(26) 下水道整備計画に関するシステム論的研究 IX
——とくに計画人口の決定について——

㈱日本水道コンサルタント　堤　　武
萩原良巳
○小泉　明
中川芳一
高橋邦夫

1. はじめに

地域における下水道整備計画の策定にあたって、水道整備計画はその計画入力となるものであると考えられ、両者を切り離した計画の策定は水環境という観点に立てば無意味なものであろう。いま、上下水道整備計画を策定する場合、人口は計画のフレームとして極めて重要な意味を持つことが多く、人口指標を計画のフレームとするときの人口の取り扱いについては多くの研究がある。

従来の地域人口の予測法は、過去の時系列的人口実績値への曲線のあてはめや人口学的方程式を基礎にするものなど、種々の予測法が提案されている。ここで、将来の地域人口がいかなる方法で算定されるにしても、決定論的な値ではなく、確率論的な値、すなわち、確率変数の期待値と見なしうる。しかし、計画策定にあたって、この確率論的な値である予測値を何ら評価することなく計画目標値として使用する場合が多く見受けられる。予測値と計画目標値とは、本来異なる概念であり、計画目標値は計画策定者の評価を通して決定されるものである。すなわち、予測は計画プロセス・システムの入力であり、入力情報として意味をもたすためには、予測値を計画目標値にするための評価が伴なわなければならない。

したがって、本稿では、上下水道施設を建設するという立場のもとで、計画人口決定の問題を単なる予測ではなく、計画策定者（計画主体）の意志決定問題におきかえ、計画人口決定に関する考察を行なう。すなわち、上下水道の計画対象地域における将来人口の期待値とその偏差がわかっているとしたとき、施設建設費などを評価して、将来人口の計画目標値を決定する方法を提案する。

以上のことから、2で計画人口決定のための評価モデルとして、不完全情報下におけるゲーム論的モデルを提示するとともに、この解法を明らかにする。そして、3.ではこのモデルを上水道整備計画ならびに下水道整備計画における計画人口決定の具体例を示すこととする。

なお、本章でいう不完全情報とは、将来人口予測の期待値と偏差が既知でその分布形が未知という場合をさすものとする。

2. モデルの定式化とアルゴリズム[1)2)]

ここでは、計画人口決定モデルを、不完全情報下における意志決定問題として取扱い、ゲーム論的アプローチ[2)]を提案する。すなわち、将来人口予測の期待値（$\bar{y}$）と偏差（σ）が求められたとして、分布形が未知の場合の計画人口決定問題のモデル化を、ゲーム論的発想のもとで行なう。

このような問題の解決のためのモデルとしては、通常、機会損失型とペナルティ型の2種類の考え方ができる。前者は、計画主体が決定する計画人口を超える将来人口の実現によって生ずる損失（たとえば、もしも決定した計画人口よりも大きい計画人口を採用して施設を計画し、建設していたならば、それだけ余分の利得を得ることができたにもかかわらず、それをしなかったために失なったと思われる利得、つまり損失）を考慮したモデルである。また、後者は、計画人口を超える将来人口が実現する確率に対してペナルティ（たとえば、人間生活に不可欠な施設を計画主体が住民に提供できなかったことに対して支払う罰金）を課するものである。これらの考え方を数式で記述すれば、それぞれ

$$E\{C_1(x)\}=N(x)+L\int_x^{\infty}(y-x)f(y)dy \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1)$$

$$E\{C_2(x)\}=M(x)+K\int_x^{\infty} f(y)\,dy \quad \cdots\cdots (2)$$

となる。ここに、

x；計画人口，　$E\{C_1(x)\}$，$E\{C_2(x)\}$；総費用期待値，

$N(x)$，$M(x)$；計画人口を x としたときの実費用，

$L\int_x^{\infty}(y-x)f(y)\,dy$；計画人口を x としたときの機会損失，

$K\int_x^{\infty}f(y)dy$；計画人口を x としたときの罰金，

$f(y)$；将来人口予測の確率密度関数

である。なお、(1)式は経営的意味あいの強い式であり、(2)式は公共的意味あいの強い式である。

ここで、将来人口予測の分布形 $f(y)$ が未知であるため、計画主体にとって最悪の（つまり総費用期待値を最大にする）分布形が出現すると考えるのが妥当であり、この最悪の分布形に対して、計画主体は最良の（総費用期待値を最小にする）計画人口 x^* を決定するものと考えると、総費用期待値最小という意味での最適計画人口決定モデルは、それぞれ

