

水質の変化とその予報に関する研究 (4)

——成層流における水質変化について——

京都大学 工学部 合田 健

京都大学 工学部 ○ 海老瀬 潜一

1. はじめに

本系の水質変化を予知しようとする場合、その取り扱い方には大きく分けて決定論的方法と確率論的方法の2つがある。その決定論的方法に基いて水質の変化を解析するには、水質に関しての質量保存式である拡散方程式が一般に用いられる。水環境における水質汚濁現象を取り扱っている研究者にとって、流れの水平方向への物質移動に関する研究はいろいろ行なわれてきたが、流れの鉛直方向への物質移動に関する研究は少ない。とくに、密度成層をなす流れを鉛直方向に横切る物質移動に注目した研究は、淡水・二層流の場合の他はあまりみられない。このような現象は、河口部の淡水・二層流や、湖沼・貯水池の成層流において見られ、濁質や溶質の挙動が問題となる。また、特殊な例として沈殿池の密度流の場合もあげることができる。

2. モデル解析

この現象の解析において基本となる拡散方程式は、overallに移流、対流、拡散、沈殿、反応（減衰）などの各項を含むものが考えられる。しかし、その注目する水質因子によっては、それらの項のいくつかが不用か、あるいは、無視できる場合が多い。その上、その境界条件となると、取り扱う水質因子によって異なるし、また、流動状態によっては、貯水池や河口部の成層流のように何層かに分けて解析する方が実用上都合のよいこともある。ここでは一般に密度成層状態を論じ、層を成さない場合は、それをこの中の1つの特殊な場合として取り扱うこととし、対象とする水質因子を、(I)浮遊性物質、(II)溶解性物質、の2つの場合に分けて解析を行なうことにする。

一般に、この現象はダムなどの貯水池への高水時の一時的な濁水流入後の濁質の挙動や、河川・湖沼部や貯水池への有機性汚濁物質流入後の汚濁物質の濃度変化など、時間的な変化を伴う現象が問題となる場合が多い。それゆえ、非定常現象として取り扱うことが望ましいが、流れ系において流れの方向とその鉛直方向への物質移動現象を非定常として解析解を求めることは、一般に困難であり、差分近似などによる電子計算機の数値解に頼ることとなる。また、水質変化に注目してみると、高水後の濁質流下などを除くと、擬似定常あるいは準定常状態として解析することが可能な場合が多く、取り扱いやすくなる。したがって、解析的には定常状態として取り扱い、必要に応じて電子計算機の助けによって非定常状態の差分近似解を求めることにすればよい。また、ここで取り扱う水質変化の現象は、2次元的な流動に、沈殿と減衰反応を伴うものにしぼって考察を進めることにする。成層状態としては線形に近い密度分布から大きな密度変化部を有するものまで存在するが、淡水の二層流や躍層が強く表水層と深水層の二層状態の温度成層流、表水層と深水層の間の変水層が顕著である三層状態に分けられる場合、層を成さない普通の流動状態の場合、の三者を考えることにする。

そして、ここで用いられる解析の基本となるべき水質変化の式は、次のとおりである。

$$\frac{\partial C}{\partial t} + U \frac{\partial C}{\partial x} + W \frac{\partial C}{\partial z} = E_x \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + E_z \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} - W_0 \frac{\partial C}{\partial z} - K \cdot C \quad \text{----- (1)}$$

ここで、 u, w ; E_x, E_z = それぞれ水平 (x 軸), 鉛直 (z 軸) 方向の流速と, 乱流拡散係数,
 w_0 = 水質成分の沈降速度, C = 水質成分の濃度, t = 時間,
 K = 水質成分の減衰速度定数

この(1)式右辺の最後の項の KC の性質としては, 種々の反応をまとめて1次の減衰反応として近似的に表わし, 定数 K には水中生物の摂取に伴なう生体濃縮率も含めて考えるものとする。

この非定常状態の水質変化の理論式(1)は3次元であり, 前述のように各種の初期条件および境界条件についての理論解を求めることは困難である。したがって, 定常状態や, 各層の鉛直方向の断面平均値を用いて水平方向と時間の2次元の問題として取り扱うことになる。それゆえ, 水平方向と鉛直方向の2次元定常状態を考慮する場合, (1)式はつぎの(2)式のようになる。

$$u \frac{\partial C}{\partial x} + w \frac{\partial C}{\partial z} = E_x \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + E_z \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} - w_0 \frac{\partial C}{\partial z} - KC \quad \text{----- (2)}$$

そして, $w + w_0 = w_p$ とおくと,

$$u \frac{\partial C}{\partial x} + w_p \frac{\partial C}{\partial z} = E_x \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + E_z \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} - KC \quad \text{----- (3)}$$

さらに, x 方向の拡散項が他の項に比べて小さく無視できるならば,

$$u \frac{\partial C}{\partial x} + w_p \frac{\partial C}{\partial z} = E_z \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} - KC \quad \text{----- (4)}$$

また, 上述の鉛直方向の断面平均値による非定常1次元の場合は, 上下両面での境界条件を湧源 (あるいは汲源) 項として, 式の中に定数項の形で表わすことなどによって非定常1次元とすることになる。厳密には, (1)~(4)式中の u, w_p, E_x, E_z, K は位置によって異なった値をとるけれども, 以下解析の便宜上, 定数として取り扱い, 主として上記の(4)式を考えることにする。

