

## (5) 下流水質による汚濁源の解析

京都大学工学部 ○松 岡 譲  
住 友 恒  
岩 井 重 久

### 1. はじめに

この論文では、河川において下流に設置されたモニタリングステーションから得られる水質データを使用して、上流における汚濁源の諸等性を推定する手法を検討している。水質汚濁源の推定は水質管理上、きわめて重要な課題であり、その推定にあたっては、多方面からのアプローチが必要であることは論をまたない。しかるに本論文においては、考察をモニタリングステーションから得られる水質データの解析法に重点をおく。これは研究の中心を河川における水質伝播特性と水質管理との関連におくためである。すなわち水質伝播のモデル化から生ずるサンプル間隔の問題、水質伝播に關与する河川諸パラメータの必要精度の問題などがそれである。これらの諸点について、本論文においては、特に河川水質伝播を拡散モデルで近似した時に生ずる問題点を、サンプル間隔の面から、とらえている。さらに本論文においては、これらの手法の検証として、室内実験によるシミュレーション及び実測データによる推定をもあわせおこなっており、これらの諸点についても論ずることとする。

### 2. 下流モニターデータによる汚濁源特性の推定手法

本論文においては河川における水質伝播を次式の1次反応型の移流拡散モデルで近似する。

$$\frac{\partial cA}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (cQ) = \frac{\partial}{\partial x} (AD \frac{\partial c}{\partial x}) - kcA + q_c \quad (1)$$

ここに  $c$  は注目する水質濃度、 $A$  は河川断面積、 $Q$  は流量、 $q_c$  は排出項である。よく知られているよう

TABLE-1

| name                          | type     | objective function                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | equality             | remarks                                                                                                   | examples        |
|-------------------------------|----------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------|
| 1 direct method               | F1<br>V1 |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | $Kz = c$<br>$Ky = c$ | $n=m$                                                                                                     | FIG-1           |
| 2 least square method (batch) | F1<br>V1 | $(Kz - c)^T (Kz - c) + \alpha z^T z$<br>$(K^T K + \alpha I)z = K^T c$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |                      | $\alpha \geq 0$<br>$m \geq n$                                                                             | FIG-10<br>FIG-1 |
| (sequential)                  | F1<br>V1 | F.F.T.<br>$z^{m+1} = \rho^2 z^m + A_D^{m,m+1} (I + D^{T,m+1} A_D^{m,m+1})^{-1} (c^{m+1} - \rho^2 D^{T,m+1} z^{m+1})$<br>$A^{m+1} = \rho^2 (P^m - P^m (\rho^2 \alpha^{-2} I + P^m)^{-1} P^m)$<br>$P^{m+1} = A^{m+1} - A_D^{m,m+1} (I + D^{T,m+1} A_D^{m,m+1})^{-1} D^{T,m+1} A^{m+1}$                                                                                                                                                                                                           |                      | step estimation<br>$0 \leq \rho \leq 1$<br>$P^m = (K^T K + \alpha I)^{-1}$<br>$K^{m+1} = (K^T D^{m+1})^T$ | FIG-3<br>FIG-1  |
| 3 quadratic programming       | F1       | $(c - Kz)^T (c - Kz) + \alpha z^T z$<br>e.g. Beale method, Wolfe method                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |                      | $z \geq 0$                                                                                                | FIG-1<br>FIG-10 |
| 4 linear programming          | F1<br>V1 | $\sum  c - Kz  + \alpha  z $<br>$\sum  c - Ky  + \alpha  y $                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |                      | $z \geq 0$<br>$y \geq 0$                                                                                  | FIG-1<br>FIG-10 |
| 5 optimum tracking method     | F1       | see Sec.4                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |                      |                                                                                                           |                 |
| note                          | V1<br>F1 | $q_c(\xi, \tau) = y(\xi, \tau), K_{i,j} = \Delta x \Delta t \sum_{k=1}^m K(\bar{i}-0.5\Delta x, \bar{k}-0.5\Delta t; \bar{n}-0.5\Delta x, \bar{j}-0.5\Delta t) x_{z,j} \text{; unknown}$<br>$y(\bar{i}-0.5\Delta x, \bar{k}-0.5\Delta t)$<br>$q_c(\xi, \tau) = y(\tau) z(\xi, \tau), K_{i,j} = \Delta x \Delta t \sum_{k=1}^m K(\bar{k}-0.5\Delta x, \bar{j}-0.5\Delta t; \bar{n}-0.5\Delta t, \bar{m}-0.5\Delta t) x_{y,j} \text{; unknown}$<br>$z(\bar{k}-0.5\Delta x, \bar{y}-0.5\Delta t)$ |                      |                                                                                                           |                 |

