

下水道整備計画に関するシステム論的研究 III -とくに国の調整機能の計量化と各都市のフィードバック情報について-

(株) 日本水道コンサルタント 正員 藤原良巳
上智大学大学院経済学研究科 教原清子

1. はじめに

下水道施設は公共水域の水質保全のための1つの操作変数と認識でき、時空間投資計画を、河川水質を状態変数として採用して、2点境界値問題として定式化できることを明らかにした。¹⁾しかし、ここで採用した操作変数はきわめて画一的であり、大規模システムのマクロ的合目的性追求にある程度有効であることを示したものの、あくまで全体システムの計画主体の立場に立ち、さらに予算の制約を考慮外とした。しかしながら、現実の国・都道府県・市町村は財政的にハイアラーキ構造を有している。しかも、このハイアラーキは同じような性質のシステムの間に、“力の差”があるために生ずるハイアラーキである。したがって、下水道整備計画モデルをハイアラーキ構造を有するシステムとして記述することがより現実的と思われる。換言すれば、下水道計画が広域化し、大規模化してきた今日、各行政体相互の統一調整を記述しうる計画システムモデルの開発が必要なてきたものと思われる。以上のことから、下記に本研究の問題の設定を行なう。

問題の設定: 考察の対象となる都市群は各自独自に人口に関する下水道の普及率の目標値を有しているものとし、さうに各都市の下水道事業費の上限値を既知とする。また、国から都市群への下水道事業の補助金(M)が決まっているものとする。このとき、上記の制約のもとで、公共水域をできるかぎり美しくするために、国は一体どのようにMを各都市に配分し、かつ各々の都市は、自らの土地利用の特性を考慮した下水道整備計画をなすべきか。さうに、この決定のプロセスにおける国と各都市の情報交換はいかにありべきか。

上記の設定では、何ら水質環境基準に触れていない。環境基準を制約に加くことは、各都市の独自に望めたこと、われわれの場合、普及率の目標値に制約を加えることになり、さうに基準を設定された都市(地区)に、モデル上、補助金が集中するため、環境基準が合目的的の結果である今日では、補助金配分の適正化を欠き、また、負荷密度の高い土地利用地区への投資が集中すると思われる。以上のことから、われわれの問題の解は必ずしも基準を満たす保証はない。この場合、高密度地区への上のセカンドインプラント制御などの措置がなされねばならない。

2. 土地利用区分を考慮した下水道整備計画モデルとその対応問題の考察

1. の問題の設定より制約条件は、①補助金に関する制約、②下水道整備の制約、そして、③普及率の制約であり、これらはそれぞれつきのようになる

すなはち、

$$\sum_{i=1}^n M_i = \sum_{i=1}^n I_i \cdot X_{i0} \leq M \quad (1)$$

$$\sum_{j=1}^r a_{ij} \cdot S_{ij} \cdot X_{ij} \leq (1 + X_{i0}) I_i, \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (2)$$

$$\sum_{j=1}^r e_{ij} \cdot S_{ij} \cdot X_{ij} \geq P_i \forall i, \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (3)$$

であり、目的関数は都市群の能力ト負荷量¹⁾を最大にすればよいから、

$$L' = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^r \{ (1 - f_{ij}) l_{ij} S_{ij} (1 - X_{ij}) + (l_{ij} - e_{ij}) S_{ij} X_{ij} \} \rightarrow \max.$$

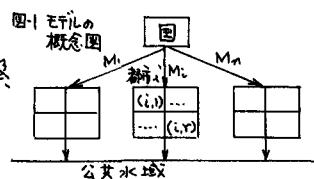


図-1 モデルの概念図

記号のまとめ	
i	都市番号
j	用途地域番号
M _i	都市iの国からの補助金(億円)
I _i	都市iの下水道投資上限値(億円)
a _{ij}	下水道整備単価(億円/ha)
S _{ij}	面積(ha), e _{ij} :人口密度(人/ha)
P _i	人口(人), e _i : フラットの放流水質(tm ³ /ha)
f _{ij}	計画目標普及率, S _{ij} : 流通率
l _{ij}	汚漏負荷量(tm ³ /ha·日), g _{ij} : 排水量(%/ha)

となる。あるいは、 $d_{ij} = (f_{ij}l_{ij} - e_{ij})S_{ij}$ とおいて、 L' の定数項を省くと。

$$L = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^r d_{ij} x_{ij} \rightarrow \max. \quad (4)$$

