

フロック形成過程の数値設計に関する研究

北海道大学工学部 工博 正会員 丹保憲仁
 同 学生員 渡辺義公

1. はじめに

現在まで、凝集-フロック形成-沈殿-浮上の行程で行なわれている conventional な水処理過程においての主要プロセスの一つであるフロッキュレーターの設計は、単なる滞留時間とバドルの周辺速度を規定して（水道施設基準）設計を行なう程度で確たる設計手段を持っていない。

本論文の目的は著者等が前報⁽¹⁾において明らかにした未だフロック形成過程の基本式を、電子計算機により解いて得られた数値解を基にして検討することによりフロック形成過程を数値化し、更に進んで、フロッキュレーターへ合理的設計法を確立することである。

2. フロック形成の基本式

前報⁽¹⁾で示したように、局所等方性乱流理論に基づき、粘性領域内でのマイクロな拡散が律速となる乱流拡散によってフロッキュレーター内でのフロックの衝突合-が進行するとして(1)式のようなフロック形成の基本式が与えられた。(1)式は過大成長フロックの破壊を考えず、直径 d_i の初期粒子が R 個集ったフロックの個数比が、フロック形成攪拌時間(m)の経過に伴ってどのように変化するかを示したものである。その結果、フロック形成過程が、 m 値、 S_m 値、 K_p 値の三つの無次元指標で一義的に表示できるようになり、定量的扱いが可能になった。

$$\frac{dN_R}{dm} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{R-1} \left[i^{\frac{1}{3-K_p}} + (R-i)^{\frac{1}{3-K_p}} \right] N_i N_{R-i} - N_R \sum_{i=1}^{S-R} \left(R^{\frac{1}{3-K_p}} + i^{\frac{1}{3-K_p}} \right)^3 N_i \quad \text{----- (1)}$$

$$\sum_{i=1}^S i N_i = 1$$

ここで、 N_i 、 N_R ：初期粒子が i 、 R 個集って出来た粒子の数 n_i 、 n_R の初期粒子数 n_0 に対する割合（ $N_i = n_i/n_0$ 、 $N_R = n_R/n_0$ ）、 m ：無次元化攪拌時間（フロック形成時間）、 S ：与えられた攪拌条件下で成長し得る最大成長粒子への初期粒子の集合個数、 K_p ：フロック密度関数の指数。 m 、 S 、 K_p はそれぞれ次式で定義される。

$$m = 1.22 \sqrt{\varepsilon_x / \mu} d_i^3 n_0 t \propto G_x C_0 t \quad \text{----- (2)}$$

$$S = S_m^{\frac{3-K_p}{3}} \quad S_m = (d_{max} / d_i)^3 \quad \text{----- (3)}$$

$$p_e = p_s - p_0 = a / (d_s / i)^{K_p} \quad \text{----- (4)}$$

$$d_{max} = K E_0^{-\frac{3}{2(3+K_p)}} = K' G_x^{-\frac{3}{3+K_p}} \propto N_R^{-\frac{p}{2(3+K_p)}} \quad \text{----- (5)}$$

ここで、 E_0 ：単位時間内に単位体積の流体内で失われるフロック形成に有効なエネルギー量〔erg/cm³・sec〕、 d_i 、 n_0 ：フロック形成池へ流入して来る初期粒子の直径〔cm〕と個数〔1/cm³〕、 t ：攪拌時間〔sec〕、 G_x ：総攪拌エネルギー指標 $= \sqrt{\varepsilon_x / \mu}$ 〔1/sec〕、 E_x ：フロック形成池全体の総エネルギー消費率（0.1 ~ 0.2 $E_0 \div \varepsilon_0$ ）、 C_0 ：初期粒子群の体積濃度 $d_i^3 n_0$ に比例し近似的に原水濁度（