に、式(1)に関連して応答関数  $K(\xi, \tau; x, t)$  を求めれば、地点  $x$  にて時刻  $t$  の濃度  $c(x, t)$  は、Greenの公式を用いることにより式(2)のようにあらわすことができる。(モニターより下流の影響は無視した。)

$$c(x, t) = \int_0^x d\xi \int_0^t d\tau q_c(\xi, \tau) K(x, t; \xi, \tau) + \int_0^t [A(0, \tau) D(0, \tau) \{C(0, \tau) \frac{\partial K}{\partial \xi}(x, t; 0, \tau) - K(x, t; 0, \tau) \frac{\partial c}{\partial \xi}(0, \tau)\} + Q(0, \tau) K(x, t; 0, \tau) c(0, \tau)] d\tau + \int_0^x A(\xi, 0) K(x, t; \xi, 0) c(\xi, 0) d\xi \quad (2)$$

一般的に  $K(\xi, \tau; x, t)$  を解析的に求めることは困難である。しかるに、2, 3の特定な条件下では求めることを得、たとえば、 $x \leq 0$  にて汚染源なし、定常等流条件、 $c(x, 0) = 0$  のもとでは、よく知られた次式を得る。

$$c(x, t) = \int_0^x d\xi \int_0^t d\tau q_c(\xi, \tau) \frac{1}{\sqrt{4\pi D(t-\tau)}} \exp\left(-\frac{(x-\xi-Q(t-\tau)/A)^2}{4D(t-\tau)} - k(t-\tau)\right) \quad (3)$$

本論文で提唱する手法は基本的には、式(3)の整合である。その解法の1は  $q_c(\xi, \tau)$  を時間変動分  $y$  と空間的な変動分  $z$  に分離し、いずれかは既知として、連立方程式化して解く方法である。その2は、式(3)の式誤差を目的関数とし、それを最小にすべく、最適化手法により解くものである。この場合にも、 $y, z$  の分離は必要となる。1モニター点による1水質成分のモニターでは1つの未知関数がわかるのみである。多地点における排出パターンを同時に知るためには、モニター点の増加、あるいは多成分の水質モニターが必要となる。この例として第4節においては、2成分水質による既知2地点の排出パターンの推定をおこなう。本論文中使用した手法について、その概略を表-1にまとめ、その2, 3の例について、室内実験における推定例をFIG-1にあげる。

本論文で使用された実験水路は全長13m幅16.1cmの長方形断面水路である。投入水質としては、主にメチレンブルー溶液を用い、他に食塩水をも使用し、プログラム設定器により設計された時間パターンにより投入した。測定は、Photo-Corderにより吸光度として、あるいは、白金電極により電気導電率として連続的に測定し、データレコーダーに採録した。これらは、FACOM-U-200によりA/D変換、がおこなわれ、以後の計算に資された。データ数は原則として約512ヶ/1runであり、相互の比較を可能にしている。計算に使用された拡散係数は、野外測定を別にして、すべて同時におこなわれたパルス・トレーサー実験により、モーメント法を用いて測定されたものであり、本水路の場合、FIG-2のような特性をもっている。