$$\min_x \max_f E\{C_1(x)\} \cdots (3) \qquad \min_x \max_f E\{C_2(x)\} \cdots (4)$$

を与える計画人口 x^* を決定する問題と定式化できる。したがって(3)、(4)式は、自然と計画主体の２人ゲームを構成する式ともいえる。

計画主体の立場によって、機会損失型の(1)式、罰金型の(2)式を使い分ける必要があるが、以下ではとりあえず両式の解法を明らかにすることとする。

(1)機会損失型の場合

まず、(1)式の x を

$$x=\bar{y}+k\sigma \quad ,\ k>0 \quad \cdots\cdots (5)$$

ただし、$\bar{y}$；将来人口予測の期待値、σ；将来人口予測の偏差、である。

とおいて、(1)式を書き直せば

$$E\{C_1(x)\}=N(x)+L\int_{\bar{y}+k\sigma}^{\infty}(y-\bar{y}-k\sigma)f(y)dy$$

$$=N(x)+L\{I_1-(\bar{y}+k\sigma)I_2\} \quad \cdots\cdots (6)$$

$$I_1=\int_{\bar{y}+k\sigma}^{\infty} yf(y)\,dy \ \cdots\cdots (7) \qquad I_2=\int_{\bar{y}+k\sigma}^{\infty} f(y)dy \ \cdots\cdots (8)$$

となる。ここで、I_1、I_2 は、

$$I_1=\int_{\bar{y}+k\sigma}^{\bar{y}+(k+1)\sigma} yf(y)dy+\int_{\bar{y}+(k+1)\sigma}^{\bar{y}+(k+2)\sigma} yf(y)dy+\cdots \leqq (\bar{y}+k\sigma)P\{y-\bar{y}\geqq k\sigma\}+\sigma\sum_{i=0}^{\infty}P\{y-\bar{y}\geqq(k+i)\sigma\} \cdots (9)$$

$$I_2=P\{y-\bar{y}\geqq k\sigma\} \quad \cdots\cdots (10)$$

と変形されるから、結局(6)式は

$$E\{C_1(x)\}\leqq N(x)+L\cdot\sigma\cdot\sum_{i=0}^{\infty}P\{y-\bar{y}\geqq(k+i)\sigma\} \quad \cdots\cdots (11)$$

と表わされ、この(11)式の右辺の確率に対しチェビシェフの不等式を用いると、(11)式は

$$E\{C_1(x)\}\leqq N(x)+L\sigma\sum_{i=0}^{\infty}(k+i)^{-2} \quad \cdots\cdots (12)$$

となる。本稿の場合、$f(y)$ の分布形が未知であると考えた。したがって

$$\max_f E\{C_1(x)\}=N(x)+L\sigma\sum_{i=0}^{\infty}(k+i)^{-2} \quad \cdots\cdots (13)$$

となり、$\min_x \max_f E\{C_1(x)\}$ を与える将来計画人口は、(13)式が k に関して下に凸であるから、k で微分して０とおき、これをみたす k を(5)式に代入することによって得られる。

(2)ペナルティ型の場合

まず(2)式に(5)式を代入して書きかえれば、

$$E\{C_2(x)\}=M(x)+K\int_{\bar{y}+k\sigma}^{\infty} f(y)\,dy \quad \cdots\cdots (14)$$