が目的関数となる。ここで、決定変数は、 x_{10}, x_{ij} ($i=1, 2, \dots, n$, $j=1, 2, \dots, r$) で、前者は都市*i*の下水道投資額に対する国の補助金率であり、後者は、都市*i*の用途地域の下水道整備率である。

つぎに(1)～(4)式をベクトル表示し、その双対問題も書けば、(5)、(6)式を得る。

$$(主問題) A_1 x_1 + A_2 x_2 + \dots + A_n x_n \leq b_0$$

$$B_1 x_1$$

$$\leq b_1$$

$$B_2 x_2$$

$$\leq b_2$$

.....

$$B_n x_n \leq b_n$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$$

$$C_1 x_1 + C_2 x_2 + \dots + C_n x_n \rightarrow \max.$$

ただし、 $A_i = [I_i \ 0 \ \dots \ 0]$, $b_0 = ^T[M \ 0 \ \dots \ 0]$

$$B_i = ^T\left[\frac{I_i}{a_i} \ -P_i S_i\right], \quad C_i = [0 \ d_{1i} \ d_{2i} \ \dots \ d_{ri}]$$

$$(双対問題) A_1^T y_0 + B_1^T y_1$$

$$A_2^T y_0 + B_2^T y_2$$

$$\geq C_1^T$$

$$\geq C_2^T$$

.....

$$A_n^T y_0 + B_n^T y_n \geq C_n^T$$

$$y_0, y_1, \dots, y_n \geq 0$$

$$B_0^T y_0 + B_1^T y_1 + B_2^T y_2 + \dots + B_n^T y_n \rightarrow \min.$$

$$B_i = \begin{bmatrix} \frac{I_i}{a_i} & S_{i1} & S_{i2} & \dots & S_{ir} \\ 0 & -\varepsilon_{i1} S_{i1} & -\varepsilon_{i2} S_{i2} & \dots & -\varepsilon_{ir} S_{ir} \end{bmatrix}$$

$$x_i = ^T[x_{1i} \ x_{2i} \ x_{3i} \ \dots \ x_{ri}]$$

である。さて、国と各都市の情報交換シミュレーションは、3.で述べるとおり、ここで(6)式の双対問題の考察を行なう。ただし、同じことだが、以下(5)の制約式を等式化して考える。

(5)の解を $X^* = [x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*]$ とし、(6)の解を $y^* = [y_0^* \ y_1^* \ \dots \ y_n^*]$ とおく。そして(5)の目的関数の最大値を L^* とおけば、 L^* は(5)の制約式 $b = [b_0 \ b_1 \ \dots \ b_n]$ の関数で、

$$L^*(b) = \max L = \max \{ C \cdot x = \sum_{i=1}^n C_i x_i \mid A_i x = b, x \geq 0 \}$$

である。ただし、 A_i は(5)の制約式の係数マトリックスである。このとき、一般に

$$\left(\frac{\partial L^*(b)}{\partial b_i} \right)_- \leq y_i^* \leq \left(\frac{\partial L^*(b)}{\partial b_i} \right)_+, \quad \text{あるいは} \quad y_i^* = \frac{\partial L^*(b)}{\partial b_i} \quad (7)$$

が成立する。ただし、左は右側微分と左側微分を示す。こうして、われわれの双対問題の制約式と目的関数は、

$$I_i y_0 - \left(\frac{I_i}{a_i} \right) y_{ii} \geq 0, \quad S_{ij} y_{ii} - \varepsilon_{ij} S_{ij} y_{i2} \geq d_{ij} \quad (i=1, 2, \dots, n, j=1, 2, \dots, r)$$

$$M y_0 + \sum_{i=1}^n \left\{ \left(\frac{I_i}{a_i} \right) y_{ii} - P_i S_i y_{i2} \right\} \rightarrow \min. \quad (8)$$

であるから、最適解近傍で、(7)式より、双対変数は

$$y_0 \approx \frac{\partial L(b)}{\partial M}, \quad y_{ii} \approx \frac{\partial L(b)}{\partial \left(\frac{I_i}{a_i} \right)}, \quad y_{i2} \approx \frac{\partial L(b)}{\partial (-P_i S_i)} \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (9)$$

となる。これらは、 M , I_i/a_i そして $P_i S_i$ を投入物として、 $L(b)$ を産出物としたときの各々の限界生産性を示している。すなはち、これらは投入物の帰属価値に相当するもので、shadow price とよばれる。