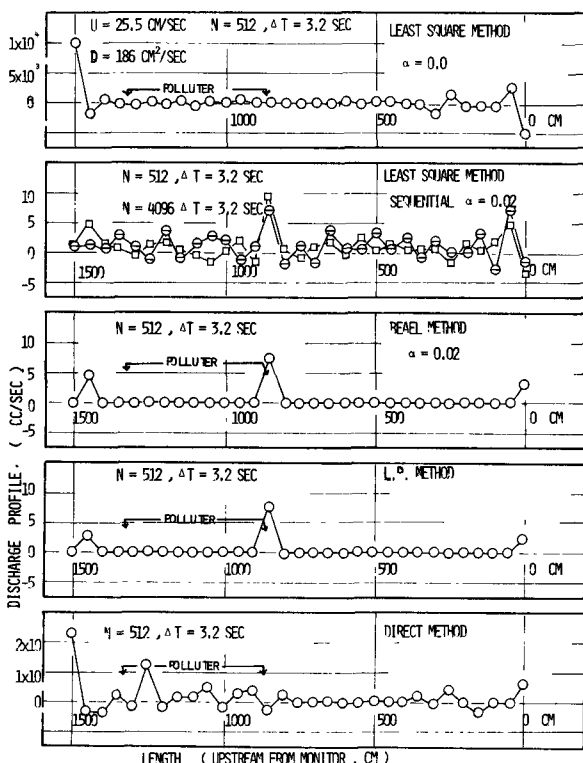
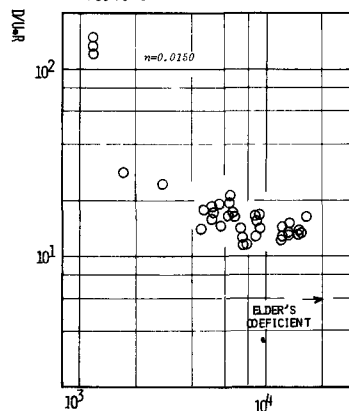


FIG-1 ESTIMATIONS OF DISCHARGE PROFILE  
input pattern : sine curve  
input cycle : 148 sec  
methylene blue solution

FIG-2 THE FLUME CHARACTERISTICS (DIFFUSIBILITY)



さて、FIG-1, または、後述する FIG-11 のように、これらの推定は、必ずしも良好な成果を収めているとは、言い難い。これは、多くの原因が考えられようが、条件をかえ、数多くの推定をおこなうと各手法間の相違というよりも、むしろ拡散式の平滑化作用が大きな原因と考えられ、次節においては、この点につき、サンプル間隔の見地から論ずることとする。

### 3. サンプルング周期と推定誤差

さて、本節ではモニタリングデータの採取に際し大きな問題となるサンプルング周期の決定を、前節でのべた推定操作の過程から論ずる。

通常、変動する水質データについて、その変動を支配する時間スケールとしては、次のスケールをあげることができよう。

1.  $T_{in}$  投入周期
2.  $T_r$  滞留時間 ( $= L/U$ )
3.  $\Delta t$  サンプルング周期

本論文においては、これらの間の関連性を調べるために  $T_{in}/T_r$ 、及び  $\Delta t/T_r$  を種々に変化させ、水路実験により推定誤差との関連を調べている。この際に使用した推定法は、表-1 における No 2 の F. F. T. 法である。これは F. F. T. を使用し、モニターデータをフーリエ変換したものを伝達関数で割り、その低周波側より何項かをを用いて逆変換をおこない、投入時間パターンを知る手法である。本節では 256 項で展開をしている。FIG-3 は  $\Delta t$  を変え推定をおこなったものの部分である。また FIG-4 は、各々  $T_{in}/T_r$  で分類された推定誤差とサンプルング周期の関連を示したものである。