となる。チェビシェフの不等式で $i=0$ の場合を用いると

$$E\{C_2(x)\} \leqq M(x) + K/k^2,\ k>0 \quad \cdots\cdots (15)$$

となり、したがって(1)と同様の考え方より、

$$\max_f E\{C_2(x)\} = M(x) + K/k^2,\ k>0 \quad \cdots\cdots (16)$$

を得る。これより(2)式の意味での最適な計画人口は、(16)式が k に関して下に凸であることから、これを k で微分して0とおき、これを満たす k を(5)式に代入することによって得られる。

3. 上下水道整備計画へのモデルの適用 [3) 4) 5)]

(1)上水道計画給水人口の決定

ここでは、2.で述べたモデルを適用して、水道施設規模の拡張計画における給水人口決定の問題を考察する。いま、水道単価が a（円/m^3）とし、計画一人一日平均給水量を q（m^3/人日）とする。そして計画人口が一人増加することによる拡張工事費を c（円/人日）と考える。ここで c は規模の経済性より、計画人口 x の関数と考えられる。また、実際には、拡張前の現有施設の状況により、施設の拡張が新設の場合と等しい工事を必要とすることもあれば、施設の拡張を見越して、維持管理施設、薬品注入施設などにすでに余裕をもたせている場合もある。さらにパイプ関係の工事についても同様のことがいえる。これらのことより、c は拡張計画を実施する場所によって大きく異なると考えられるため、c をパラメータとして取り扱うこととする。

総費用の期待値は、拡張工事費と機会損失費の和から水道料金の増収を引いたものと考えられ、計画人口を x 人とした場合、総費用期待値は、

$$E\{C_1(x)\} = (x-\alpha)c + aq\int_x^\infty (y-x) f(y)dy - \{q\cdot a(x-\alpha) + q(a-a_0)\cdot\alpha\} \cdots (17)$$

α；既存計画最後の年度の人口（人）、　a_0；水道施設拡張前の水道料金（円/m^3）

と表わされる。ここで、(17)式の水道料金の増収を示す右辺第3項の $q(a-a_0)\alpha$ は、x に関係しない定数項であるので、以下の最適計画人口 x^* を求めるモデルにおいて何ら本質的な差異を与えないから、これを無視して、(17)式を次式のように書き改めて、最適計画人口 x^* を求める場合の評価式とする。

$$E\{C_1(x)\} = (x-\alpha)c + aq\int_x^\infty (y-x) f(y)\,dy - aq(x-\alpha) \quad \cdots\cdots (18)$$

ここで、$c-aq=b_1$、$aq=b_2$ とおき(18)式が(1)式と同じ形式の評価関数式であることに注目すれば、(18)式は、

$$\max_f E\{C_1(x)\} = b_1(\overline{y}-\alpha) + b_1 k\sigma + b_2\sigma\sum_{i=0}^{\infty}(k+i)^{-2},\ k>0 \quad \cdots\cdots (19)$$

となり、(19)式を k について微分すればよいのであるが、右辺の級数は簡単に求められない。そこで以下では近似計算により k を求める

$1/(k+i)^2$ は $k>0$、$i \geqq 0$ であるから、和の各項は単調減少の数列をつくる。この性質を利用して、和のはじめの数項で近似する。たとえば第3項までとると、求める k は、

$$b_1\sigma - 2b_2\sigma(k^{-3} + (k+1)^{-3} + (k+2)^{-3}) = 0 \quad \cdots\cdots (20)$$

という3次方程式の根となる。この正の実数根を求めて(5)式に代入すれば、最適計画人口 x^* を求めることができる。さらに近似を高めるためには、オイラー・マクローリンの公式を(19)式の右辺第3項に適用すればよい。この結果、$\sum_{i=0}^{\infty}(k+i)^{-2}$ の第3項までの近似式は（$1/k + 1/2k^2 + 1/6k^3$）と表わされる。これを(19)式に代入し、k について微分して0とおけば、

