23)

からは決定できない。しかしながら、 λ がその最大値に達した時 σ_H^2 の最良推定値は $S^2 = J/N$ で与えられる⁽¹⁵⁾(仮想データで確かめた結果を表-1に示す)ので、この S^2 を用いて λ_0 を決定する。このアルゴリズムは先述の図-8の2列目に示している。実測値を水位の初期推定値とし、Kriging法によって分散を求めると $\sigma_H^2 = 1.7 \times 10^{-6} (\text{cm})^2$ となった。またそのときの実測水位の等水位線図を図-11に示している。このデータから T を推定した T の等高線図が図-12であり、それに対応して推定された水位の等水位線図が図-13である。図-11と図-13を比較すると、模擬帯水層の特性を考えて、後者の方が物理的に妥当と考えられる。計算された S^2 は 1.71×10^{-6} となり、Kriging法で求められた σ_H^2 とはほぼ一致する。これはKriging法によって初期推定値(実測値)の分散を求めたことが、後続の推定手法にとって適切であったことを示している。

表-1 S^2 と σ_H^2 の比較

CASE	σ_H^2	S^2
001	1.0E-06	1.351E-06
002		1.288E-06
003		1.254E-06
004	2.5E-07	3.360E-07
005		3.138E-07
006		3.098E-07
007	4.0E-08	5.243E-08
008		4.957E-08
009		4.700E-08
010	1.0E-08	1.274E-08
011		1.187E-08
012		1.231E-08
013	1.0E-10	2.319E-10
014		3.407E-10
015		4.603E-10

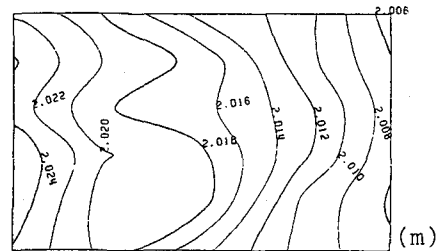


図-11 実測水位の等水位線図

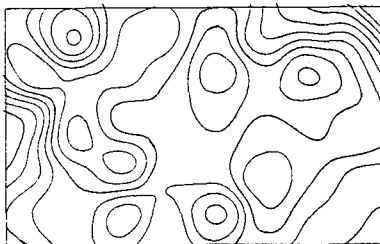


図-12 実測データから推定された透水量係数の等高線図

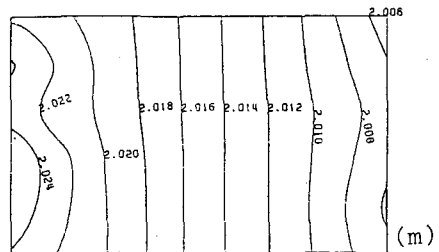


図-13 推定された水位の等水位線図

6. おわりに

本研究の透水量係数推定の定式化を通して、以下のような検討結果が得られた。

- (1)不適切な逆問題は、追加情報(あるいは主観的情報⁽¹⁶⁾)を付加して適切化する必要があることを認めた。
- (2)モデリングプロセスにおける逆問題の位置付けを明確にした。また、推定手法がデータ処理の手法と逆問題を解く手法に分類されることを示した。
- (3)パラメータ同定においては、感度解析や誤差評価などが客観的にできなければ信用できないとされているが、本研究の間接法では統一的に統計的評価ができることがわかった。
- (4)初期推定値を求めるのにKriging法が有用であり、逆問題の統計的アプローチにおけるこの方法の位置付けを示すこ

とができた。

(5)水位の測定データの精度が良い程、より推定誤差の小さい透水量係数の推定値が得られることが実証できた。また、推定値の測定データとの適合性とモデルとの適合性は、必然的にトレードオフするが、統計的アプローチではこれを客観的に処理できることがわかった。

今後の問題として、式(1)のような単純なモデルにおいては、パラメータ T の推定にいろいろな誤差(モデル化誤差、観測誤差、パラメータの不確定性による誤差、数値誤差等)が収約されることになるが、この処理をモデリングプロセスを通して合理的に行うことが必要である。

参考文献

- 1) Eykhoff, P., System Identification, John-Wiley, 1974.
- 2) Mihram, G. A., Simulation, Statistical Foundation and Methodology, Academic Press, 1972.
- 3) Zadeh, L. A., IRE, 50, 856, 1962.
- 4) Emsellem, Y. and G. de Marsily, Water Resour. Res., 7 (5), 1264-1283, 1971.
- 5) Yakowitz, S. and L. Duckstein, Water Resour. Res., 16 (6), 1045-1064, 1980.
- 6) Neuman, S. P., in Modeling and Simulation of Water Resources Systems, edited by G. C. Vansteenkiste, North-Holland, Amsterdam, 1975.
- 7) Sasaki, Y., Month. Weather Rev., 98 (12), 875-883, 1970.
- 8) Delhomme, J. P., Advan. Water Resour., 1 (5), 251-266, 1978.
- 9) Frind, E. O. and G. F. Pinder, Water Resour. Res., 9 (5), 1397-1410, 1973.
- 10) Nelson, R. W., Soc. Petrol. Eng. J., 223-224, Sept. 1962.
- 11) Neuman, S. P. and S. Yakowitz, Water Resour. Res., 15 (4), 845-860, 1979.
- 12) Cooley, R. L., Water Resour. Res., 15 (3), 603-617, 1979.
- 13) Neuman, S. P., Water Resour. Res., 16 (2), 331-346, 1980.
- 14) Freeze, R. A., Water Resour. Res., 11 (5), 725-741, 1975.
- 15) Schweppe, F., Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., pp. 96-98, 1973.
- 16) Neuman, S. P., Water Resour. Res., 9 (4), 1006-1021, 1973.