

汚泥の管路流動に関する基礎的研究 (I)

早稲田大学 理工学部 正員 遠藤郁夫
 学生員 ○金沢英夫

1. 緒 論

下水汚泥を管路で輸送する場合、汚泥の流れが層流または遷移領域では、従来の摩擦損失水頭の算定式は使用できない。一方、乱流領域では消化汚泥、活性汚泥および散水汚泥の摩擦損失水頭は水の場合より10~25%大きく、最初沈殿池汚泥およびその他の汚泥とこれらの混合汚泥は水の場合の2~4倍となるといわれている¹⁾。また、Hazen-Williamsの式の係数を汚泥濃度4~6%および8~10%ごそれぞれ清水の60~80%および25~40%として求めたりしている²⁾。現在下水道施設基準解説の算定法はGreelyの場合の清水の1.5~4倍とほとんど同じで、2~4倍としている³⁾。このように、汚泥の摩擦損失水頭の算定は理論的根拠に乏しい。本研究は汚泥の流動特性を考慮して汚泥濃度と摩擦損失水頭との関係について実験的に検討を加えたものである。

流体の速度勾配とせん断応力の一般的関係は次式で表わされる³⁾。

$$\tau = F\left(\frac{du}{dy}\right) \quad (1)$$

ただし、 τ :せん断応力、 du/dy :速度勾配。

円管内の流動の場合、見掛け粘度を μ_a とすると

$$\mu_a = \frac{\tau}{\left(-\frac{du}{dr}\right)} \quad (2)$$

で表わされる。一方、円管内の半径 r の位置におけるせん断応力は

$$\tau = \frac{r}{r_w} \tau_w \quad (3)$$

ただし、 τ_w :壁面摩擦強度、 r_w :管の半径。

となる。(2)式を r から r_w まで積分し、(3)式を代入すると流速は次のようになる。

$$u = \frac{\tau_w}{r_w} \int_r^{r_w} \frac{r \cdot dr}{\mu_a} \quad (4)$$

従って、流量 Q は次のように表わされる。

$$Q = \int_0^{r_w} 2\pi r u dr = \frac{2\pi \tau_w}{r_w} \int_0^{r_w} \left[\int_r^{r_w} \frac{r dr}{\mu_a} \right] r dr = \frac{\pi \tau_w}{r_w} \int_0^{r_w} \frac{r^3 dr}{\mu_a} \quad (5)$$

(3)式から

$$r = \frac{r_w}{\tau_w} \tau \quad \text{あるいは} \quad dr = \frac{r_w}{\tau_w} d\tau \quad (6)$$

(5)式へ(6)式を代入する。

$$Q = \frac{\pi r_0^3}{\tau_0^3} \int_0^{\tau_0} \frac{\tau^3 d\tau}{\mu a} \quad (7)$$

ここで、(8)式で表わされる X を考えると、

$$X = \frac{Q}{\pi r_0^3} \quad (8)$$

(7)式は次のようになる。

$$X \tau_0^3 = \int_0^{\tau_0} \frac{\tau^3 d\tau}{\mu a} \quad (9)$$

τ_0 に関して微分すると

$$\frac{dX}{d\tau_0} \tau_0^3 + 3\tau_0^2 X = \frac{\tau_0^3}{\mu a} \quad (10)$$

ここで、平均流速を V 、管径を D とすると、 $Q = \pi r_0^2 V$ 、および $X = Q/\pi r_0^3 = V/r_0 = 2V/D$ となり、これを(10)式へ代入する。

$$\frac{d\left(\frac{2V}{D}\right)}{d\tau_0} \tau_0^3 + 3\left(\frac{2V}{D}\right) \tau_0^2 = \left(\frac{\tau_0^3}{\mu a}\right)_w \quad (11)$$

右辺の $(\tau_0/\mu a)_w$ は管壁における速度勾配、 $(-du/dr)_w$ であり(11)式は次のように表わすことができる。

$$\left(-\frac{du}{dr}\right)_w = \frac{3}{4} \left(\frac{8V}{D}\right) + \frac{1}{4} \frac{d\left(\frac{8V}{D}\right)}{d\left(\frac{D\Delta P}{4L}\right)} \frac{D\Delta P}{4L} \quad (12)$$