$$b_1k^4 - b_2k^2 - b_2k - b_2/2 = 0 \quad \cdots\cdots (21)$$

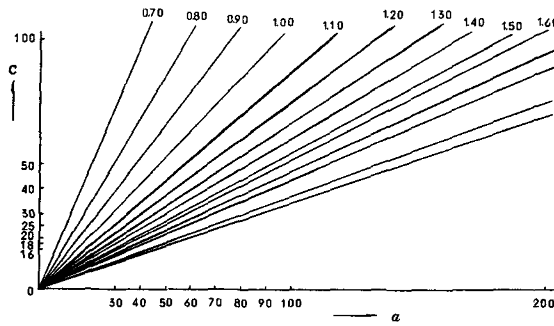
を得る。こうして(21)式の正の実数根を求めて（その根を k^* とする）(5)式に代入すれば、最適計画人口 x^* を求めることができる。

ここで、$c=18$円/人、$a=30$円/m^3、$q=0.5m^3$/人・日、$\alpha=214{,}158$人、将来人口予測の期待値が $\overline{y}=254{,}980$人、その偏差が $\sigma=11{,}804$人と与えられている場合を例にとって最適計画人口 x^* を求めてみよう。この場合、$b_1=3$、$b_2=15$となるので(21)式は、　$k^4 - 5k^3 - 5k - 5/2 = 0$ …… (22)

となる。いま、(22)式のkがあまり大きな値をとることは現実的でないため、ここでは$k \leqq 3$の範囲の計画人口を考える。また、(22)式の左辺を$f(k)$とすれば、この根を求めることと$|f(k)|$の最小点を求めることとは同等であり、kの値をいくつか代入して$|f(k)|$を計算したところ、最小点が$2 < k < 3$にあることが推測できた。そこで黄金分割法[6]によって分割を繰り返した結果、(22)式の根として$k^* = 2.68$が得られ、これを(5)式に代入することにより、最適計画人口$x^* = 286{,}615$人を得る。

図．1　k^*の分布

$q = 0.3$

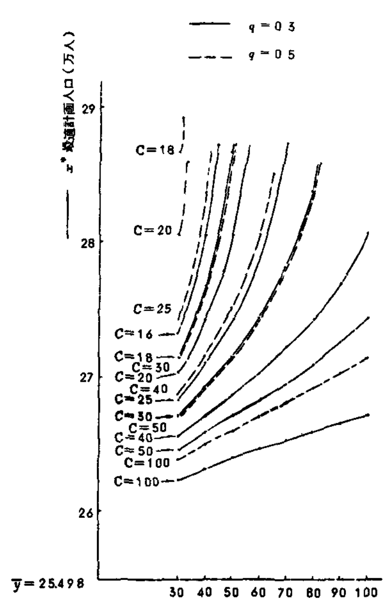


つぎに、パラメータによる解の変化を考察してみる、(21)式の左辺を$f(k)$とし、$b_2\,(=a\cdot q)$がつねに正であることに注目すれば$f(0) = -b_2/2 < 0$となる。したがって、$b_1\,(=c-aq)$が負であれば$f(k)=0$が根をもたない場合があるので、$b_1 > 0$という条件が必要である。また、$b_1 > 0$ならば、$f(0) < 0$なることより$f(k) = 0$は必らず正の実根をもつ。このとき、(21)式の正の実根が3以下であるための条件を求めると、$b_1 > 0.15432\,b_2$が得られる。したがって、

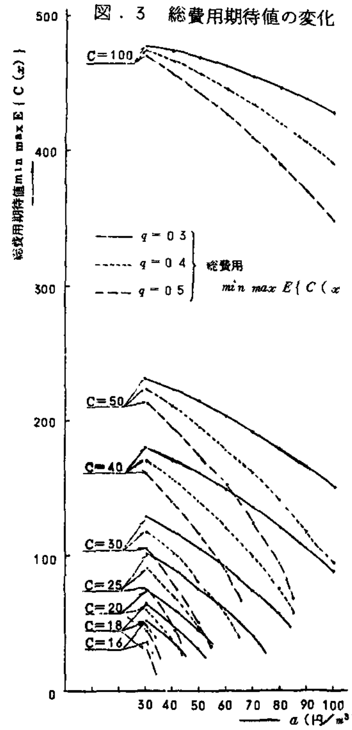
$$c > aq\ ,\ c \geqq 1.15432\ aq \quad \cdots (23)$$