今、(8)式を(9)式を用いて書き直せば、

$$\frac{\partial L}{\partial M} - \frac{1}{a_i} \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{I_i}{a_i} \right)} \geq 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{I_i}{a_i} \right)} + \varepsilon_{ij} \frac{\partial L}{\partial (P_i S_i)} \geq d_{ij}, \quad M \frac{\partial L}{\partial M} + \sum_{i=1}^n \left\{ \left(\frac{I_i}{a_i} \right) \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{I_i}{a_i} \right)} + P_i S_i \frac{\partial L}{\partial (P_i S_i)} \right\} \rightarrow \min. \quad (10)$$

となる。

(10)式の第1式は、 a_i を固定すれば、整備可能面積が増えるのに伴う補助金の増額は、整備単価より小さくはないという条件を表わしている。補助金の増額が整備単価より小さいときには、 M を増やしたり、 I_i/a_i を増やすことは諸手段(M , I_i/a_i , $P_i S_i$)の帰属価値が主問題において正に評価されていないことの表われである。また、 $\partial M / \partial J_i \leq 1$ とも書けるから、補助金の増加は、すべての都市の事業費の増加より小さい。もしくは、補助金

の増加によるカットの増加は、すべての都市の事業費の増加によるものよりも大きいことを要請する。つぎに第2式は、 I_{ik} 、 P_{ik} によるカット負荷量は、主問題の各都市と用途地域の単位面積あたりのカット負荷量より多くなければならないという条件を表している。 I_{ik} 、 P_{ik} によるカット負荷量が主問題の各都市と用途地域の単位面積あたりのカット負荷量より小さいときには、第1式と同様に、諸手段の帰属価値が主問題において正当に評価されていないということになる。最後に目的関数は、各手段による総カット量を最小にせよ、ということを表しているが、このことは、最小手段の利用によって、(主問題における)最大の効果をあげるということを意味している。ところで、われわれの主問題は、補助金をどのように配分するか、普及人口や整備面積をどの用途地域に配分するかという諸手段の配分問題であった。これに対して、対応問題は、国と都市とは異なる立場の意志決定者が存在して、当問題の実行に際し、 M と I_{ik} 、 P_{ik} が諸手段として正当な評価を受けているかどうかを判断する。さて、主問題の最大値と対応問題の最小値は、最適計画のときには等しくなり。

$$\frac{M}{L^*} \frac{\partial L^*}{\partial M} + \sum_{i=1}^n \left\{ \left(\frac{I_{ik}}{a_i} \right) \frac{\partial L^*}{\partial I_{ik}} + \frac{P_{ik}}{L^*} \frac{\partial L^*}{\partial (P_{ik})} \right\} = 1 \quad (11)$$

を満足する。左辺の各項は、それぞれ、カット負荷量の補助金弹性、整備面積弹性、普及人口弹性を表しており、最適計画においては、カット負荷量の各手段弹性の和は1となる。この關係から、最小手段の利用によって最大の効果をあげるという主問題と対応問題の關係が明らかとなる。

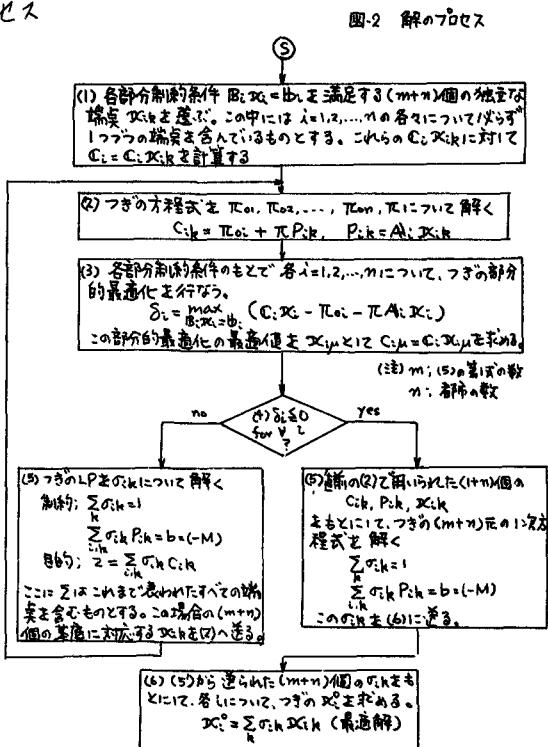
以上のモデルの考察から、われわれは、主問題、対応問題のどちらを解いてもいいわけであるが、ここでは、国と各都市の情報交換シミュレーションが大きな目的となっているから、以下、主問題のみに議論をいざる。

