

# (1) フロック形成過程の数値解析

北海道大学工学部

〃

〃

丹保 憲仁

○高桑 哲男

船水 尚行

## 1 はじめに

混合タンクや沈澱池におけるフロック形成現象をモデル化し、これを解析しようとする場合の障害の一つとして、フロックを構成している最小粒子の個数がきわめて多いことがあげられる。このため、1 倍、2 倍、3 倍粒子というように最小粒子倍数によってフロック粒度を表現しようとするときは、モデルにもとづいて作成された常微分方程式または偏微分方程式の元数が多大となり、実験値と比較すべき計算結果が得られないのが通例である。そこで本研究では、フロックを構成する最小粒子数に応じてフロック粒度を2進法的にグループ分けすることにより、フロック粒度分布の単純化を図ることとした。この方法を採用すると、たとえば最大で100万倍粒子に成長するフロックがあったとしても、 $10^6 \div 2^{20}$ であることにより、20グループすなわち方程式の元数は20元におさめることができる。

以下、グループ分けの方法ならびにフロック形成反応前後の個数保存則を満足させるために必要な操作を述べるとともに、乱流フロッキュレーションと凝集沈降におけるフロック形成過程の数値計算結果を示す。

## 2 フロック粒度構成の2進法的グループ分け

最小粒子が*i*個集塊したフロックを*i*倍粒子とよぶことにし、1倍粒子は第1群、2倍および3倍粒子は第2群、4～7倍粒子は第3群、一般に $2^{K-1} \sim 2^K - 1$ 倍粒子は第*K*群に属するというように考えるならば、各群の内容構成は表1のごとくなる。ただし、*s*は最大フロック中の最小粒子個数である。

ところで、フロック形成の原因が乱流混合または沈降速度差による衝突合一であるとするとき、各群の反応は次の三つの形式に分類される。

(1) (I群) × (K群)

→ [K群] + [K+1群] (K=2～S-1; I=1～K-1)

(2) (I群) × (S群) → [S群]

(I=1～S-1)

(3) (K群) × (K群) → [K+1群]

(K=1～S-1)

また、破壊によってフロックは半分の大きさになるとすれば、*K*群フロックの破壊は次のように示される。

(4) (K群) → [K-1群] + [K群]

(K=2～S)

よって、*K*群フロックの個数*n<sub>K</sub>*についての速度式は次式で表わされる。

$$\begin{aligned} \frac{dn_K}{dt} = & \sum_{i=1}^{K-1} (A_{i,K}^{(1)} - AY_{i,K}^{(1)}) n_i n_K + \sum_{i=1}^{K-2} B_{i,K-i}^{(1)} n_i n_{K-i} - \sum_{i=K+1}^{S-1} BY_{i,K}^{(1)} n_i n_K \\ & [K=2 \sim S-1] \quad [K=3 \sim S] \quad [K=1 \sim S-2] \\ & - \sum_{i=1}^{K-1} (A_{i,K}^{(2)} - AY_{i,K}^{(2)}) n_i n_K - BY_{S,K}^{(2)} n_S n_K + A_{K-1,K-1}^{(3)} n_{K-1} n_{K-1} \\ & [K=S] \quad [K=1 \sim S-1] \quad [K=2 \sim S] \\ & - AY_{K,K}^{(3)} n_K n_K + C_{K+1}^{(4)} n_{K+1} + (D_K^{(4)} - DY_K^{(4)}) n_K \\ & [K=1 \sim S-1] \quad [K=1 \sim S-1] \quad [K=2 \sim S] \end{aligned} \quad (1)$$