が、パラメーターc，a，qを動かすときの制約となる。ここで(23)式の意味を評価関数式(18)式と対応ずけて考察すると、$c < aq$またはcとaqとの差が小さい場合は、拡張工事費$c\,(x-\alpha)$は、全て(またはほとんど)水道料金$aq\,(x-\alpha)$でまかなえることとなり、、それならば、機会損失費がなるべく小さくなるように計画人口xを大きくすればよいという結果になる。それゆえ、a，q，cをパラメータとして種々の値を採らせて、最適計画人口x^*、総費用期待値$\{C_1(x)\}$等の変化を検討する場合、上述の制約(23)式をみたすa．q，cについてのみ計算を行なうこととする。

図．2　最適計画人口x^*の変化



図．3　総費用期待値の変化



そこで、パラメーターq，a，cをそれぞれ、3，9，8通りに動かして(23)式の制約をみたすa．q，cについての計算を行なった結果、図.1〜図.3を得た。図.1にk^*のc，aに対する分布を$q = 0.3$の場合について示す。この図より、cおよびa，qが決まればk^*をただちに読みとれ、これを(5)式に代入することにより最適計画人口x^*を求めることができる。図.2に上述のようにして計算した最適計画人口x^*のパラメータq．a．cに対する変化を示し、図.3に総費用期待値のq，a，cに対する変化を示す。これらの図より、たとえば$q = 0.5$、$c = 50$、$a = 70$のとき$x^* = 27.81$万人となり、総費用期待値は123万円/日となる。また図.2よりx^*は、q，aの増加につれて級数的に増加し、cの増加につれて双曲線的に減少す

ることがわかる。またx^*のc，a，qに対する変化率は、$c=1.154a\cdot q$付近で激しくなることがわかる。

(2)下水道計画取入れ人口の決定 [7) 8) 9)]

ここでは、下水処理場の建設規模を決定するための計画取入れ人口の決定問題を考察する。下水処理場の建設費用関数は日平均処理水量の関数で、αQ^{β}（Q；日平均給水量）の形で記述されることが知られ、過去の実績では$\alpha=0.49$、$\beta=0.79$という数値を得ている。[8)]

つぎに、下水道施設はその衛生的意義ならびに河川汚濁防止という目的を有しているため、施設整備の遅れがただちに環境問題、たとえば水洗化できない不満や河川水質悪化などに結びつき、施設が不足したための機会損失というよりは、生活の不快適さや河川水質悪化が問題となる。このため、評価関数としては、(2)式で示されるペテルティ型を採用することとする。(2)式は次の形式で表わされる。

$$E\{C_2(x)\}=0.49(qx)^{0.79}+K\int_x^{\infty}f(y)dy \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (24)$$

q；処理水原単位（m^3/人日）、x；計画人口（人）、$0.49(qx)^{0.79}$；処理場建設費用（10^6円）

ここで、(5)式および(16)式により(24)式は

$$\max_f E\{C_2(x)\}=0.49\{q(\bar{y}+k\sigma)\}^{0.79}+K/k^2,\ k>0 \quad \cdots\cdots\cdots (25)$$