(I) 浮遊性物質

一般に, 密度成層した流体中に沈降する浮遊性物質は, その流体の密度変化とそれに伴なう粘性の変化の影響を受け, 一様な密度の流体中とは異なった挙動をとる。いま考えようとしている場合は乱流場であるが, その安定した成層状態では各層間の乱れによる混合度は小さく, 浮遊性物質は各層間の内部境界面で次の層へと上から下へ沈降するのを一旦阻止される形となり, 一部は一時抑留されたのちこれを通過し, 残りはその層の下部または中間層に抑留されたまま浮遊し滞留することになる。

例えば, 水温が表面で30℃, 底面で4℃であるような成層状態においては, その水体の温度による密度変化は0.99568から1.00000 g/cm³までで, ほぼ0.432 %程度にすぎないが, 粘性係数は 0.8007×10^{-2} から 1.5674×10^{-2} dyne-sec/cm² までとほぼ半減する。また, 河口感潮部などの淡水-塩水二層流では, その層の上下で塩分による密度差は塩分が25~35 %で1.5 %から2 %程度とその影響は大きく, 粘性係数は塩水部で淡水部より 0.07×10^{-2} から 0.09×10^{-2} dyne-sec/cm² と1 %前後増加するだけでその影響は小さいという違いがある。普通, 浮遊性物質は2~3 μ の粒径を境界として沈降性と非沈降性に分けられるが, ここでは沈降性物質を中心とし, 非沈降性物質は沈降速度が0の特殊な場合として考えることにする。

この水質変化の基本方程式は(4)式であり, 境界条件は, 水表面と底面の他に内部の層境界面の3カ所において考えられる。そして, 底面のみならずこの内部境界面についても浮遊物質再浮上に関する境界条件を拡大して適用を試みることにする。すなわち, 再浮上の現象を記述するパラメータ k_f を, 内部の層境界面における物質移動に関するパラメータ k と, 定義しなおして用いることにする。この k_f は, 層の鉛直安定度などに関係する物理的諸因子および移動する物質固有の性質にも支配されるも

のと考えることができる。そして、一般に、 k の範囲は、 $0 \leq k \leq 1$ であるが、ここで考えている k の範囲は、 $k \leq 1$ で、負の値もとることがありうる。すなわち、図-1 の解析モデルより、三層状態では、

$$\left. \begin{aligned} \text{水表面}(z=0) \text{において, } E_x \frac{\partial C}{\partial z} - \omega_p C &= 0 \\ \text{第1内部境界面}(z=h_1) \text{において, } E_x \frac{\partial C}{\partial z} - k_1 \omega_p C &= 0 \\ \text{第2内部境界面}(z=h_2) \text{において, } E_x \frac{\partial C}{\partial z} - k_2 \omega_p C &= 0 \\ \text{底面}(z=h_3) \text{において, } E_x \frac{\partial C}{\partial z} - k_3 \omega_p C &= 0 \end{aligned} \right\} (5)$$

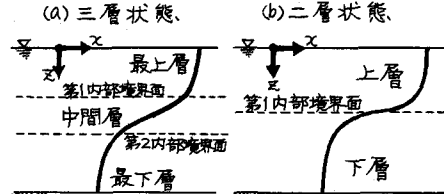


図-1 解析モデル(濃度分布)

二層状態では、第2内部境界面がなくなり、水表面、底面、第1内部境界面の3つとなり、層を成さない一般の流動状態では、水表面、底面の2つの条件となる。

(i) 第1層(最上層)

この場合は、三層状態の第1層と二層状態の第1層といずれも最上層がこれにあたり、実際の現象では、温度成層流の表水層や淡水水二層流の淡水層がこれに相当する。水質変化の基本式は(4)式で、

$$u \frac{\partial C}{\partial x} + \omega_p \frac{\partial C}{\partial z} = E_x \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} - K C \quad (4)$$

その境界条件と起点条件は右の(6)式になる。

まず、 $C = \psi \cdot \exp\left\{-\frac{\omega_p x}{4uE_x} - \frac{\omega_p z}{2E_x}\right\}$ とおくと、

$$u \frac{\partial \psi}{\partial x} = E_x \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - K \psi \quad (7)$$

そして、境界条件と起点条件は(8)式となる。

さらに、 $\psi = \phi \cdot e^{\frac{\omega_p x}{4uE_x}}$ とおくと、

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{E_x}{u} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \quad (9)$$

その境界条件と起点条件は右の(10)式になる。

いま、上の(9)式の特解として、

$$\phi = e^{\frac{\omega_p x}{4uE_x}} (A \cos \lambda z + B \sin \lambda z) \quad (11)$$

境界条件から、 $B = -\frac{K_1}{\lambda} A$ ----- (12) および

$$\left. \begin{aligned} \text{水表面}(z=0) \text{において, } E_x \frac{\partial C}{\partial z} - \omega_p C &= 0 \\ \text{第1内部境界面}(z=h_1) \text{において, } E_x \frac{\partial C}{\partial z} - k_1 \omega_p C &= 0 \\ \text{起 点}(x=0) \text{において, } C &= C_0(z) \end{aligned} \right\} (6)$$

$$\left. \begin{aligned} z=0 \text{ において, } \frac{\partial \psi}{\partial z} &= \frac{\omega_p}{2E_x} \psi \\ z=h_1 \text{ において, } \frac{\partial \psi}{\partial z} &= \frac{\omega_p}{2E_x} (2k_1-1) \psi \\ x=0 \text{ において, } \psi &= C_0(z) \exp\left\{-\frac{\omega_p z}{2E_x}\right\} \end{aligned} \right\} (8)$$

$$\left. \begin{aligned} z=0 \text{ において, } \frac{\partial \phi}{\partial z} &= \frac{\omega_p}{2E_x} \phi = -K_1 \phi \\ z=h_1 \text{ において, } \frac{\partial \phi}{\partial z} &= \frac{\omega_p}{2E_x} (2k_1-1) \phi = -K_2 \phi \\ x=0 \text{ において, } \phi &= C_0(z) \exp\left\{-\frac{\omega_p z}{2E_x}\right\} \end{aligned} \right\} (10)$$