ただし、A, A Y等の係数はフロク形成の原因・形態によって異なった形で与えられる。

一例として、前記(1)の反応について具体的に説明すると次のごとくである。いま、 $I = 2$ 、 $K = 3$ とすると、両群内の粒度分布を一樣と考えたときの反応は表2のようになる。すなわち、この反応によって消滅する  $I = 2$  群フロクのうち、 $(2 \times 2 + 3) / 8 / 2.5$  が  $K = 3$  群に取り込まれ、 $(2 \times 2 + 3 \times 3) / 8 / 2.5$  が  $K + 1 = 4$  群フロクに移行する。同様に  $K = 3$  群フロクについては  $13 / 8 / 5.5$ 、 $31 / 8 / 5.5$  がそれぞれ  $K = 3$ 、 $K + 1 = 4$  群フロクに取り込まれる。一方、この反応によって増加する  $K = 3$  群、 $K + 1 = 4$  群フロクはそれぞれ  $20 / 8 / 5.5$ 、 $44 / 8 / 11.5$  であり、このときの衝突径は前者について  $7 / 3$ 、 $13 / 3$  倍粒子径の和、後者について  $13 / 5$ 、 $31 / 5$  倍粒子径の和である。

よって、衝突径に関する部分と定係数部分を一括して  $F$  と表わすと、前記(1)の反応について  $I = 2$ 、 $K = 3$  の場合の表現は次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{dn_2}{dt} &= - \frac{7}{8 \times 2.5} F\left(\frac{7}{3}, \frac{13}{3}\right) n_2 n_3 - \frac{13}{8 \times 2.5} F\left(\frac{13}{5}, \frac{31}{5}\right) n_2 n_3 \\ \frac{dn_3}{dt} &= \frac{20}{8 \times 5.5} F\left(\frac{7}{3}, \frac{13}{3}\right) n_2 n_3 - \frac{13}{8 \times 5.5} F\left(\frac{7}{3}, \frac{13}{3}\right) n_2 n_3 - \frac{31}{8 \times 5.5} F\left(\frac{13}{5}, \frac{31}{5}\right) n_2 n_3 \\ \frac{dn_4}{dt} &= \frac{44}{8 \times 11.5} F\left(\frac{13}{5}, \frac{31}{5}\right) n_2 n_3 \end{aligned} \quad (2)$$

このとき、反応前後の個数保存則すなわち

$$\sum_{K=1}^S L_K n_K = \text{const} \quad \therefore \sum_{K=1}^S L_K \frac{dn_K}{dt} = 0 \quad (3)$$

が成立していることは容易に確認される。なお、式(2)の右辺の係数部すなわち  $B_{2,3}^{(1)}$  を一般化して

$$B_{I,K+1}^{(1)} = \frac{T}{P \cdot L_K} F\left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}\right) \quad (K = 3 \sim S; I = 1 \sim K - 2)$$

とおき、その内容を詳細に示すと次のごとくである。

(a)  $2^{K-1} \leq s - 2^{I-1} + 1$  の場合：

$$\begin{aligned} P &= 2^{K+1-3}, T = 2^{I-1} (9 \cdot 2^{K+1-3} - 3 \cdot 2^{K-2} + 7 \cdot 2^{2I-3} - 9 \cdot 2^{I-2} + 1) / 3, \\ x &= 2^{I-2} (7 \cdot 2^{2I-1} - 9 \cdot 2^{I-1} + 1) / 3, y = 2^{I-2} (9 \cdot 2^{K+I-2} - 3 \cdot 2^{K-1} - 7 \cdot 2^{2I-2} + 1) / 3, \\ r &= 2^{I-2} (3 \cdot 2^{I-1} - 1) \end{aligned}$$