各々の場合について、いずれも、最適サンプルング周期の存在が予想されるがこれは、水質

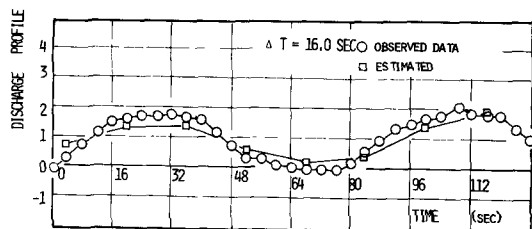
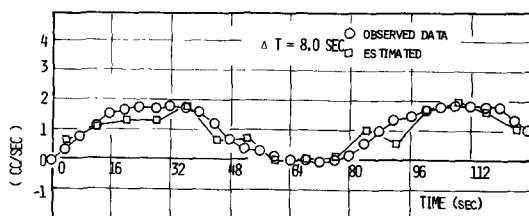
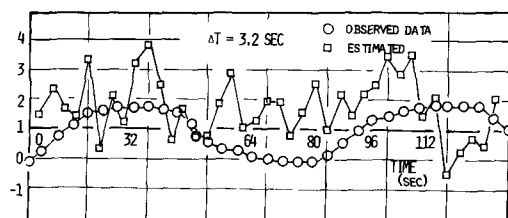
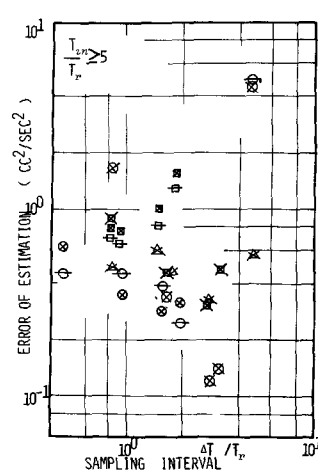
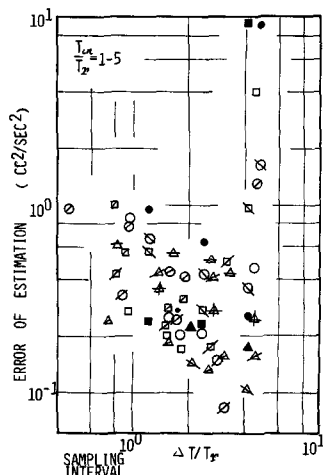
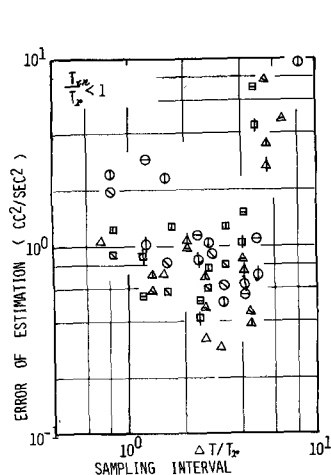


FIG-3 ESTIMATIONS OF DISCHARGE PROFILE ( $P_e = 58.1$ ,  $T_{in}/T_r = 5.04$ )  
LEAST SQUARE METHOD F F T. method



変動のうち、拡散モデルとの差異が激しい高周波成分の影響が、原因であろう。最適化問題における数値解法上の手法としていられている正則化は、解の共分散をも目的関数内に繰り込む方法であるが、この点から見ると、観測データに移動平均をほどこしていることになる。換言するならば、式(4)のような目的関数をとれば、FIG-5の実線のような、伝達関数をもった水質伝播モデル式を仮定するわけであり、 $\alpha = 0$ の時に得られる拡散係数モデルの伝達関数と実際の観測水質変動応答 (FIG-5の●)との差異が大きい領域を無視することになる。

$$\int_0^T (c(x,t) - \int_0^t \frac{dx}{U} K(x, \tau - t) y(0, \tau) d\tau)^2 dt + \alpha \int_0^T (y(0, t))^2 dt \tag{4}$$

但し、式(4)においては、定常等流、既知地点  $x = 0$  にて一点投入を仮定しており、十分に短い距離  $\Delta x$  より、 $\Delta x y(0, \tau)$  の投入があると仮定している。以上のように、水質データのサンプリング周期は、水質伝播モデルにより、左右され、過度な短時間周期のサンプリングは、上流側の情報に対し、何ら寄与することができない。

さて、サンプリングを  $\Delta t$  毎におこない、それに対応して計算を  $\Delta t$  で離散化しておこなうことは、aliasing を無視すれば、変動及び伝達関数の  $f \geq 1/\Delta t$  の成分を無視することにより、相当する。したがって  $\Delta t$  を調整することにより、推定誤差を最小にする  $\Delta t_{opt}$  が存在するわけであり、この  $\Delta t_{opt}$  は、次の諸点から決定されよう。