C_T に比例する〔無次元〕, ρ_e : フロックの有効密度〔 $\frac{g}{cm^3}$ 〕, ρ_s : フロックの実密度〔 $\frac{g}{cm^3}$ 〕, ρ_0 : 水の密度〔 $\frac{g}{cm^3}$ 〕, d_s : フロックの直径〔cm〕, a , K_g : 凝集条件によって決まる定数, S_m = フロックの最大成長度〔無次元〕, d_{max} : 与えられた条件下で成長し得る最大フロック径〔cm〕, N_r : 攪拌軸の回転数〔r.p.m〕

これらの関係から明らかなように, 最大成長度 S_m (操作側から言えばフロックをどこ迄成長させるか) と密度関数の指数 K_g (主に凝集の際の凝集割合と濁質量の比—ALT比⁽²⁾—により決められる) が与えられれば, フロック形成は無次元指標 m のみに従う。

3. フロック形成基本式の数値解

(1) 式の数値解は北大大型計算機センター所属のFACOM 230-60を用いて, Runge-Kutta-Gill 法による数値積分により求めた。FACOM 230-60のメモリーは約40000であり $S=10000$ 迄の解を得ることは計算時間を考えなければ不可能である。 $K_g=1.5$ とすると(4)式から $S_m=10^8$ 迄の解を得る事ができ, 実用範囲を十分にカバーすることができ。その計算結果を $S=50$, $K_g=1.2$ について, 横軸に無次元化攪拌時間(m), 縦軸にR倍粒子の体積百分率をとり図示すると図-1となる。図から明らかなように, $m=0.1 \sim 0.2$ で急激なフロック組成の変化が起こり $m=0.5$ では90%以上 ($R_{40} \sim R_{50}$ 中のほとんどすべてが R_{50} 粒子である)が最大成長粒子で占められ, 図-2に示されている実験結果とかなり異なるパターンを示している。

過去における研究例として,

FairとGemmel⁽³⁾はSmoluchowskiにより与えられた速度勾配によるフロック形成式(6)も電子計算機で解き数値解を求めている。

$$\frac{dn_k}{dt} = \frac{2}{3} \frac{du}{dz} \left[\sum_{i=1}^{K-1} n_i n_j (R_i + R_j)^3 \right] - 2n_k \sum_{i=1}^{\infty} n_i (R_i + R_k)^3 \quad (6)$$

ここで, $n_{k,i,j}$: K, i, j 倍粒子の個数〔 $\frac{1}{cm^3}$ 〕, R_i, R_j : i, j 倍粒子の衝突半径〔cm〕, $\frac{du}{dz}$: 衝突が起こる点における速度勾配, である。

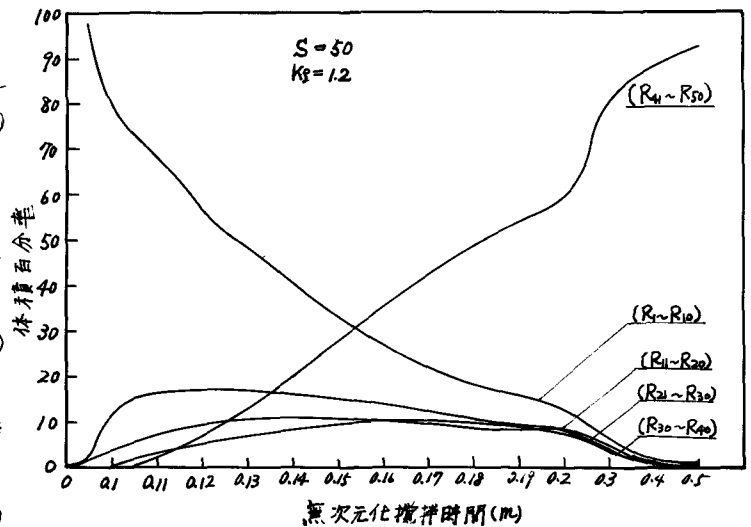


図-1

最大成長粒子を規定し, それ以上の大きさの粒子を作る衝突においては, 衝突した二粒子は衝突前の二粒子に戻ると仮定した計算結果が図-3, 等しい体積を持つ10個の粒子に解体すると仮定した計算結果が図-4である。また, HarrisとKauffman⁽⁴⁾は(6)式を最大成長粒子以上の粒子は等しい体積の二粒子に解体するとして数値計算した結果が図-5である。いずれについても, 図-2に示されるような実験結果のパターンを示している事は明白であろう。