をとれば、これは上式を満足する。したがって、

$$\tan \lambda h_1 = \frac{\lambda (K_2 - K_1)}{\lambda^2 + K_1 K_2} \quad (13)$$

ゆえに、(13)式を満足する λ の正根は無数にあり、それを $\lambda_n (n=1, 2, \dots)$ で表わし、 $\cos \lambda_n z - \frac{K_1}{\lambda_n} \sin \lambda_n z = X_n$ とおくと、上の微分方程式および境界条件を満足する解の組み合わせとして、次の(14)式が得られる。

$$\phi = \sum_n A_n e^{\frac{\omega_p x}{4uE_x}} X_n \quad (14) \quad \text{ここで、} X_n \text{ は } 0 < z < h_1 \text{ の範囲で、次の関係}$$

$$\int_0^{h_1} X_m X_n dz = 0 \quad (15) \quad \int_0^{h_1} X_n^2 dz = \frac{1}{2\lambda_n^2 (\lambda_n^2 + K_2^2)} \{ (\lambda_n^2 + K_1^2) (\lambda_n^2 + K_2^2) h_1 + (K_2 - K_1) (\lambda_n^2 - K_1 K_2) \} \quad (16)$$

が成立し、直交関数系であるから、 X_n の展開によって、 A_n はつぎの(17)式のように表わすことができる。

$$A_n = \frac{2\lambda_n^2 (\lambda_n^2 + K_2^2)}{(\lambda_n^2 + K_1^2) (\lambda_n^2 + K_2^2) h_1 + (K_2 - K_1) (\lambda_n^2 - K_1 K_2)} \cdot \int_0^{h_1} \phi(z) \cdot X_n dz \quad (17)$$

したがって、(9)式の解はつぎのようになる。

$$\phi = 2 \sum_n e^{\frac{\omega_p x}{4uE_x}} \cdot \frac{(\lambda_n^2 + K_2^2) (\lambda_n \cos \lambda_n z - K_1 \sin \lambda_n z)}{(\lambda_n^2 + K_1^2) (\lambda_n^2 + K_2^2) h_1 + (K_2 - K_1) (\lambda_n^2 - K_1 K_2)} \cdot \int_0^{h_1} \phi(\xi) (\lambda_n \cos \lambda_n \xi - K_1 \sin \lambda_n \xi) d\xi \quad (18)$$

そして、 ϕ から ψ 、 ψ から C へと逆に変数を変換してゆくと、(7)式の解に続いて(4)式の解が得られる。

$$C = 2e^{\left\{-\frac{\omega_p x}{4uE_x} - \frac{\omega_p z}{2E_x}\right\}} \sum_n e^{\frac{\omega_p x}{4uE_x}} \cdot \frac{(\lambda_n^2 + K_2^2) (\lambda_n \cos \lambda_n z - K_1 \sin \lambda_n z)}{(\lambda_n^2 + K_1^2) (\lambda_n^2 + K_2^2) h_1 + (K_2 - K_1) (\lambda_n^2 - K_1 K_2)} \cdot \int_0^{h_1} \phi(\xi) e^{\frac{\omega_p \xi}{4uE_x}} (\lambda_n \cos \lambda_n \xi - K_1 \sin \lambda_n \xi) d\xi \quad (19)$$

(ii) 中間層

この場合は、三層状態の第2層がこれにあたり、4層以上ある場合の最上層と最下層を除いた層にもこれが適用でき、二層以下の状態では存在しない。実際の現象では、温度成層流の変水層(躍層部)がこれに相当し、その水質変化の基本式は(i)と同じく(4)式である。また、その境界条件と起点条件は

右の(20)式になる。ただし、この層において、 u を定数として取り扱える場合は限られる。そして、解析上、その取り扱いを容易にする

$$\left. \begin{array}{l} \text{第1内部境界面}(x=h_1) \text{において, } E_x \frac{\partial C}{\partial x} - k_1 \omega_p C = 0 \\ \text{第2内部境界面}(x=h_2) \text{において, } E_x \frac{\partial C}{\partial x} - k_2 \omega_p C = 0 \\ \text{起 点}(x=0) \text{において, } C = C_0(x) \end{array} \right\} (20)$$

ため、 x 軸を水深方向に h_1 だけ平行移動すると、その境界条件と起点条件は下の(21)式のようにになる。

ここで、 $h_m = h_2 - h_1$ である。

以降の解析は、(i)の最上層の場合

$$\left. \begin{array}{l} \text{第1内部境界面}(x=0) \text{において, } \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{\omega_p}{E_x} (2k_1 - 1) = -K_2 C \\ \text{第2内部境界面}(x=h_m) \text{において, } \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{\omega_p}{E_x} (2k_2 - 1) = -K_3 C \\ \text{起 点}(x=0) \text{において, } C = C_0(x) \end{array} \right\} (21)$$