1.  $|K(1/\Delta t)| \cdots$  減衰率
2. 投入変動のスペクトラム特性
3. 水質伝播のモデル適合特性及びむら
4. 観測誤差、観測応答特性

FIG-6は、1について、 $Pe = UL/D$  との関係を示しており、同時に FIG-4から得られる  $|K(1/\Delta t_{opt})|$  と  $Pe$  を示す。これから

$\Delta t_{opt}$  は  $|K(f)|$  が 1 ~ 20 % のオーダーで得られることがわかる。さらにこの結果を河川形状パラメータと関連づけるために、Fischer の提案する式(5)を用いて  $\Delta t_{opt}$  と  $Pe \propto L^2 H \sqrt{f_r} / B^2$  の関係をプロットしてみると FIG-7 のようになり、河川形状パラメータとモニタリング周期との関連性を示唆することができる。

$$D \propto \frac{B^2 H}{\sqrt{f_r} H} \tag{5}$$

4. 実河川における汚濁源特性の推定とそのシミュレーション

本節においては、第2節でのべた方法の実河川への適用例及び、実験水路及び計算機でおこなったそのシミュレーションについて論ずる。実河川例としてあげたN川は、その流量をほとんど、工場排水、下水処理場放流水において最下流における流量はほぼ、 $8 m^3/s$  全長約 5 km であり、計算に使用したメッシュ点と合わせ、FIG-8にその平面図を示す。推定は次の2つの場合についておこなった。すなわち

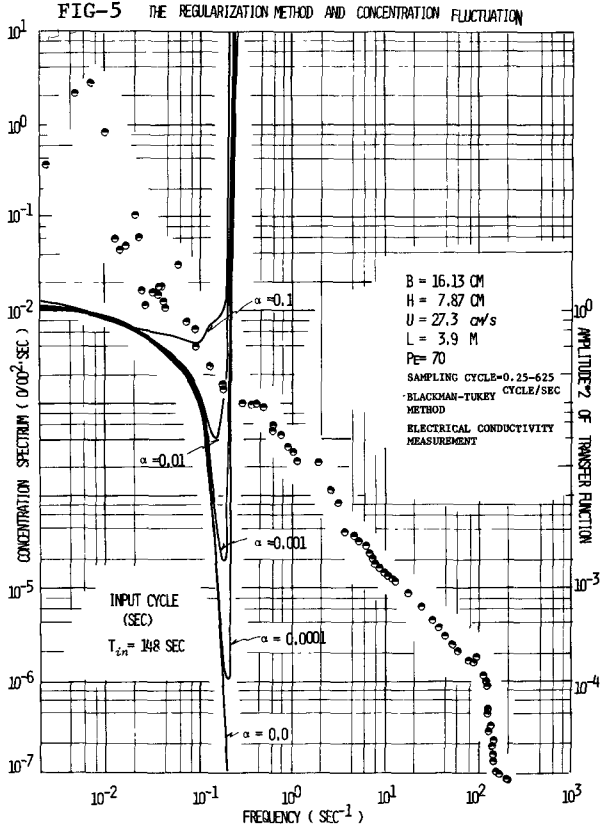


TABLE-2

|   | $I_{th}/I_x$ | PE   |   | $I_{th}/I_x$ | PE   |
|---|--------------|------|---|--------------|------|
| ○ | 1.05         | 58.1 | ⊕ | 5.10         | 39.4 |
| ⊙ | 0.59         | 103  | ⊘ | 2.88         | 69.8 |
| ⊖ | 0.39         | 154  | ⊗ | 1.92         | 105  |
| ⊗ | 1.66         | 58.1 | ⊙ | 10.04        | 39.4 |
| ⊘ | 0.94         | 103  | ⊖ | 5.67         | 69.8 |
| ⊙ | 0.63         | 154  | ⊗ | 3.78         | 105  |
| ⊖ | 5.04         | 58.1 | ⊘ | 0.63         | 107  |
| ⊗ | 2.84         | 103  | ⊙ | 0.36         | 196  |
| ⊘ | 1.90         | 154  | ⊖ | 0.24         | 297  |
| ⊙ | 9.91         | 58.1 | ⊗ | 1.01         | 107  |
| ⊖ | 5.60         | 103  | ⊘ | 0.51         | 196  |
| ⊗ | 3.73         | 154  | ⊙ | 0.38         | 297  |
| ⊘ | 1.06         | 39.4 | ⊖ | 3.11         | 107  |
| ⊙ | 0.60         | 69.8 | ⊗ | 1.69         | 196  |
| ⊖ | 0.39         | 105  | ⊘ | 1.12         | 297  |
| ⊗ | 1.68         | 39.4 | ⊙ | 6.12         | 107  |
| ⊘ | 0.95         | 69.8 | ⊖ | 3.33         | 196  |
| ⊙ | 0.63         | 105  | ⊗ | 2.20         | 297  |