3. 分解原理によるモデルの解法と意志決定プロセス

(5)の主問題は、ごく普通のLP問題であり、そのまま解ける。しかししながら、国と各都市がどのように情報交換を行なっているかはわからぬ。このように交換を記述するために、ここで分解原理を用いる。分解原理によって、国と都市群の情報交換がきめ細かにシミュレートされる。この解法のプロセスは図-2に示すとおりで、このプロセスそのものが、つぎの3つの機能を有する意志決定プロセスになつてゐる。すなはち、

- ① 国が各都市へ補助金を配分する機能
 - ② 各都市が土地利用区分を考慮しながら効率的に下水道整備計画を作成する機能
 - ③ 上記2つの機能を合目的に調整する機能
- である。

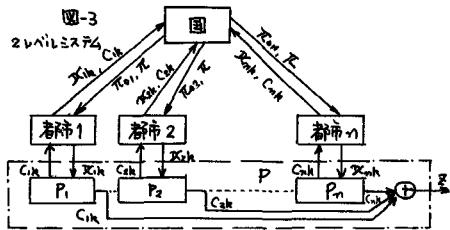
以下、図-3の模式図に沿って、意志決定のプロセスを説明する。図-3は、国と都市群がなる2レベルシステムを示している。ただし、Pはこのシステムのプロセスを示しており、われわれの場合、公共水域を想定している。また、この図は、国と各都市の情報交換を数量的にシミュレートしている。すなはち、都市 i は D_{ik} (申請する補助金と下水道整備計画)ならびに、この計画の結果としての都市 i のカット負荷量 C_{ik} を国へフィードバックする。国は、各都市からの情報(



$X_{ik}, C_{ik}, i=1,2,\dots,n$ を受け補助金 M を意識 1, 2、総合変数 π 、 π_{oi} を各都市に提示する。 π 、 π_{oi} は、後に述べるように、固分の各都市へ指示可能な目標カット量（補助金の限界）を構成する。 各都市は、 π 、 π_{oi} という情報を考慮し、カット量を目標値、

$$\pi_{\text{lo}} + \pi A_i x_i$$

に近づけるよう、分権的に部分最適化をはかり、新たな下水道整備計画と補助金率 $\alpha_{i,k+1}$ と計画カット量 $c_{i,k+1}$ を求めよ。そして、この情報を開拓へフィードバックし、最適性条件 ($s_i \leq 0$, $\forall i \in V$) を満たすまで、上記のことを繰返す。こうして、最適性条件を満たせば、それまでのすべての代替案を考慮して意志決定は終ることになる。次に数値例を示すことにより、この決定プロセスをより明らかにする。



4. 数値例とその考察^{5) 6)}

(1) 数値モデル

ここで述べ、(1)～(3)式にスラッシュ変数を導入して等式化し、 $M=3$ 、 $N=4$ の場合を考える。だが、計算のための入力データは表-1に示す。表-1より明らかのように、都市1では準工場地域、都市2と都市3では住居地域の整備対象面積が卓越している。また、都市3が、3市の商業の中心である。表-1の入力データをもと

表-1 入力データ

ここで、 X_{ij} は0で、 $X_{15}, X_{25}, X_{35}, X_{40}$ はスラック変数である。(12)式より明らかのように、3つの都市は国からの補助金で結合されており、このLPシステムは2レベルになっている。

(2) 不備的考察

ここでは、各都市の計画目標下水道整備率(x_1, x_2, x_3) = (0.6, 0.8, 0.7)を達成するための補助金の上下限とのときの下水道整備計画を求める。下限は人口密度の高い所から、上限は負荷密度の高い所から整備していくべきがあり、このときの各都市への補助金と整備率は、 $X'_i = \{x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}, x_{i4}\}$ を整備率ベクトルとして、次のようになる。ただし $M_i = (M_1, M_2, M_3)$ とする。

$$\text{下限: } M = (26.83 \ 17.2 \ 5.1 \ 4.53), \quad x_1' = ^T[1 \ 1 \ 0.56 \ 0], \quad x_2' = ^T[0.91 \ 1 \ 0 \ 0], \quad x_3' = ^T[0.775 \ 1 \ 0 \ 0]$$

$$\text{上限; } M = \begin{pmatrix} 104 & 40.4 & 19.07 & 44.53 \end{pmatrix}, \quad X_1' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.76 & 1 \end{pmatrix}, \quad X_2' = \begin{pmatrix} 0.76 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad X_3' = \begin{pmatrix} 0.625 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