(b)  $s - 2^{I-1} \geq 2^{K-1} \geq s - 2^I + 2$  の場合：

$$\begin{aligned} P &= 2^{I-2} (2^{K-1} - 2^{I-1} + 1) + (s - 2^{K-1} - 2^{I-1} + 1) (3 \cdot 2^{I-1} + 2^{K-1} - s - 2) / 2, \\ T &= 2^{2I-3} (2^K + 2^{I-1} - 1) + (s - 2^{K-1} - 2^{I-1} + 1) \{ 3 \cdot 2^{I-1} (2^{K-1} + 2^{I-1} - 1) \\ &\quad + (s - 2^{K-1} - 2^{I-1} - 2) (2^{I-1} - 2^{K-2} - s) \} / 3, \\ x &= 2^{I-2} (7 \cdot 2^{2I-1} - 9 \cdot 2^{I-1} + 1) / 3 - (2^{K-1} + 2^I - s - 2) (2^{K-1} + 2^I - s - 1) (s - 2^{K-1} + 2^{I+1}) / 6, \\ y &= 2^{I-2} (9 \cdot 2^{K+I-2} - 3 \cdot 2^{K-1} - 7 \cdot 2^{2I-2} + 1) / 3 - (2^{K-1} + 2^I - s - 2) (2^{K-1} + 2^I - s - 1) (2^K - 2^I + s) / 6, \\ r &= 2^{2I-2} + (s - 2^{K-1} - 2^{I-1} + 1) (3 \cdot 2^{I-1} + 2^{K-1} - s - 2) / 2, \end{aligned}$$

(c)  $2^{K-1} \geq s - 2^{I-1} + 1$  の場合：

$$\begin{aligned} P &= 2^{I-2} (2s - 2^{K-1} - 3 \cdot 2^{I-1} + 3), T = 2^{I-2} (s - 2^{K-1} + 1) (s + 2^{K-1}), \\ x &= 2^{I-2} (s - 2^{K-1} + 1) (3 \cdot 2^{I-1} - 1), y = 2^{I-2} (s - 2^{K-1} + 1) (s + 2^{K-1} - 3 \cdot 2^{I-1} + 1), \\ r &= 2^{I-1} (s - 2^{K-1} + 1) \end{aligned}$$

### 3 乱流フロクキュレーションへの適用

3・1 フロク形成速度式 粘性小領域における乱流渦が衝突と破壊の原因であるとする、回分式単一フロクキュレーター内における1倍粒子の消長は次のように書かれる。

$$\begin{aligned} \frac{dn_i}{dt} = & \frac{3}{2} \pi \beta \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu}} \left[ \frac{1}{2} d_1^3 \sum_{j=1}^{i-1} \{ j^f + (i-j)^f \}^3 n_i n_{i-j} - n_i \sum_{j=i}^s \{ j^f + i^f \}^3 n_j \right] \\ & + \frac{c \epsilon_0}{\mu h} \left[ 2 \{ (2i)^{2f} - 1 \} n_{2i} + \{ (2i-1)^{2f} - 1 \} n_{2i-1} + \{ (2i+1)^{2f} - 1 \} n_{2i+1} \right. \\ & \left. - (i^{2f} - 1) n_i \right] \quad (i=1 \sim s) \end{aligned} \quad (4)$$

ここに、 $n_i$  は  $i$  倍粒子の単位体積あたり個数 ( $1/\text{cm}^3$ )、 $\epsilon_0$  は有効かく拌エネルギー ( $\text{erg}/\text{cm}^3/\text{秒}$ )、 $\mu$  は粘性係数 ( $\text{g}/\text{cm}/\text{秒}$ )、 $d_1$  は最小粒子の直径 ( $\text{cm}$ )、 $\beta$  は衝突合一係数 (—) であり、 $f$  はフロックの有効密度を  $\rho_{e,1} = a d_1^k$  と表現したときの指数  $k$  を用いて  $f = 1/(3-k)$  である。また、フロックの破壊はフロックの両端に作用する動圧強度差  $\Delta p \propto (\epsilon_0/\mu) d^2$  に関係するとして

$$(1 \text{ 倍粒子の減少速度}) = \frac{c \epsilon_0}{\mu} \left( \frac{d_1^2 - d_i^2}{d_i^2 - d_1^2} \right) = \frac{c \epsilon_0}{\mu} \left( \frac{i^{2f} - 1}{s^{2f} - 1} \right) = \frac{c \epsilon_0}{\mu h} (i^{2f} - 1)$$

の形を採用し、かつ破壊によってフロックは半分の大きさになると仮定している。

式(4)を  $K$  群フロックについて書きなおすと前出の式(1)のようになり、これを簡略形で表現すると

$$\frac{dN_K}{dm} = (\text{衝突合一による増減項}) + \frac{c G'}{b d_1^3 n_0^2} (\text{破壊による増減項}) \quad (K=1 \sim S) \quad (5)$$