FIG-6 ATTENUATION OF AMPLITUDE AND PECKET NUMBER

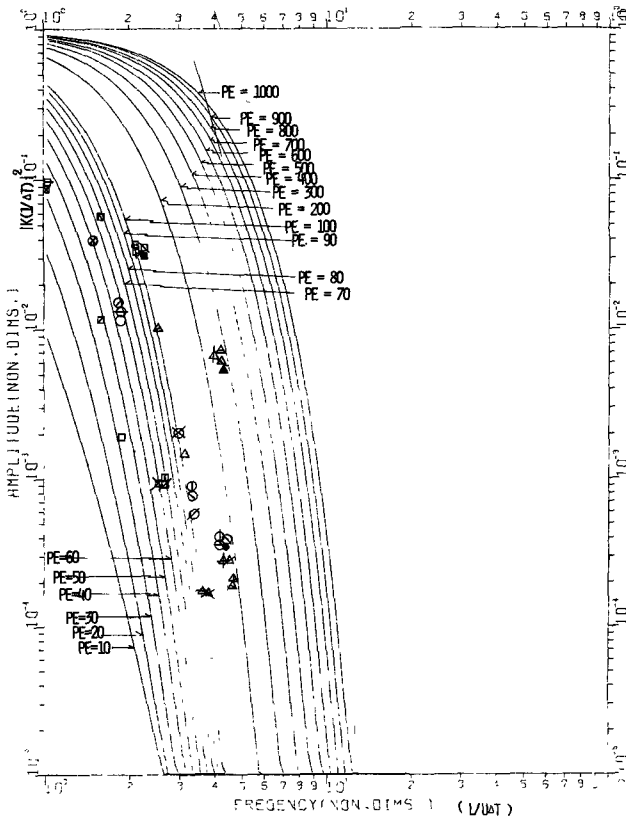
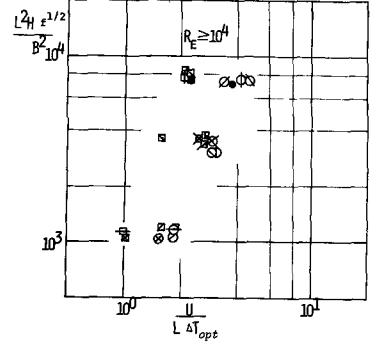


FIG-7 RIVER CHARACTERISTIC AND SAMPLING INTERVAL



(1) 排出パターンを実測しそれにもとずき排出原を求める, (2) 2成分水質を用いて概知2入力源の排出時間パターンを推定する(但し, 入力源の2水質成分は概知とする)。たとえばFIG-10は, FIG-8にて点③, 点②にモニター点をおき, 実際に点aから流入してくる排出パターンを用いて②~③間の排出源分布を推定したものである。ここで, FIG-9は, その際に利用された水質データである。