合と同様に進めて、

$$C = 2e^{-(K_2 + \frac{K_3}{2} - \frac{\omega_p}{2E_x})x} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{\omega_p}{2E_x} \lambda_n^2 x} \cdot \frac{(\lambda_n^2 + K_2)(\lambda_n \cos \lambda_n x - K_2 \sin \lambda_n x)}{(\lambda_n^2 + K_2)(\lambda_n^2 + K_3)h_m + (K_3 - K_2)(\lambda_n^2 - K_2K_3)} \cdot \int_0^{h_m} C_0(\xi) \cdot e^{-\frac{\omega_p}{2E_x} \lambda_n^2 \xi} \cdot (\lambda_n \cos \lambda_n \xi - K_2 \sin \lambda_n \xi) d\xi \quad (22)$$

(iii) 第3層(最下層)

この場合は、三層状態の第3層と二層状態の第2層といずれも最下層がこれにあたり、実際の現象

では、温度成層流の深水層と淡水二層流の塩水層がこれに相当する。その水質変化の基本式は(4)式であり、境界条件と起点条件は、

$$\left. \begin{array}{l} \text{第2内部境界面}(x=h_2) \text{において, } E_x \frac{\partial C}{\partial x} - k_2 \omega_p C = 0 \\ \text{底 面}(x=h_3) \text{において, } E_x \frac{\partial C}{\partial x} - k_3 \omega_p C = 0 \\ \text{起 点}(x=0) \text{において, } C = C_0(x) \end{array} \right\} (23)$$

右の(23)式である。これを(ii)の中間層の場合と同様に、解析的な取り扱いを容易にするために x 軸を水深方向に h_2 だけ平行移動する。

ただし、 $h_l = h_3 - h_2$ である。

$$\left. \begin{array}{l} \text{第2内部境界面}(x=0) \text{において, } \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{\omega_p}{E_x} (2k_2 - 1) = -K_3 C \\ \text{底 面}(x=h_l) \text{において, } \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{\omega_p}{E_x} (2k_3 - 1) = -K_4 C \\ \text{起 点}(x=0) \text{において, } C = C_0(x) \end{array} \right\} (24)$$

したがって、解は(ii)と同様に、

$$C = 2e^{-(K_3 + \frac{K_4}{2} - \frac{\omega_p}{2E_x})x} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{\omega_p}{2E_x} \lambda_n^2 x} \cdot \frac{(\lambda_n^2 + K_3)(\lambda_n \cos \lambda_n x - K_3 \sin \lambda_n x)}{(\lambda_n^2 + K_3)(\lambda_n^2 + K_4)h_l + (K_4 - K_3)(\lambda_n^2 - K_3K_4)} \cdot \int_0^{h_l} C_0(\xi) \cdot e^{-\frac{\omega_p}{2E_x} \lambda_n^2 \xi} \cdot (\lambda_n \cos \lambda_n \xi - K_3 \sin \lambda_n \xi) d\xi \quad (25)$$

(iv) 層を成していない場合

この場合は、水表面から底面まで流体の密度が一樣で、通常の水路や河川の流動状態がこれにあたり、成層状態に比べてその流れの乱れや上下の混合度は大きい。そして、その解析的な取り扱いも一

般の水質汚濁の解析の場合と同様になり、底面での浮遊物質再浮上に関する問題となる。その水質変化の基本式は(4)式で境界条件と起点条件は(20)式となる。

$$\left. \begin{array}{l} \text{水表面}(x=0) \text{において, } E_x \frac{\partial C}{\partial x} - \omega_p C = 0 \\ \text{底 面}(x=h_3) \text{において, } E_x \frac{\partial C}{\partial x} - k_3 \omega_p C = 0 \\ \text{起 点}(x=0) \text{において, } C = C_0(x) \end{array} \right\} (26)$$

この解は、(i)の最上層の場合と同じ形になって、(i)の k_1 が k_3 に、 h_1 が h_3 に代わるだけである。

(v) 計算例

右の図-2は、温度躍層が強い二層状態の温度成層流の場合において、表水層中での汚質の濃度分布を解析解の(19)式で図示したものである。

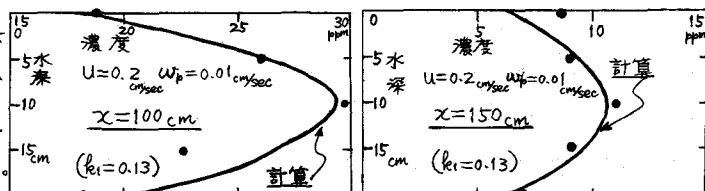


図-2 (a)

図-2 (b)

図中の・印は模型実験による実験値

である。ただし、理論曲線の方は同一沈降速度の粒子によるものであり、実験値の方は同じ沈降速度をその平均値としてもある範囲を有する粒子から成っているもので、厳密な比較にはならないが比較はできる。上図の場合は、内部境界面から下の深水層への通過が多い場合であるが、通過率が小さい場合は、表水層中央部の濃度が内部境界面付近まで変わらずに続くことになる。また、下層の深水層についても、底面で堆積の場合、再浮上がある場合とも、 k_3 の値を変えることによって分布が得られる。