図-3中のGは速度勾配
 N_0 は初期粒子数, Tは粒子
 数が半になる時間, t_f は
 実フロック形成時間であり
 図-5中の θ はフロック形
 成因子である。なお, (6)式
 は層流中でのフロック形成
 に対し適用されるべきも
 のであり, 実際のフロッキ
 ュレーター内でのフロック
 形成には適用しえない。

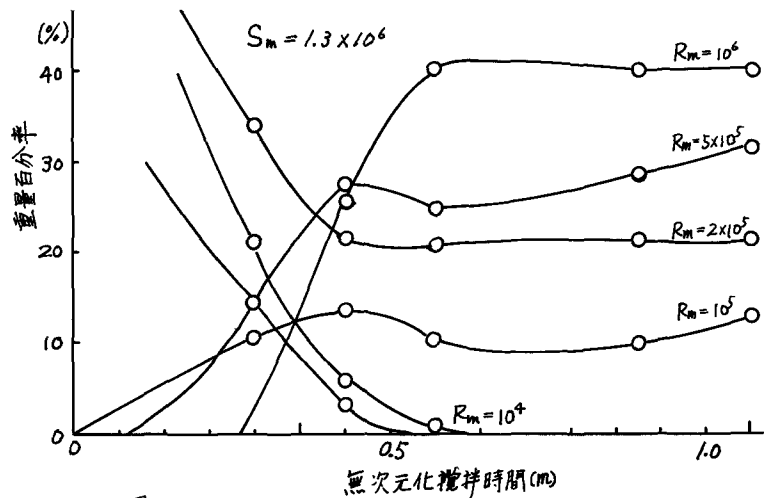


図-2

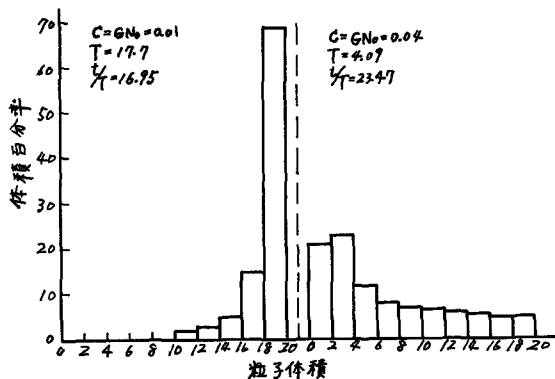


図-3

$C = GN_0 = 0.04$
 $T = 4.07$
 $t_f = 23.47$

図-4

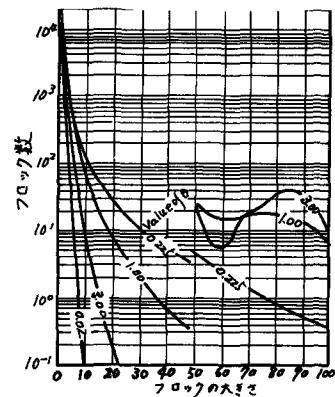


図-5

4. Rapid Coagulation と Slow Coagulation

以上の様な矛盾が生じたのは, (1), (1)式とも衝突した粒子は必ず合一すると云う Rapid Coagulation のプロセスも直接的に採用したことによる。Smoluchowski により与えられた Brown 運動を, driving force とする凝集速度式の解は(7)式で与えられ, 凝集の初期段階において非常に良く実験結果と一致する事が多く報告されている。

$$N_t = \sum_{k=1}^{\infty} N_k \frac{N_0}{1 + 4\pi D_1 R N_0 t} = \frac{N_0}{1 + t/T} \quad (7)$$

ここで, N_0 : 凝集開始時に ($t=0$) 存在する全粒子数 [$1/cm^3$], N_t : 凝集時間 ($t=t$) において存在する全粒子数 [$1/cm^3$], D : 衝突合一する粒子の相互拡散係数 [cm^2/sec], R : 粒子の衝突半径 [cm], $T: 1/4\pi D R N_0$ (8) は Coagulation Time, 即ち全粒子数が初期全粒子数の半分になる時間であり放射性元素の半減期に相当する [sec], t : 実凝集時間 [sec].