(2)については, 点③及び点②へ排出される排出時間パターンの推定を試みている。この際, 水質の応答関数としては, 水理量の非定常性, 河川形状の不等性のため, 式(1)から顕わに表わすことができない。したがって, 今, 式(1)を集中定数化し, 状態方程式を作成し, 予想水質と観測水質との2乗誤差を最小にするようなRiccati方程式を導いた。すなわち, 式(1)を, 距離方向にGalerkin法で集中定数化すれば, 式(6)を得る。ここに  $Q_C^T = (A_1 C_1, A_2 C_2, \dots, A_N C_N)$ ,  $q_C^T = (q_1, \dots, q_N)$ ,  $A_C = (a_{ij})$ ,  $B_C = (b_{ij})$ であり,  $\Delta x_i$ の長さのメッシュ内にて, 水質を2次, 流量, 水深を1次で近似することにすれば  $A_C, B_C$  は表-3の数値を全メッシュについて加えたものである。

$$A_C \frac{dQ_C}{dt} = B_C Q_C + A_C q_C \quad (6)$$

流量についても従来の1次元運動量式, 連続式を利用して, 同様な式を得る。式(6)より, 式(7)のような目的関数を最小にする  $q_C$  を求めてやると式(8)の漸化式を得る。ここに  $H$  はモニター点のみが1で他は0である行列であり, 添字  $i$  は  $i\Delta t$  の時刻を示す。

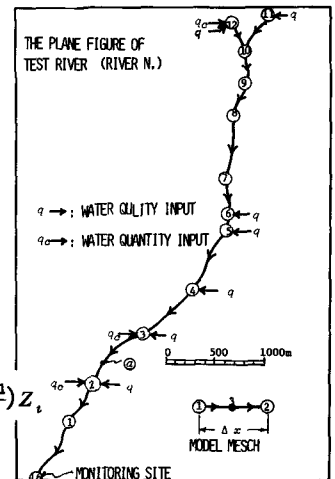
$$\sum_{i=m_0}^{M\Delta t} \|Q_{C,i} - Q_{C,i}^{obs}\|^2 + \alpha \|q_{C,i}\|^2 \rightarrow \text{Min} \quad (7)$$

$$Q_{C,i} = \Pi_{i-1} Q_{C,i-1} + \Phi_i y_i, \quad q_{C,i} = Z_i y_i, \quad Z_i: \text{排出源の位置行列}$$

$$\Pi_{i-1} = \left( \frac{A_i}{\Delta t} - \frac{B_i}{2} \right)^{-1} \left( \frac{A_{i-1}}{\Delta t} + \frac{B_{i-1}}{2} \right), \quad \Phi_i = \left( \frac{A_i}{\Delta t} - \frac{B_i}{2} \right)^{-1} \left( \frac{A_i + A_{i-1}}{2} \right) Z_i$$

$$y_{M-m} = \alpha^{-1} \Phi_{M-m-1}^T (P_{M-m} Q_{C,M-m} + R_{M-m})$$

FIG-8



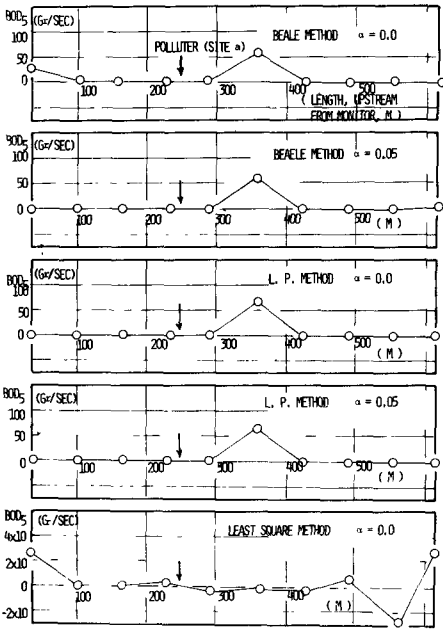
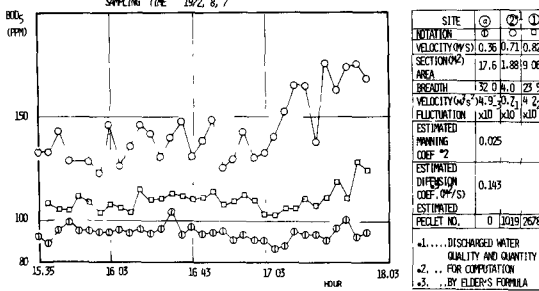


FIG-10 ESTIMATIONS OF DISCHARGE PROFILE (FIELD TEST)

FIG-9 MONITORED DATA (FIELD DATA)