ただし、 $\tau_0 = D\Delta P/4L$ 、 ΔP : 圧力損失、 L : 管長

(12)式はRabinowitch-Mooneyの式として知られている。次に、MetznerとReedは(12)を次のように変形している⁽⁴⁾。すなわち、

$$\frac{d\left(\frac{8V}{D}\right)}{\left(\frac{8V}{D}\right)} = d\left(\ln \frac{8V}{D}\right) \quad (13)$$

また、同様に

$$\frac{d\left(\frac{D\Delta P}{4L}\right)}{\left(\frac{D\Delta P}{4L}\right)} = d\left(\ln \frac{D\Delta P}{4L}\right) \quad (14)$$

ここで、(12)式へ(13)、(14)式を代入すると

$$\left(-\frac{du}{dr}\right)_w = \frac{3}{4} \left(\frac{8V}{D}\right) + \frac{1}{4} \left(\frac{8V}{D}\right) \frac{d \ln \left(\frac{8V}{D}\right)}{d \ln \left(\frac{D\Delta P}{4L}\right)} \quad (15)$$

となり、微分項を次の記号で表わした場合、

$$\frac{1}{n'} = \frac{d \ln \left(\frac{8V}{D}\right)}{d \ln \left(\frac{D\Delta P}{4L}\right)} \quad (16)$$

(15)式は次のように変形できる。

$$\left(-\frac{du}{dr}\right)_w = \left(\frac{3n'+1}{4n'}\right) \left(\frac{8V}{D}\right) \quad (17)$$

n' が一定の場合, (16) 式は積分でき

$$\frac{D \cdot \Delta P}{4L} = K' \left(\frac{8V}{D} \right)^{n'} = K' \left(\frac{4n'}{3n'+1} \right)^{n'} \left(-\frac{du}{dr} \right)_w^{n'} \quad (18)$$

と表わされる。(18) 式は擬塑性流体に関する de Waele-Ostwald の式

$$\tau_w = K \left(-\frac{du}{dr} \right)_w^n \quad (19)$$

に相当しており, n' , K' を定数とした場合, 次の関係がある⁵⁾。

$$n' = n \quad (20)$$

$$K' = K \left(\frac{3n+1}{4n} \right)^n \quad (21)$$

ここで, n は構造粘度指数である。 $n < 1$ のとき擬塑性流体, $n > 1$ のときタイラント流体である。円管内の流れる場合, 広義のレイノルズ数は次のように定義できる⁴⁾。すなわち, Fanning の摩擦係数 f は

$$f = \frac{D \cdot \Delta P}{4L} / \frac{\rho V^2}{2} \quad (22)$$

と表わされ, (18) 式へ代入すると

$$f = \frac{16 K' \cdot 8^{n'-1}}{D^{n'} \cdot V^{2-n'} \cdot \rho} \quad (23)$$

ここで, $f = 16/Re$ とすると, 広義のレイノルズ数は次のようになる。

$$Re = \frac{D^{n'} \cdot V^{2-n'} \cdot \rho}{8^{n'-1} \cdot K'} \quad (24)$$

ただし, ρ : 流体の密度

2. 実験方法

汚泥を管路輸送した場合の摩擦損失水頭の算定には汚泥の流動特性および粘度等を知る必要がある。本実験ではこれらの物性を求めるために管路内の流れと同心円筒型回転粘度計による方法を用いた。管路の実験装置は水槽の高さ 2.45 m, 助走区間 3 m, 圧力損失測定区間 6 m, および管径 2.46 cm の塩化ビニール管を使用した。流速は体積法で, 摩擦損失水頭は汚泥が入り込まないようにした圧力安定装置を通してコメーターで測定した。回転粘度計は国産に示すように同心円筒間に試料を入れ外筒をある速度で回転させた場合に内筒の受けるトルクをトーションワイヤーの振れから算定し粘度を求める方法である。本実験では回転粘度計にシオメーター RM-500 型を使用した。回転粘度計内の速度勾配とせん断応力は次の式で計算した⁶⁾。

$$\frac{G(\tau_b)}{\tau_b} = \phi_s [1 + \alpha(F)] \quad (25)$$

$$\tau_b = \frac{M}{2\pi R_b^2 l} \quad (26)$$

ただし

$$\phi_s = \frac{2S\tau}{\tau_0(1 - 1/5^2)} \quad (27)$$

$$\Delta P = R_1 \left(\frac{d \ln \phi_s}{d \ln \tau_0} \right) + R_2 \left(\frac{d \ln \phi_s}{d \ln \tau_0} \right)^2 \quad (28)$$

$$R_1 = \frac{5^2/1}{25^2} \left(1 + \frac{2}{5} \ln 5 \right) \quad (29)$$

$$R_2 = \frac{5^2/1}{65^2} \ln 5 \quad (30)$$

$$S = \frac{R_c}{R_b} \quad (31)$$

$G(\tau_0)$: 内筒表面の速度勾配 (sec^{-1}), τ_0 : 内筒表面のせん断応力 (dyn/cm^2), M : トルク ($\text{dyn}\cdot\text{cm}$)

Ω : 角速度 (rad/sec), l : 内筒の長さ (cm),

R_b : 内筒半径 (cm),

R_c : 外筒半径 (cm).