これより明らかのように、 φ_1 , φ_2 , φ_3 を満足するためには、國は $26.83 \leq M \leq 104$ の M を考へればよい。 ただ

し、われわれのモデルに従うがぎり、補助金の増加は、整備のウェイトを商→住→準→工へと移す。したがって、補助金の増加は、 μ を固定して考えることは好ましくない。以下、 $M=40$ として考察する。

(3) 国と各都市の情報交換シミュレーション

1) 初期実行可能計画

これは(1)式の制約の第1レギューラー³⁾ ($B_i X_i = b_i$) ($i=1, 2, 3$)に人工変数を用いたLPを解くことによって、各レギューラーごとに3つの独立した端点と、これらと独立な1つの端点を求めるこことによって得られる。われわれの場合、4つの端点から、図-4と図-5のような2つの初期実行可能計画を得る。これら2つの計画は、各々 41.5, 85.96 tkm/日 のカットをすため、39.6, 78.52億円の補助金を要請する。今、 $M=40$ であるが、この2つの計画を調整しなければならない。

2) 第1回修正案

初期実行可能計画の修正は、統合変数を求めるところからはじまる(図-2(2))。この場合、

$$\pi = 1.17, \pi_{01} = -5.92, \pi_{02} = -1.46, \pi_{03} = 1.47$$

を得る。この結果、統合変数により、各都市の目標カット負荷量が国から指示され、それだけ、

$$-5.92 + 11.7 X_{10}, -1.46 + 23.32 X_{20}, 1.47 + 46.64 X_{30}$$

となる。明らかに、各都市は、国から補助金を受ければ受けほど、カット負荷量の増加を義務づけられる。こうして、図-2の(3)の部分的最適化、すなれど、つぎの3つのLP問題

$$S_1 = \max_{B_i X_i = b_1} \left\{ (0.792, 0.352, 28.320, 19.85) \begin{pmatrix} X_{11} \\ X_{12} \\ X_{13} \\ X_{14} \end{pmatrix} + 5.92 - 11.7 X_{10} \right\}$$

$$S_2 = \max_{B_i X_i = b_2} \left\{ (5.28, 30.352, 5.664, 9.925) \begin{pmatrix} X_{21} \\ X_{22} \\ X_{23} \\ X_{24} \end{pmatrix} + 1.46 - 23.32 X_{20} \right\}$$

$$S_3 = \max_{B_i X_i = b_3} \left\{ (10.56, 14.21, 5.664, 39.7) \begin{pmatrix} X_{31} \\ X_{32} \\ X_{33} \\ X_{34} \end{pmatrix} + 1.47 - 46.64 X_{30} \right\}$$

を解くことによって、図-6の第1回修正案を得る。このとき最適性基準は $S_i \leq 0$ (for $\forall i$) であり、各都市のカット負荷量が、国から指示された目標カット量を下回るように下水道計画を作成することが要請されている(図-2(4))。

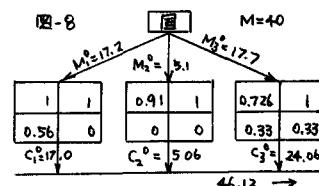
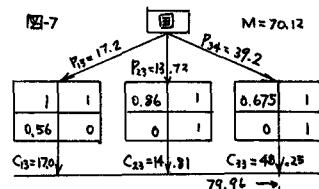
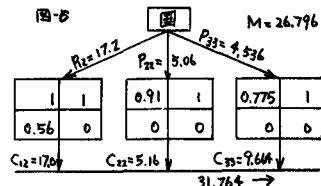
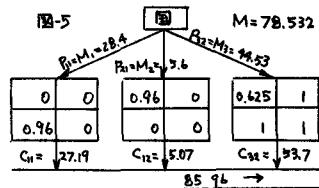
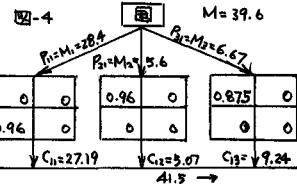
図-6ではMがきわめて小さくなっていることに注意されたい。しかし、図-6の計画では $S_i > 0$ で各都市の計画カット量が、国のもれより大きく、再び計画を修正する必要がある。