##### 5. おわりに

汚濁源特性の解析手法の考察を通じ、本論文では、主に拡散特性と時間的なサンプリングスケールの問題について取り扱った。この他、空間的な集中定数化の問題も、やはり式(1)の特性と深く関連していると思われ、今後の課題である。なお、本研究を進めるにあたり、協力していただいた早瀬隆司氏及び、水道工学研究室の諸氏に謝意を表します。

(1) 土木学会 年次講演会 第2部 第30回 ■-246(1975) 第31回 ■ (1976)

(2) Ikeda, S., Miyamoto, S., and Sawaragi, Y.: Int. J. Systems Sci., 5 (1974)

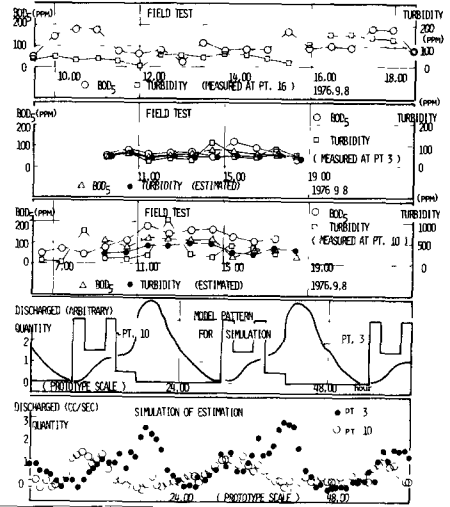


FIG-11

TABLE-3

$$B_c = (B_{z,z}) = (B_{z,z}, k^* B_{z,z})^{q_k} / A_k + \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{A_i} \frac{P}{i B_x}$$

$$A_c = (a_{i,j})_{i,j=1}^{10 \times 10}$$

|            |       |           |          |       |       |       |       |
|------------|-------|-----------|----------|-------|-------|-------|-------|
| $\alpha$   | 1/15  | -1/152/15 | 1/158/15 | 8/15  | 7/15  | 8/15  | 16/15 |
| $\beta$    | -1/5  | -1/152/5  | 1/30     | -1/30 | 0     | -1/5  | -1/15 |
| $\gamma$   | 1/30  | -1/30     | 0        | 1/15  | 1/5   | -5/5  | 1/15  |
| $\delta$   | -1/5  | -1/152/5  | 1/15     | 1/5   | -4/15 | 8/15  | 0     |
| $\epsilon$ | 32/60 | 7/60      | -20/6    | 7/60  | 7/60  | -1/15 | -1/15 |
| $\zeta$    | -1/20 | 7/60      | -7/30    | 7/60  | -1/15 | -7/30 | -1/15 |
| $\eta$     | 3/5   | -2/30     | -8/15    | 8/30  | 3/5   | -8/15 | 8/15  |

$$P_{i-1} = 2H_{i-1}^T H_{i-1} + \Gamma_i \Pi_{i-1}$$

$$P_i = -2H_{i-1}^T Q_{c,i-1,obs} + (\alpha^{-1} \Gamma_i \phi_i \phi_i^T + \Pi_{i-1}^T) R_i$$

$$\Gamma_i = \Pi_{i-1}^T (P_i - P_i \phi_i (\alpha I + \phi_i^T P_i \phi_i)^{-1} \phi_i^T P_i)$$

$$P_M = R_M = 0 \quad (8)$$

今、 $m4t$ を流下時間に較べ十分に大きくとれば、上式により  $y_M-m$  の推定値を求めることができる。

TABLE-4 MODEL RATIO

| index                  | prototype            | model                | ratio              |
|------------------------|----------------------|----------------------|--------------------|
| water quantity (l/sec) | $8 \times 10^3$      | 0.55                 | $1.45 \times 10^4$ |
| depth(cm)              |                      | 3.00                 |                    |
| Peclet No.             | $2.7 \times 10^{-2}$ | $2.7 \times 10^{-2}$ | 1.0                |
| length(m)              | 4860                 | 11.0                 | 442                |
| velocity(cm/s)         | 30                   | 11.4                 | 2.63               |
| Tin (sec)              | 86400                | 514.6                | 168                |