(III) 溶解性物質

溶解性物質の場合も密度成層流体中においては、一様な密度分布の流体中とは異なった挙動をとる。すなわち、安定した成層状態では、静止水中や層流中とはもとより、乱流であってもその密度急変部を通しての物質移動は抑制される。ここで取り扱う安定した成層流体中では、各層間の乱れによる混合度は小さく、したがって、その内部境界面付近の拡散係数の減少に伴ない、その溶解性物質の濃度の $flux$ は小さくなり、その内部境界面の上下における濃度の均一化の傾向はかなり阻止されることになる。そして、淡塩水二層流の場合の塩分の拡散も、層の安定な状態については同様に扱うことができる。これを浮遊性物質の場合と同様のモデル解析によって取り扱うとすると、その基本となる拡散方程式においては沈殿項がなく、境界条件においては、粒子の沈降に伴う条件がなくなり、鉛直方向の物質移動は流れの乱れによる $flux$ に支配されると考えられる。すなわち、水質変化の式は、

$$u \frac{\partial C}{\partial x} + w \frac{\partial C}{\partial z} = E_x \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + E_z \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} - KC \quad (27)$$

そして、水平 (x 軸) 方向の拡散項と対流項が他の項に比べて無視できる場合は、次の (28) 式になる。

$$u \frac{\partial C}{\partial x} = E_x \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - KC \quad (28)$$

また、境界条件は浮遊性物質の場合と同様に、水表面、底面および内部の層境界面でそれぞれの物質収支をとって考える。水表面では物質の出入りがなく、底面では物質の出入りが一定であるか、線形の流出入があるか、あるいは、出入りがない場合を考える。そして内部の層境界面では、物質移動の $flux$ が層の鉛直安定度やその内部境界面での乱れの状態の程度などによって決まる定数 γ に従うものとする。これは浮遊性物質の場合の k とは異なり、対流の有無に関係なく、正、負、零のいずれの場合もありうる。すなわち、その内部境界面で上下どちらか方向への濃度 $flux$ があるか零であるかである。これを浮遊性物質と同じモデルで、最上層、中間層、最下層に分けて、式で表示すると、

$$\left. \begin{array}{ll} \text{水表面} & (z=0) \text{において, } E_x \frac{\partial C}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial C}{\partial x} = 0 \\ \text{第1内部境界面} & (z=h_1) \text{において, } E_x \frac{\partial C}{\partial x} = \gamma_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial C}{\partial x} = F_1 \\ \text{第2内部境界面} & (z=h_2) \text{において, } E_x \frac{\partial C}{\partial x} = \gamma_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial C}{\partial x} = F_2 \\ \text{底面} & (z=h_3) \text{において, } E_x \frac{\partial C}{\partial x} = \gamma_3 \text{ or } \eta(C_0 - C) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial C}{\partial x} = F_3 \text{ or } \gamma(C_0 - C) \end{array} \right\} \quad (29)$$

とくに、二層状態では第2内部境界面がなくなり、水表面、第1内部境界面、底面の3つの条件となる。さらに層を成さない一般の流動状態では、水表面と底面の条件の2つだけとなる。この理論的な解析の起点条件となる $x=0$ の境界条件としては、浮遊性物質の場合と同様に、その鉛直方向の濃度分布が一様分布か、直線状分布か、放物形分布か、指数関数形分布で近似した解析モデルの用いられることが多い。これらは、 $C_0(x) = a_0 x^2 + b_0 x + c_0$ あるいは、 $C_0(x) = C_0 e^{-\frac{x}{L}}$ などで表示できる。

また以下の解析は、浮遊性物質の場合とは基礎になる方程式と境界条件が異なるため、Laplace変換などによって解析解を求めることになる。また、(i)最上層、(ii)中間層、(iii)最下層の3つの場合とも境界条件が $\frac{\partial C}{\partial x} = \text{const.}$ の形で表わされる場合は、同様の取り扱いとなるのでその一例をあげる。

(i) 最下層の例

その基本式は (28) 式で、境界条件は右の (30) 式になる。

$$\left. \begin{array}{ll} \text{第2内部境界面} & (z=0) \text{で, } \frac{\partial C}{\partial x} = F_2 \\ \text{底面} & (z=h_2) \text{で, } \frac{\partial C}{\partial x} = F_3 \\ \text{起点} & (x=0) \text{で, } C = C_0(x) \end{array} \right\} \quad (30)$$

ただし、この最下層と中間層の場合は、(I)の場合と同様に解析の便宜上、 x 軸の平行移動を行なう。

$C = C_0 \cdot e^{-\alpha x}$ とおくと、(28)式は次式となる。

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \mu \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \quad \text{----- (31)}$$

そして、境界条件は右の(32)式になる。

$$\left. \begin{array}{l} \text{第2内部境界面}(z=0) \text{において,} \\ \text{底面}(z=h_2) \text{において,} \\ \text{起点}(x=0) \text{において,} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{\partial \phi}{\partial z} = F_2 \cdot e^{-\alpha x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} = F_3 \cdot e^{-\alpha x} \\ \phi = C_0(z) \end{array} \quad (32)$$

今考えている解析モデルにおいては、水平方向距離 x をその性質から時間 t のように考えると、 $\int_0^\infty \phi(x, z) \cdot e^{-sx} dx = C(s, z)$ とおき Laplace 変換によって、(31)式は次の(33)式になる。

$$\frac{d^2 C(s, z)}{dz^2} - \frac{1}{\mu} s C(s, z) = -\frac{1}{\mu} C_0(z) \quad \text{----- (33)}$$

その境界条件は右の(35)式になり、 $C_0(z) = a_0 z^2 + b_0 z + C_0$ のとき、 $\left. \begin{array}{l} z=0 \text{ において,} \\ z=h_2 \text{ において,} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{dC(s, z)}{dz} = \frac{F_2}{s-\alpha} \\ \frac{dC(s, z)}{dz} = \frac{F_3}{s-\alpha} \end{array} \quad (35)$

$$C(s, z) = A e^{\frac{\sqrt{s-\alpha}}{\mu} z} + B e^{-\frac{\sqrt{s-\alpha}}{\mu} z} + \frac{1}{s} (a_0 z^2 + b_0 z + C_0) + \frac{2a_0 \mu}{s^2} \quad \text{--- (34)}$$