$d(\ln \phi_s)/d(\ln \tau_0)$ は測定値より $\ln \phi_s$ 対 $\ln \tau_0$ の勾配から求めた。汚泥は劣性汚泥を用い、各濃度について管路で摩擦損失水頭を、次に回転粘度計で粘度を測定した。

3. 実験結果及び考察

図-2 は管路の実験装置による清水の場合のレイノルズ数と f との関係である。層流領域では $f = 16/Re$ の理論曲線に、一方、乱流領域では Blasius の式 $f = 0.0791 Re^{-0.25}$ に一致しているのが認められた。図-3 は汚泥の濃度と密度との関係を示したものである。汚泥の密度は濃度の増大とともに直線的に増加するのが認められ、これらの関係は次のように表わすことができた。

$$\rho = 0.9991 + 3.21 \times 10^{-3} C$$

ただし, ρ : 密度 (g/cm^3), C : 濃度 (%)

図-4 は汚泥の流速と動水勾配との関係である。層流領域では濃度の増加とともに動水勾配は著しく大きくなるが、乱流領域では若干大きくなるにすぎない。図-5 は(22)および(24)式を用いて計

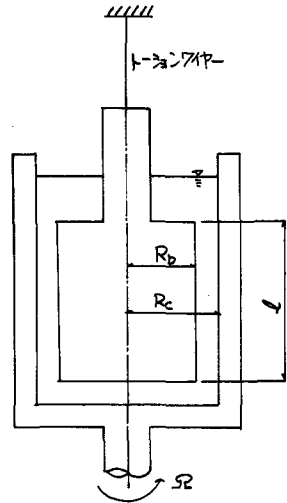


図-1 回転粘度計.

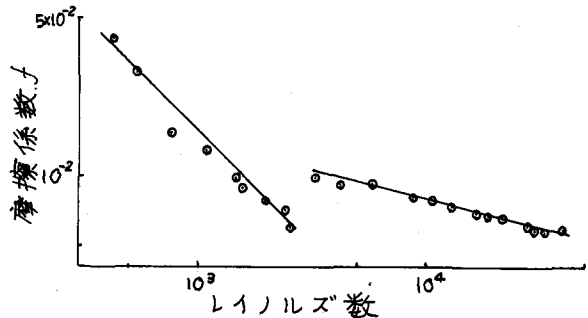


図-2. 清水の場合のレイノルズ数と f との関係.

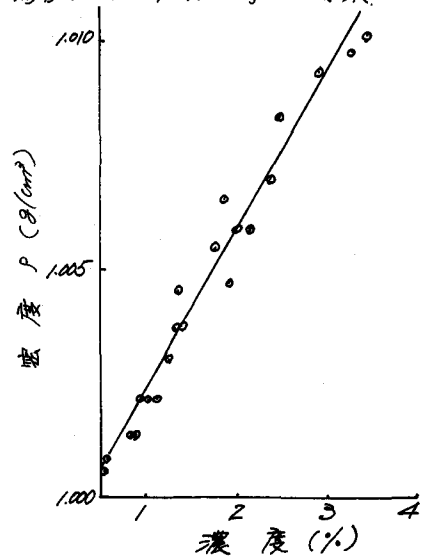


図-3. 汚泥の濃度と密度との関係.