となる。ただし、 $n_0$  は全粒子を最小粒子に換算したときの単位体積あたり総個数 ( $1/\text{cm}^3$ ) であり、また

$$m = b G' d_1^3 n_0 t, \quad G = \sqrt{\epsilon_0/\mu}, \quad b = (3/2) \pi \beta, \quad N_K = n_K / n_0$$

とされている。式(5)中の二つの実験定数  $b$ 、 $c$  は以下に述べるように、定常および非定常状態における数値計算結果と実験結果を照合することによって求められる。

### 3・2 定常解 定常状態では $dN_K/dm = 0$ ( $K=1 \sim S$ )

となるべきことから、式(5)をゼロとおいた  $S$  元の連立 2 次方程式を解くことによって各  $N_K$  が求まる。ただし、実際の計算においては式(5)の右辺をニュートン法によって 1 次化し、1 次化の誤差が許容値以内におさまるまで修正計算を繰り返す必要がある。また、このときの連立方程式には 1 本だけ独立でないものが含まれているので、いずれか 1 本を除去し、その代わりに式(3)を用いて解かねばならない。

いま、 $s = 8.3886 \times 10^6$  ( $S=23$ ) である表 3 の実験 A に対し、 $c/b$  の値を変化させて計算した結果は表 4 のごとくであり、 $c/b \doteq 3.5 \times 10^5 / (9.24 \times 10^4) = 3.8$  と得られる。同様にして実験 B については  $c/b \doteq 4.3$  であった。

3・3 非定常解 定常解から得られた  $c/b$  の値を用い、式(5)の  $S$  元連立常微分方程式をルンゲ・クッタ・ギル法で解くことによって非定常解が求まる。このときの解が実験値と合うように無次元化時間軸  $m$  を調整することにより、定数  $b$  が求まる。

図 1、3 の実験結果に対応する数値計算結果はそれぞれ図 2、4 に示すごとくであり、実験 A については  $b = m/G' d_1^3 n_0 = 0.27$ 、実験 B については  $b = 0.070$  となる。したがって、実験 A、B に対する  $c$  の値はそれぞれ  $c = 1.03$ 、 $0.30$  と得られる。

## 4 凝集沈降への適用

4・1 基礎式 凝集沈降におけるフロック形成の原因を沈降速度差による衝突合一であるととし、また沈降がストークス領域で行なわれるとすると、沈降タンクの水面より深さ  $z$  における  $i$  倍粒子の個数収支

表3 実験条件

| 項 目                                                | 実験 A                 | 実験 B                 |
|----------------------------------------------------|----------------------|----------------------|
| カオリン注入率 ( $\text{mg}/\ell$ )                       | 40                   | 60                   |
| 急速かく拌時間 (分)                                        | 5                    | 1                    |
| 緩速かく拌回転数 (rpm)                                     | 6.5                  | 8.0                  |
| $\epsilon_0$ ( $\text{erg}/\text{cm}^3/\text{秒}$ ) | $9.2 \times 10^{-2}$ | $1.9 \times 10^{-1}$ |
| $G' = \sqrt{\epsilon_0/\mu}$ ( $1/\text{秒}$ )      | 2.66                 | 3.68                 |
| $n_0$ ( $1/\text{cm}^3$ )                          | $2.87 \times 10^7$   | $4.32 \times 10^7$   |

(注) ALT 比  $= 0.04$ ,  $\alpha = 2.835 \times 10^{-4}$ ,  $k = 1.3$

表4 定常状態における質量百分率(%)