3) 第2回修正案

図は、今まで提出された、各都市のすべての計画案を複数して(図-2(5))、新たに、つぎの各都市の目標カット負荷量をつぎのように指示する。すなれど、

$$-1.96 + 11.0 X_{10}, -0.42 + 21.9 X_{20}, 4.60 + 44.1 X_{30}$$

である。今回の X_{10}, X_{20}, X_{30} の係数は、第1回修正案の場合より小さくなっている。これは第1回修正案で、各都市ができるだけ補助金を受け入れないでおくという行為をとったため、今では、国が、各都市に対して、補助金をもう少し余計に使用してよいことを表明している。こうして、2)と同様に、第2回修正案が、図-7のように得られる。この場合、最適性基準を満たしている。



4) 最適解

第2回修正案が $S_1 \leq 0$ (for A₁) を満たしているので、図-2の(5)'(6)により、今までの計画のすべてを調整して、図-8の最適解を得る。これにて、補助金の最適配分は、都市1へ 17.2 億円、都市2へ 5.1 億円、都市3へ 17.7 億円となる。また、このときの各都市の整備によるカット負荷量は、それぞれ 17.4m/day, 5.06m/day, 24.06 m/day である。なお詳しい説明は参考文献⑨を参照されたい。

(4) 補助金についての考察

いま、 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0.6, 0.8, 0.7)$ と固定したときの M の下水道取入れ人口 (P) とカット負荷量 (B) に関する初期五圖示すれば、図-9、図-10を得る。

図-9は、補助金のみの効用を示し、図-10は、都市群の財政に対する追加的なものとの補助金の効用を示している。

図-9より明らかのように補助金のみの効用は、取入れ人口に対してても、カット負荷量に対してても額が大きくなればなるほど減少する。それに比べて、都市群の財政に対する追加的なものと認識すれば、取入れ人口に関する効用は減少するが、カット負荷量の効用は、われわれの数値例において増加する。これは、補助金が増加すれば、整備が、商→住→準→エヘウェイトが強くなりとともに、カット負荷量が増加することから説明がつく。

以上のことから、われわれのモデルに立脚するかぎりにおいて、補助金のみの効用もしくは効果は議論されるべきではなく、都市群の財政力の追加との効用が議論されるべきことが明白である。

5. おわりに

以上のことを総括すれば、以下のようになる。すなまち、

(1) モデルの定式化は、カット負荷量を最大にすることを目的として、各都市が、独自の普及率の目標値を有し、これを拘束条件とし、しかも各都市の財政規模とそれに対する補助金率を制約とした。

(2) モデルの双対問題は、手段としての補助金、整備可能面積、普及人口に帰属価値を与えることにより、カット負荷量を最大とする主問題が、諸手段の評価の点からも、最適計画であることを示している。すなまち、この双対モデルの解が、最小の手段を利用して最大の効果をあげることを表わしている。

(3) 主問題は2レベルシステムで、1レベルパック情報と各都市の下水道整備計画、それに必要な補助金ならびに、各都市の計画カット負荷量の3種類とし、國が、カット負荷量の目標値を補助金の関数として指示する機能を明らかにするため、分解原理で解いた。この結果、各都市が分権的に試行錯誤しながら下水道整備計画を作成し、國がその調整・統合にかかわっている事が明確にシミュレートされている。

(4) 補助金のみでの効用・効果は議論されるべきではなく、都市群の財政能力に対する追加的なものとして認識すべきであることが、われわれのモデルに立つかぎり、明らかとなった。

最後に、本研究の遂行にあたり、(株)日本水道エンサレント取締役下水部長 堀武氏の御助言に謝意を表す。

参考文献

- 1) 堀武 大門良巳 中村正久; 下水道整備計画に関するシステム論的研究, 第9回衛生工学研究討論会(1973), 2) 堀武 喜原良巳 高橋邦夫; 河川汚濁削減のための下水道整備計画に関する事例の研究(下水道会誌技術部), 3) Dantzig, G.B., Linear Programming and Extensions, Princeton (1963), 4) 關根泰次; 數理計画法Ⅱ 基礎基礎論(1968), 5) 喜原良巳 喜原清子; 土木学会第29回国講(1974), 6) 喜原良巳 喜原清子; NSC研究年報 Vol.2 (1974), 7) 和田寅彦; 下水道整備計画のシステム的アプローチ研究論文集叢書, 下水道協会(1973), 8) 小山昭雄; 線型計画入門, 日経文庫(1966), 9) 堀武 喜原良巳; 下水道整備計画システムに関する研究的探討(1974)