算した汚泥の場合の Re と f の関係であり, 層流領域では $f = 16/Re$, 乱流領域では $f = 0.0149 Re^{-0.0823}$ で表わすことができた。また, 実験レイリス数は 2,000 とすることができた。汚泥を輸送した場合の損失水頭は回転粘度計データから次のようにして計算することが出来る。

例えば, 濃度 23,936 ppm, $\rho = 1.0067 \text{ g/cm}^3$, $D = 246 \mu\text{m}$, $V = 1.0 \text{ m/sec}$, $L = 100 \text{ m}$ の場合, $\lambda = 4f = 0.035$ (予想)。

$$\tau_w = \frac{\rho}{8} \lambda V^2 = \frac{1.0067}{8} \times 0.035 \times 100^2 = 43.7 \text{ dyn/cm}^2$$

図-6の曲線の $\tau_w = 43.7 \text{ dyn/cm}^2$ の点における接線から

$$n = 0.600, \quad R = 1.38$$

となり, (20) および (21) 式から

$$n' = n = 0.600,$$

$$R' = R \left(\frac{3n+1}{5n} \right)^n = 1.38 \times \left(\frac{3 \times 0.600 + 1}{4 \times 0.600} \right)^{0.600} = 1.51$$

従って, 広義のレイリス数は

$$Re = \frac{D^{n'} V^{2-n'} \rho}{8^{n'} \cdot R'} = \frac{246^{0.600} \times 100^{1.400} \times 1.0067}{8^{-0.400} \times 1.51} = 1650$$

図-5 から $f = 0.00970$, $\lambda = 4f = 0.0381$

同様にして, $\tau_w = 48.5 \text{ dyn/cm}^2$, $Re = 1680$ 。

図-5 から $\lambda = 0.0381$, 従って, $\lambda = 0.0381$ とすればよい。損失水頭は $h_f = \lambda \frac{L}{2g} \frac{V^2}{g} = 7.90 \text{ m/100m}$ となる。

図-7, および図-8 はそれぞれ流速 0.5 m/sec , および 1.0 m/sec の場合の計算値と実験値を示したものである。また, 汚泥濃度との関係を見ると, 濃度の増加とともに計算値と実験値の差は大きくなる。