| K  | 実験値  | $(c/b) \cdot (G'/d_1^3 n_0)$ |                   |                   |                   |                   |
|----|------|------------------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
|    |      | $3.0 \times 10^5$            | $3.4 \times 10^5$ | $3.5 \times 10^5$ | $3.6 \times 10^5$ | $4.0 \times 10^5$ |
| 23 | 27.6 | 33.43                        | 28.43             | 27.25             | 26.10             | 21.77             |
| 22 | 35.6 | 32.50                        | 31.61             | 31.31             | 30.97             | 29.33             |
| 21 | 23.4 | 20.78                        | 22.81             | 23.26             | 23.69             | 25.13             |
| 20 | 10.2 | 9.47                         | 11.65             | 12.20             | 12.76             | 14.98             |
| 19 | 2.6  | 3.06                         | 4.26              | 4.59              | 4.94              | 6.44              |
| 18 | 0.6  | 0.66                         | 1.06              | 1.18              | 1.31              | 1.93              |
| 17 | 0.0  | 0.08                         | 0.16              | 0.19              | 0.22              | 0.37              |
| 16 | 0.0  | 0.06                         | 0.01              | 0.02              | 0.02              | 0.04              |

式は

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} (W_i n_i) = R_i \quad (i = 1 \sim s) \quad (6)$$

と書かれる。ここで、沈降速度  $W_i$  ( $\text{cm}/\text{分}$ ) と反応速度  $R_i$  ( $1/\text{cm}^3/\text{分}$ ) は

$$W_i = \frac{1}{18} \frac{g \rho_{s,i}}{\mu} d_i^2 = \frac{1}{18} \frac{g a}{\mu} d_i' i^{f'} \quad (7)$$

$$R_i = \gamma \frac{\pi}{4} d_i^2 \left[ \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{i-1} \{j^f + (i-j)^f\}^2 |W_i - W_{i-j}| n_i n_{i-j} \right. \\ \left. - n_i \sum_{j=1}^{s-i} \{i^f + j^f\}^2 |W_i - W_j| n_j \right] \quad (8)$$

であり、また  $\gamma$  は衝突合一係数 ( $-$ )、 $1 = 2 - k$  である。

式(6)を  $K$  群基準に書きかえると

$$\frac{\partial n_K}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} (W_K n_K) = R_K \quad (K = 1 \sim S) \quad (9)$$

となり、ここで右辺は式(1)中で係数  $A$ 、 $AY$ 、 $B$ 、 $BY$  を有する項で表現される。

4・2 数値計算法 式(9)をラックス・ウェンドロフ法によって差分化すると、深さ  $p$  ( $p = 0, \Delta z, 2\Delta z, \dots, MZ \cdot \Delta z$ )、時刻  $q+1$  ( $q = 0, \Delta t, 2\Delta t, \dots$ ) における  $K$  群フロクの個数  $n_{K,p}^{q+1}$  は

$$n_{K,p}^{q+1} = R_K \Delta t + \frac{W_K}{2} \frac{\Delta t}{\Delta z} (1 + W_K \frac{\Delta t}{\Delta z}) n_{K,p-1}^q \\ + \{1 - W_K^2 (\frac{\Delta t}{\Delta z})\} n_{K,p}^q \\ + \frac{W_K}{2} \frac{\Delta t}{\Delta z} (W_K \frac{\Delta t}{\Delta z} - 1) n_{K,p+1}^q \quad (K = 1 \sim S) \quad (10)$$

となる。初期条件と下部境界条件は次のとおりとする。

$$\text{初期条件: } n_{K,p}^0 = n_{K0,p} \quad (11)$$

$$\text{下部境界条件: } n_{K,MZ}^q = 1.5 n_{K,MZ-1}^q - 0.5 n_{K,MZ-2}^q \quad (q = \Delta t, 2\Delta t, \dots) \quad (12)$$

ここに、 $n_{K0,p}$  は深さ  $p$  における  $K$  群フロクの初期個数 ( $1/\text{cm}^3$ ) である。また、深さ  $p$  の上部にフロクが存在しないときの値は次式によって求める。

$$n_{K,p}^{q+1} = R_K \Delta t + \{1 - \frac{1}{2} W_K^2 (\frac{\Delta t}{\Delta z})^2\} n_{K,p}^q \\ - \frac{W_K}{2} \frac{\Delta t}{\Delta z} (1 - W_K \frac{\Delta t}{\Delta z}) n_{K,p+1}^q \quad (13)$$