したがって、境界条件から係数 A, B を定め、逆変換および変数変換より、 $C(s, z)$ および C が求まる。

$$C = e^{-\alpha x} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{F_2}{2} e^{-\frac{\alpha x}{2}} \left[e^{\frac{(2n+1)h_2-z}{2\sqrt{\mu x}}} \operatorname{erfc} \left[\frac{(2n+1)h_2-z}{2\sqrt{\mu x}} \right] - \sqrt{\alpha x} e^{\frac{(2n+1)h_2-z}{2\sqrt{\mu x}}} \operatorname{erfc} \left[\frac{(2n+1)h_2-z}{2\sqrt{\mu x}} + \sqrt{\alpha x} \right] \right] + e^{\frac{(2n+1)h_2+z}{2\sqrt{\mu x}}} \operatorname{erfc} \left[\frac{(2n+1)h_2+z}{2\sqrt{\mu x}} \right] - \sqrt{\alpha x} e^{\frac{(2n+1)h_2+z}{2\sqrt{\mu x}}} \operatorname{erfc} \left[\frac{(2n+1)h_2+z}{2\sqrt{\mu x}} + \sqrt{\alpha x} \right] \right] \right. \\ \left. - \frac{F_3}{2} e^{-\frac{\alpha x}{2}} \left[e^{\frac{(2n+1)h_2-z}{2\sqrt{\mu x}}} \operatorname{erfc} \left[\frac{(2n+1)h_2-z}{2\sqrt{\mu x}} \right] - \sqrt{\alpha x} e^{\frac{(2n+1)h_2-z}{2\sqrt{\mu x}}} \operatorname{erfc} \left[\frac{(2n+1)h_2-z}{2\sqrt{\mu x}} + \sqrt{\alpha x} \right] \right] + e^{\frac{(2n+1)h_2+z}{2\sqrt{\mu x}}} \operatorname{erfc} \left[\frac{(2n+1)h_2+z}{2\sqrt{\mu x}} \right] - \sqrt{\alpha x} e^{\frac{(2n+1)h_2+z}{2\sqrt{\mu x}}} \operatorname{erfc} \left[\frac{(2n+1)h_2+z}{2\sqrt{\mu x}} + \sqrt{\alpha x} \right] \right] \right. \\ \left. - (2a_0 h_2 + b_0) \left[\frac{1}{2\sqrt{\mu x}} e^{\frac{(2n+1)h_2-z}{2\sqrt{\mu x}}} \operatorname{erfc} \left[\frac{(2n+1)h_2-z}{2\sqrt{\mu x}} \right] + 2\left(\frac{\mu x}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} e^{\frac{(2n+1)h_2-z}{2\sqrt{\mu x}}} \operatorname{erfc} \left[\frac{(2n+1)h_2-z}{2\sqrt{\mu x}} + \sqrt{\alpha x} \right] \right] - (2n-1)h_2 e^{-\frac{\alpha x}{2}} \operatorname{erfc} \left[\frac{(2n-1)h_2-z}{2\sqrt{\mu x}} \right] \right. \\ \left. + b_0 \left[\frac{1}{2\sqrt{\mu x}} e^{\frac{(2n+1)h_2-z}{2\sqrt{\mu x}}} \operatorname{erfc} \left[\frac{(2n+1)h_2-z}{2\sqrt{\mu x}} \right] - (2n+1)h_2 e^{-\frac{\alpha x}{2}} \operatorname{erfc} \left[\frac{(2n+1)h_2-z}{2\sqrt{\mu x}} \right] + \frac{1}{2\sqrt{\mu x}} e^{\frac{(2n+1)h_2+z}{2\sqrt{\mu x}}} \operatorname{erfc} \left[\frac{(2n+1)h_2+z}{2\sqrt{\mu x}} \right] - (2n+1)h_2 e^{-\frac{\alpha x}{2}} \operatorname{erfc} \left[\frac{(2n+1)h_2+z}{2\sqrt{\mu x}} \right] \right] + (a_0 z^2 + b_0 z + C_0) + 2\mu a_0 x \right\} \quad \text{----- (36)}$$

ここで、最上層の場合は、(36)式で $F_2 \rightarrow 0, F_3 \rightarrow F_1, h_2 \rightarrow h_1$; 中間層の場合は、 $F_2 \rightarrow F_1, F_3 \rightarrow F_2, h_2 \rightarrow h_m$ とすればよい。

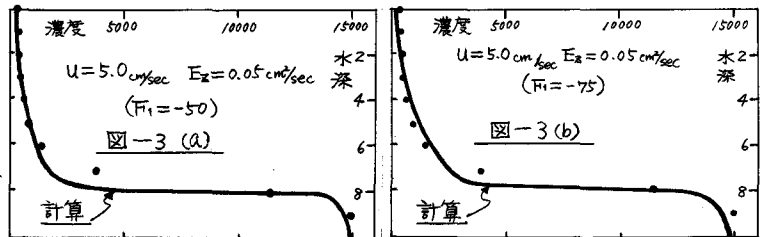
また、同じ境界条件で起点条件が $C_0(z) = C_0 \cdot e^{-\frac{\alpha z}{2}}$ の場合や、底面における境界条件が $\frac{\partial C}{\partial z} = \nu \cdot (C_b - C)$ すなわち、線形流出入の場合についても上記の面方の起点条件に関して同様の解析解が得られる。ただし、 C_b は底面における底質側の濃度であり、 ν はその速度定数である。