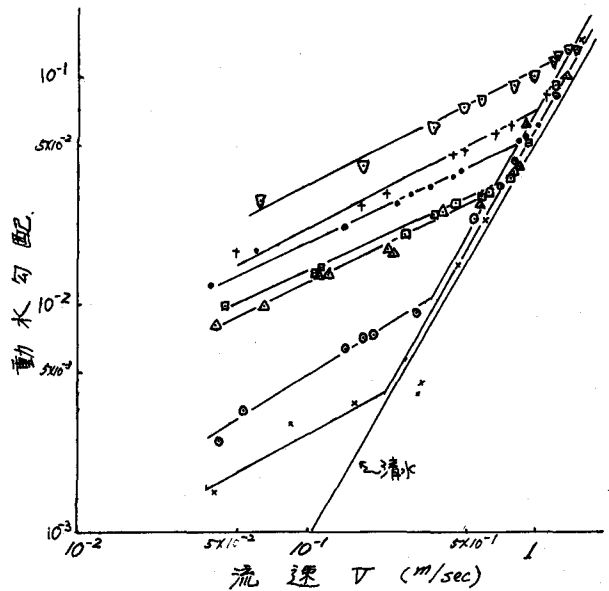


図-4. 汚泥の流速と動水勾配との関係。

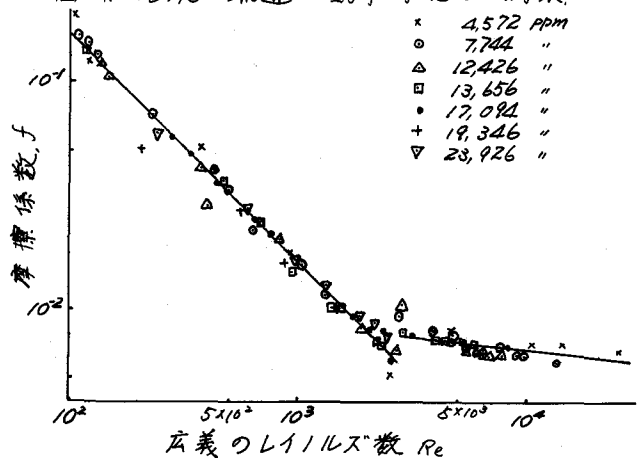


図-5. 汚泥の場合の Re と f の関係。

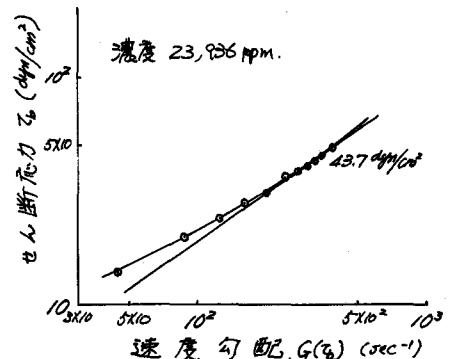


図-6. 汚泥の速度勾配とせん断応力との関係。

る傾向にあった。すなわち、流速 0.5 m/sec の場合 $0.5 \sim 1\%$ 、 $1 \sim 2\%$ および $2 \sim 2.5\%$ の濃度範囲では計算値と実測値の差はそれぞれ $1.0 \sim 4.0\%$ 、 $2.2 \sim 11.0\%$ 、および $2.2 \sim 11.4\%$ であり、一方、流速 1.0 m/sec の場合、前述の濃度範囲での差はそれぞれ $4.3 \sim 9.1\%$ 、 $6.3 \sim 9.9\%$ 、および $9.9 \sim 21.2\%$ であった。

4. 結論

汚泥を管路と回転粘度計で測定し比較検討を行なった。現在までに得られた結論は下記の如くである。

- 1) (22) および (24) 式を用いて汚泥の場合の Re と f の関係が得られた。層流領域では $f = 16/Re$ 、乱流領域では $f = 0.0149 Re^{-0.0828}$ とすることからできた。
- 2) 臨界レイノルズ数は 2000 とすることからできた。
- 3) 管路と回転粘度計から求めた摩擦損失水頭の比較を行なった。計算値は実測値と比較して小さく、汚泥濃度が増すに従ってその差は大きくなることが認められた。汚泥濃度 $1 \sim 2\%$ 、および、流速 $0.5 \sim 1.0 \text{ m/sec}$ の範囲では計算値と実測値との差は 11% 以下であることが認められた。

おわりに、東京都港合下水処理場長 中村正雄、および、処理場各位に深く感謝致します。

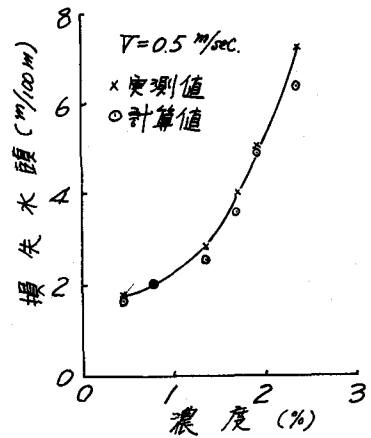


図-7 計算値と実測値の比較

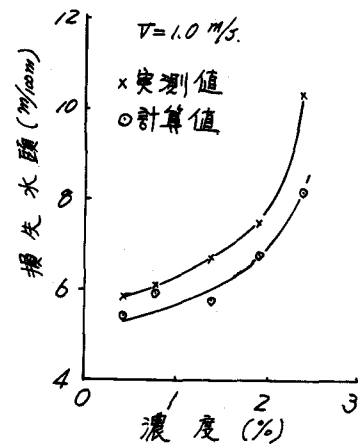


図-8. 計算値と実測値の比較

[参考文献]

- 1) Metcalf & Eddy, Inc., "Wastewater Engineering, collection, treatment, disposal," McGraw-Hill (1972)
- 2) H. E. Bahlert, E. R. Bauman, "Sewerage and Sewage Treatment," John Wiley & Sons, (1958).
- 3) Vaughn C. Behn, "Derivation of Flow Equations for Sewage Sludge," ASCE SA 6 No. 6, p. 59 (1960).
- 4) A. B. Metzner, J. C. Reed, "Flow of Non-Newtonian Fluids - Correlation of the Laminar, Transition and Turbulent-flow Regions," A.I. Ch. E. Jour. Vol. 1, No. 4, p. 434 (1955).

- 5) W. D. Dodge, A. B. Metzner, "Turbulent Flow of Non-Newtonian Systems,"
A.I.Ch.E. Jour, Vol. 5, No. 2, p189 (1959).
- 6) Irvin. M. Krigger, Samuel H. Maron, "Direct Determination of the Flow
Curves of Non-Newtonian Fluids III, Standardized Treatment of
Viscometric Data," Jour. App. Phys. Vol. 25, No. 1. p72 (1954).
- 7) 遠藤 郁夫, 鄭俊錫 「汚泥の管路流動に関する実験的研究」 第4回衛生
工学研究討論会講演論文集 p122 (1967).
- 8) 遠藤 郁夫, 伊藤 三郎 「汚泥の流動性に関する研究」 第5回衛生工学研究
討論会講演論文集 p126 (1968).