4・3 計算結果 いま、表3の実験Aについて得ら

れた定常解を出発値とし、これが深さ  $240 \text{ cm}$  のタンク全層に一様に分布しているときの凝集沈降過程を計算してみる。ただし、きざみ幅は  $\Delta t = 0.01$  分、 $\Delta z = 10$  とし、また  $d_i = 0.01 \text{ cm}$ 、 $s = 2.040$ 、 $S = 11$  とする。

図5は衝突合一係数  $\gamma = 0.1$  とおいた場合の各深さにおける最小粒子換算フロク個数比 (初期値に対す

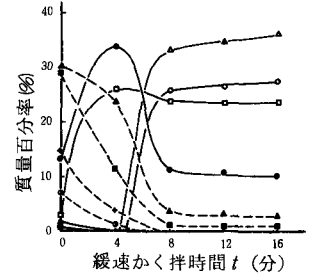


図1 実験値 (実験A)

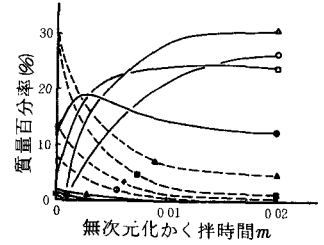


図2 計算値 (実験A)

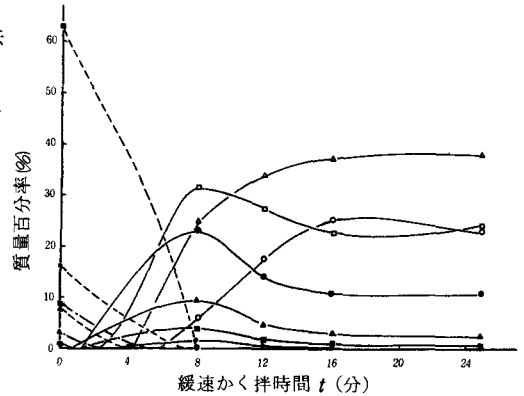


図3 実験値 (実験B)

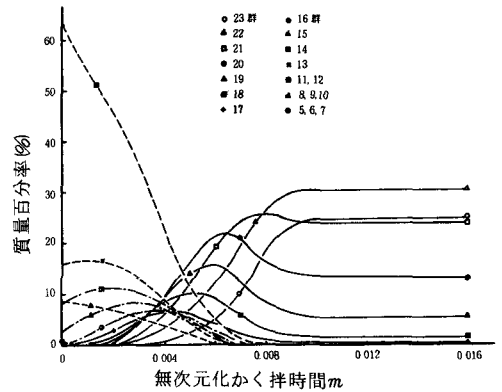


図4 計算値 (実験B)

る比)の時間的変化である。また、図6は $r = 0.0$ すなわち非凝集性フロックについての結果である。両図の比較により、凝集性と非凝集性とは、タンク内個数分布に顕著な差異が認められる。

表5は $r = 0.1$ の場合について深さ $z = 200\text{ cm}$ の点におけるグループ別個数フラックスである。これによると、凝集沈降における除去パターンの推移は次の四つに分類できよう。(1)初期粒径分布が支配的な時期( $t = 1$ 分)、(2)大粒径側のフラックスが増大する時期( $t = 2$ 分)、(3)全粒径範囲にわたってフラックスが減少する時期( $t = 8$ 分)、(4)上部に取り残された小フロックが沈降除去される時期( $t = 20$ 分)。

図7はタンク深さが100、200 cmの点における除去率である。タンクが深いほどフロック形成効果が大きくなり、また沈降時間を十分に長くすると非凝集性粒子の場合の除去率に接近することがわかる。

### 5 あとがき

粒子構成を2進法的にグループ分けすることによってフロック形成過程の数値計算を可能にし、乱流フロッキュレーションおよび凝集沈降について典型的な時間的変化パターンを示すことができた。このような計算によるアプローチは、処理装置の設計に直接的に結びつくとともに、衝突合一係数、かく拌強度、最大成長径、フロック強度等フロック形成現象を支配する因子を解明する上でも役立つと考える。