(ii) 層を成していない場合

この場合も浮遊物質の場合と同様に、密度の均一な流体中での物質移動現象となり、普通の河川や水路の状態として解析することになる。その基本式は(28)式で、境界条件は、水表面と底面だけとなり、(i)の最下層の場合の解析解の(36)式において、 $F_3 = 0$ とすれば、それがこの場合の解となる。

(iii) 計算例

右の図-3は、安定な淡塩水二層流の上層部への塩分の移動について、解析解を適用した例であり、図中の・印はこの場合の模型実験の実測値である。こ



のように F が大きく、鉛直方向の物質移動量の大きい場合だけでなく、 F が小さく鉛直方向の物質移動量の小さい場合についても、同様に、この解析モデルの適用ができる。

3. 模型実験

浮遊性物質に関する実験は、沈殿によるものに注目して貯水池成層流の場合について実験を行なった。浮遊性物質の流れへの供給は、瞬間的な場合と連続的な場合との2つが考えられ、それぞれ、点状、線状、面状の物質供給の場合がある。沈降性の浮遊物質の相当な量を短時間でしかも均一に発生(注入)させることは、注入点での多量の沈殿発生など実験操作上困難なことが多いので、連続注入の場合について実験を行なった。また、成層していない密度の均一な分布状態においても、成層状態との比較のために同じ貯水池模型実験槽で実験を行なった。

貯水池の模型実験装置は、本水路と補助水路、採水装置および測定機器から成り、図-4にその概要を示す。本水路は幅60cm、長さ500cm、深さが上流端で30cm、下流端で130cmと $\frac{1}{2}$ の底面勾配を有している。一方の側面は観察用のガラス面であり、他はステンレス面で保温材が入っており、人工的に温度成層状態をつくり出すために底面に冷却装置がついている。この本水路の前部に、同じ幅、同じ底面勾配で、長さ100cmの補助水路と流入調整槽が付属しており、ここで一旦浮遊物質を完全混合して、均一濃度の流入水として流入させる。採水装置としては、内径3mmの銅管を5cm間隔で水深方向にいくつか並べたものを流下方向に6カ所設置した。実験は、一定流量、一定濃度の浮遊物質の連続供給方式で行ない、採水は浮遊物質注入後の時間経過に伴って行なったものと、一定時間後のほぼ平衡状態で行なったものがある。浮遊性物質としては、粒径の小さいカオリンと粒径の大きい光降性炭酸カルシウムを用いた。そして、貯水池の流動状態を大きく左右する下流端での放流形態として、overflow方式のものと、水表面下20cmからの放流のものについて実験・検討している。

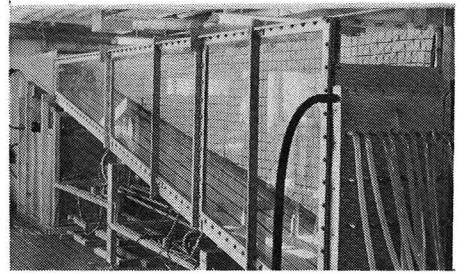
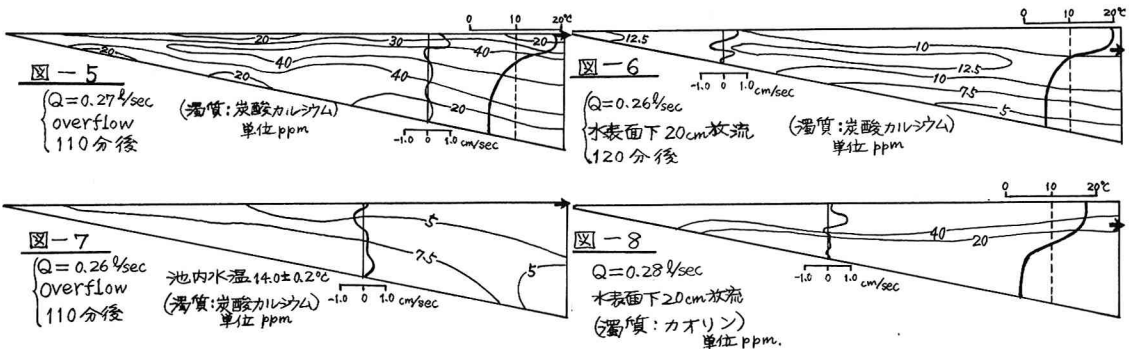
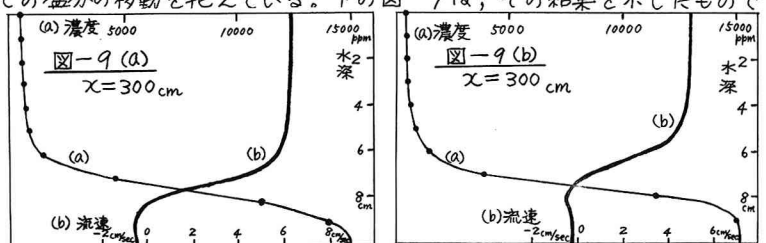