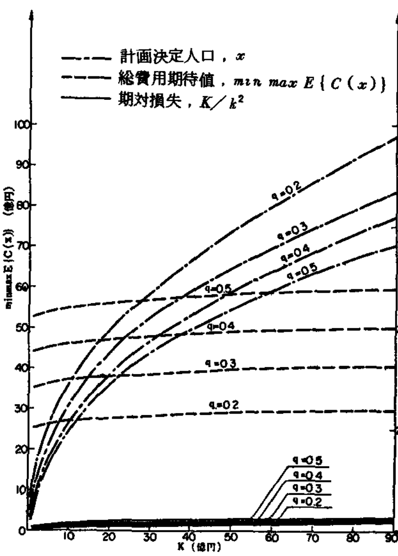
となり、これをkについて微分し0とおくと

$$0.3871\,q^{0.79}\sigma(\bar{y}+k\sigma)^{-0.21}-2K/k^3=0,\ k>0 \cdots (26)$$

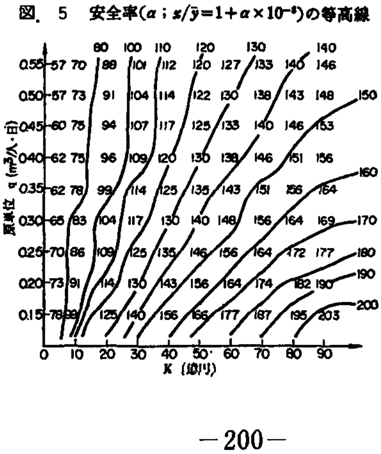
となり、この正の実数根をk^*として(5)式に代入すれば、最適計画人口x^*を求めることができる。ただし、この場合のk^*を求めるために、増分を0.01として直接法により$0<k\leqq3$までkを動かして(26)式が0となる点を探索する。なおペナルティKは、(24)式に示すように、計画主体の施設能力の超過に対する責任意識あるいは、施設を受益できない住民の不満の経済評価を示し、今のところ具体的に計測できない。

そこで、Kをパラメータとして考え、〔0，90〕（単位；億円）の範囲で動力し、x^*とKの関数関係を求め、Kの意味を考察することとする。まず、$\bar{y}=254{,}980$人、$\sigma=11{,}804$、$0<k\leqq3$、下水道における原単位の幅として、$0.15<q<0.55$(m^3/人日）を考え、Kとqをパラメータとしたときの最適計画人口x^*、総費用期待値ならびにペナルティKによる期待損失を図示すれば図.4を得る。この図より、たとえば$K=50$億円、$q=0.5\,m^3$/人日のとき、総費用期待値は57.9億円、Kによる期待損失は2.3億円、事業費は55.6億円、そして最適計画人口x^*は271,864人となる。また$x^*/\bar{y}$を安全率と定義すれば、1.122を得、$\bar{y}$に対する余裕取入汚水量（$x^*-\bar{y}$）qは、14,810m^3/日である。いまかりに、将来人口が$\bar{y}$のまわりに正規分布すると仮定すれば、処理施設の超過に対する危険確率は7.6%で小さい。図.5ならびに

図．4　処理場建設費用のみを考慮した時



図．5　安全率(α；$x/\bar{y}=1+\alpha\times10^{-3}$)の等高線



図．6　余裕取入れ負荷(β；$(x-\bar{y})\times q\times10$)の等高線

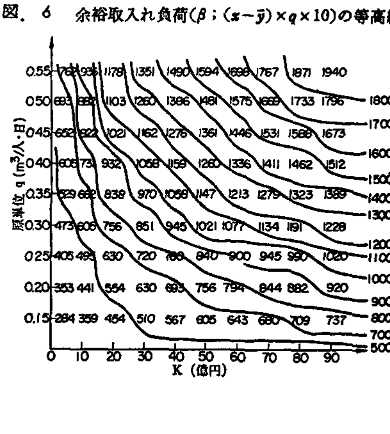
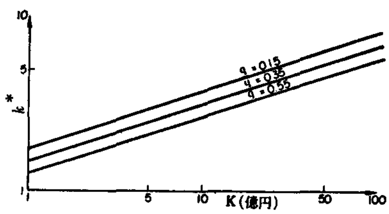


図.6は、ペナルティKを横軸に、原単位qを縦軸にとったときの安全率ならびに$\bar{y}$に対する余裕取入れ汚水量の等高線を示したものである。これによると、一定のペナルティKに対して原単位qが小さいほど計画人口x^*は大きく見積り、余裕取入れ汚水量は小さくすることが、(24)式に従うかぎり好ましいと判断できる。