本研究の実験・解析には松尾英介氏(現久保田鉄工)のご協力を頂いた。また数値計算には北海道大学大型計算機センターのFACOM 230-75を利用した。ここに記して謝意を表する。

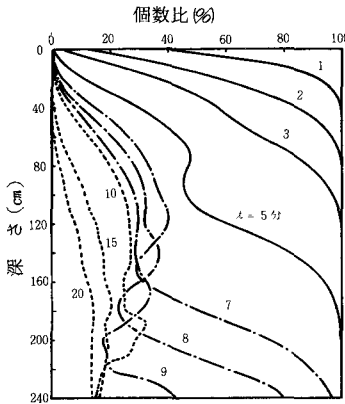


図5 タンク内個数分布 ( $r = 0.1$ )

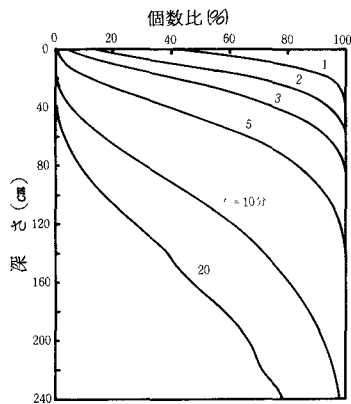


図6 タンク内個数分布 ( $r = 0.0$ )

表5 グループ別個数フラックス ( $1/\text{cm}^3/\text{分}$ )

| K  | t = 0分   | t = 1分   | t = 2分   | t = 5分   | t = 8分   | t = 20分  |
|----|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 1  | 5 70 E-2 | 4 71 E-2 | 3 66 E-2 | 1 15 E-2 | 3 53 E-3 | 2 78 E-3 |
| 2  | 2 59 E 0 | 2 14 E-1 | 1 66 E 0 | 5 26 E-1 | 1 64 E-1 | 1 48 E-1 |
| 3  | 4 79 E 1 | 3 95 E 1 | 3 07 E 1 | 9 78 E 0 | 3 09 E 0 | 3 35 E 0 |
| 4  | 4 26 E 2 | 3 52 E 3 | 2 74 E 2 | 8 77 E 1 | 2 83 E 1 | 3 91 E 0 |
| 5  | 2 06 E 3 | 1 71 E 3 | 1 33 E 3 | 4 31 E 2 | 1 43 E 2 | 2 78 E 2 |
| 6  | 6 09 E 3 | 5 09 E 3 | 4 00 E 3 | 1 31 E 3 | 4 56 E 2 | 1 45 E 3 |
| 7  | 1 22 E 4 | 1 03 E 4 | 8 13 E 3 | 2 75 E 3 | 1 03 E 3 | 4 41 E 3 |
| 8  | 1 75 E 4 | 1 48 E 4 | 1 19 E 4 | 4 28 E 3 | 1 84 E 3 | 6 39 E 2 |
| 9  | 1 75 E 4 | 1 58 E 4 | 1 33 E 4 | 5 78 E 3 | 3 22 E 3 | 4 06 E 1 |
| 10 | 1 12 E 4 | 1 36 E 4 | 1 34 E 4 | 8 33 E 3 | 6 22 E 3 | 5 12 E 1 |
| 11 | 0 0      | 1 92 E 3 | 4 48 E 4 | 1 17 E 5 | 3 47 E 4 | 0 0      |

(注1) 個数フラックスは最小粒子に換算した値

(注2)  $z = 200\text{ cm}$ ,  $r = 0.1$

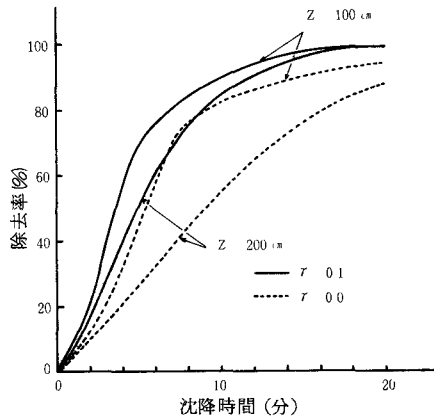


図7 除 去 率