図-4 貯水池模型実験槽

その実験結果の濁質の濃度分布を、その水温分布、流速分布と併せて下の図-5～8に示す。濁質の濃度分布の時間変化から、沈殿堆積量は別にして、一定時間経過すると濃度変化はほぼ平衡状態となる。また、粒径の細かいカオリン粒子はほとんど沈降せず流過してしまうが、粒径の粗い炭酸カルシウムは沈降速度も大きく、一部は躍層部とその上部にとどまる。そして、流出水の放流形態によって貯水池内の流動状態が変化し、流出端付近および流出水の濃度分布が異なってくる。また、層を成していない場合は、流下方向に断面の変化する沈殿池のような状態となり、底部の濃度が高くなる。



溶解性物質の場合は、浮遊性物質と同様に減衰反応のない場合について、幅20cm、長さ10m、深さ40cmの淡塩水二層流の模型実験槽において実験を行なった。この実験では、下方の塩水層から上方の淡水層への溶解物質としての塩分の移動を捉えている。下の図-9は、その結果を示したものであるが、上層の流速 U がかなり大きく、 F および E_s も大きい場合である。 F の値が小さく安定な状態では、境界面の上下の移動量は少なくなる。



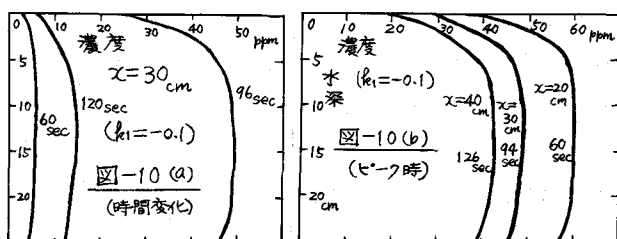
4. 電子計算機による数値解法

物質移動に関する偏微分方程式の理論解を得ることは、先述のようにその次元の数や境界条件からみて困難なことが多い。そして、理論解を実際の現象に適用するには、その場の幾何的な形状や各種の係数のラフな仮定、および理論解の複雑さを補うために、電子計算機による拡散方程式の差分解法によって数値解を得ることもできる。すなわち、基本式(1)は下のように前進差分で表示できる。

$$\frac{C(l, m, n) - C(l, m, n-1)}{\Delta t} + u(l, m, n) \cdot \frac{C(l, m+1, n) - C(l, m, n)}{\Delta x} - \omega_p(l, m, n) \cdot \frac{C(l, m, n+1) - C(l, m, n)}{\Delta z} = -\kappa(l, m, n) \cdot C(l, m, n) + E_x(l, m, n) \cdot \frac{C(l, m+1, n) + C(l, m-1, n) - 2C(l, m, n)}{(\Delta x)^2} + E_z(l, m, n) \cdot \frac{C(l, m, n+1) + C(l, m, n-1) - 2C(l, m, n)}{(\Delta z)^2} \quad (37)$$

上式(37)を同様に差分式近似した境界条件とともに、収束および安定条件を満たすようにして計算を進めればよい。(37)式は、時間、縦断方向および鉛直方向の3次元であるが、定常状態を考慮するならば縦断および鉛直方向に幅(横断)方向を加えて、同様の差分式により数値解を求めることができる。

ここでは、計算例として、 $\kappa=0$ 、すなわち、減衰反応のない浮遊性物質が一時的に供給される場合をあげてみる。右の図-10は、流入端断面で一様かつ高濃度の濁質が瞬間的に流入した場合の濃度分布が、時間経過および流下距離にしたがって徐々にフラットに変化する様子を数値計算したものである。また、 k_1 の値によって分布形の尖りが異なってくる。



5. おわりに

貯水池の成層状態や河川感潮部の淡塩水二層流に注目し、その水質変化の現象を浮遊性物質と溶解性物質に分けて、その鉛直方向の境界面を通しての物質移動を含めたモデル化によって捉えてみた。このモデル解析において基本となる微分方程式には、移流、対流、拡散の各項に加えて、沈殿と減衰および生体濃縮の項も考慮した。しかし、この減衰および生体濃縮の項は、一次反応式での表示も可能であるが、その適用には限界がある。とくに、溶存酸素のように大気から水表面を通しての供給があり、水中での酸化・還元反応に寄与し、水中生物の存在によってその呼吸作用だけでなく、光合成作用による影響を受けて複雑な変化をし、一次反応では簡単に表わし得ないものもある。また、浮遊性物質の場合の内部境界面における沈降の阻止による通過率とも言うべき係数 k_1 、 k_2 の大きさや、溶解性物質の場合の内部境界面での物質移動の係数 k_1 、 k_2 の大きさは、層の鉛直安定度や内部境界面の乱れの大きさなどの水理因子との関係について、さらに観測・実験を加えた詳しい検討が必要である。

参考文献

- (1) 合田、海老瀬；「水質の変化とその予報に関する研究(3)」 第6回衛生工学研究討論会 (昭45.1)
- (2) 合田；「上水浄化における基礎的諸問題」 京都大学学位論文 (昭31)
- (3) 高松、内藤、芝；「矩形沈殿槽における沈殿物の再浮上に関する一考察」 土木学会論文報告集 第183号 (昭45.11)
- (4) Takemura； "A model experiment referring to the cause of the formation of the turbid layer in the lake." 1959, J. of the Fk. of Lib. Arts and Sci., Shinshu Univ. No. 5
- (5) Idays, Beckett； "The flow of minerals through the thermocline of a lake." Arch. f. hydrobiol. Vol. 51, No. 3, (1956)
- (6) Mortimer； "The exchange of dissolved substances between mud and water in lake." J. of Ecol. Vol. 29, 30 (1941, 42)
- (7) Carslaw, Jaeger； "Conduction of Heat in Solids." Oxford Univ. Press (1959)