図. 7　q, k^*, Kの関係



つぎに、ペナルティKによる期待損失費用は、総費用にくらべてきわめて小さな値を示している。この理由は、計画年次における将来人口のばらつきσが非常に小さいことになる。すなわち、過去の実績値がかなり安定した増加を示していることに起因すると考えられる。

さて、図.7はk^*，q，Kの関係を両対数紙にプロットしたものであり、これらの間にほぼつぎの関係が成立する。　$k^* = \alpha(q) K^{0.32}$ ……… (27)　　$\alpha(q) = 1.21q^2 - 2.08q + 2.06$ ……… (28)

そこで、(27)、(28)両式を(5)式に代入すれば、　$x^* = \bar{y} + (1.21q^2 - 2.08q + 2.06) K^{0.32} \sigma$ ……… (29)

を得る。こうして最適計画人口x^*はKとqの関数として記述できた。また、安全率$F = x^*/\bar{y}$とペナルティKとの関係は、(29)式を$\bar{y}$で割り、Kについて解くと、

$$K = \left[(F-1)\frac{\bar{y}}{\sigma}(1.21q^2 - 2.08q + 2.06)^{-1} \right]^{-0.32} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (30)$$

を得る。したがって、計画入力としてのある安全率と原単位を定めることは、とりもなおさず下水処理場を建設する計画主体が、最適計画人口より上の超過確率人口に対しペナルティを課していることと等価であり、(30)式はこのペナルティを経済的に評価していると読みとることもできる。

4. おわりに

本稿では、上下水道施設を建設するという立場のもとで、計画人口決定の問題を単なる予測から計画主体の意志決定問題におきかえ、将来人口の計画目標値を決定する方法を考察した。2.では、将来人口予測の期待値と偏差が既知で、その分布が未知という不完全情報のもとで、施設建設費を考慮した、機会損失型ならびにペナルティ型の評価関数を提案し、自然を相手としたゲーム論的接近によるモデルの解法を明らかにした。3.では機会損失型の評価関数を用いて上水道計画における給水人口決定問題を考察し、4.ではペナルティ型の評価関数を用いて下水道計画における計画取入れ人口の決定問題を考察した。この結果、従来のように将来人口予測の期待値を評価せずに計画目標にしたり、あるいはこの期待値に安全率をかけて計画目標にするのでなく、科学的（合目的）に計画目標値を策定する方法が示しえたと考える。

最後に、本稿では計画人口の問題を考察したが、原単位についても同様な議論が可能であることを指摘するとともに、他の上下水道計画、たとえば貯水池の容量問題などにも適用可能であると思われる。

なお、本研究は、当社海渕養之助博士の温かい御理解のもとで遂行できたことを断っておきます。

＜参考文献＞

1) Starr, M.K. and Miller, D.W. : *Inventory Control, Theory and Practice*, Prentice-Hall, 1962
2)松田正一他：ORのための基礎数学5，丸善，1964
3)日本水道コンサルタント：群馬県広域利水計画に関する基礎的調査報告書，1971
4)萩原良巳・小泉明・中川芳一：水利用計画に関するシステム論的研究－とくに水道計画における水需要の構造分析と施設計画の評価について－，NSC研究年報 Vol.4 No.2，日本水道コンサルタント，1976
5)萩原良巳・小泉明・中川芳一・高橋邦夫：計画人口決定に関する一考察，第27回全国水道研究発表会，日本水道協会，1976
6) J. Kowalik and M.R. Osborne : *Methods for Unconstrained Optimization Problems*, American Elsevier Pub. Co., 1968
7)堤武・萩原良巳・高橋邦夫：下水道整備計画における計画人口決定に関するゲーム論的一考察，第10回下水道研究発表会，下水道協会，1973
8)堤武・萩原良巳：下水道整備計画システムに関する方法論的研究，NSC研究年報Vol.2 No.2，日本水道コンサルタント，1974
9)堤武・萩原良巳・高橋邦夫：下水道整備計画のための計画人口決定に関する一つの基礎的研究，下水道協会誌 Vol.11 No.120，1974