Smoluchowski⁽⁵⁾ は衝突した粒子がすべて合一する場合を Rapid Coagulation とし, その際, Coagulation Time(T) は(8)式であり, 衝突した粒子の内のある割合 (α) のみが合一する場合を,

Slow Coagulationとし、その際の Coagulation Time を(9)式で表わした。

$$T = 1 / 4 \pi D_1 R n_0 \alpha \quad \text{-----} (9)$$

(7)式を(8), (9)式を用いて図示すると図-6となる。従って、単に時間のスケールを変化させることによって、Smoluchowskiの提唱したRapid CoagulationとSlow Coagulationのプロセスは全く同一のものを見ることが出来、形成される粒子の組成は等しいものとなる。またHahnとStumm⁽⁶⁾はSmoluchowskiと同様の見地に立って、衝突合-確率 (Factor of Collision Efficiency) を考え、理論によるRapid Coagulationの凝集速度と実験により求めた凝集速度とを比較して種々の凝集条件下における衝突合-確率を求めた。図-7は衝突合-確率(α)をpHをパラメーターとして凝集剤添加量との関係を示したものである。更にFuchs⁽⁵⁾はRapid CoagulationとSlow Coagulationとの差をエネルギーバリアーの存在を導入して理論的考察を行なっている。

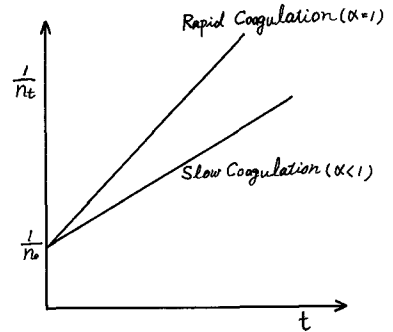


図-6

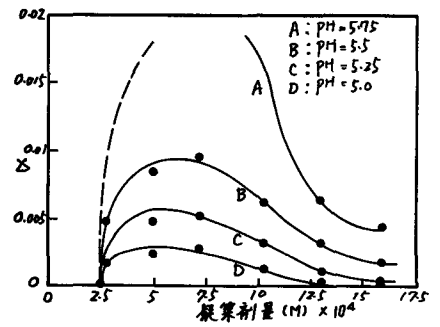


図-7

しかし、フロック形成においては衝突する粒子の大きさは数十~数百ミクロンであり、エネルギーバリアーが影響する範囲に比べて著しく大きく、Fuchsの理論はほとんど適用しえない。従って、フロック形成を考えるに当っては全く別の見解に立って衝突合-確率を検討する必要がある。

5. フロック形成における衝突合-確率

無次元化されたフロック形成基本式において、フロック形成速度の大小は衝突半径、従って衝突する粒子の大きさで一義的に決められる。即ち、フロック形成速度は衝突回数により決まると考えるので、大きな衝突半径を持つ大粒子の形成速度が圧倒的に大きくなり最終的には形成されるのみで他の粒子との衝突によって別のランクの粒子に移ることになり最大成長粒子のみが存在する粒度分布になる。しかし、成長平衡に達した粒子群は必ずしも単一組成に近い最大成長粒子のみの分布を持つことはなく理論式(1)と矛盾する。そこで、この点に関して(1)式の補正が必要となる。

まず簡単のために、フロックを球形と仮定し図-8を参考にして、フロックの合-過程を考えてみよう。最大成長粒径(d_{max})の半分の直径を持つ $1/2 d_{max}$ 粒子同志の衝突によって生ずる粒子はその体積が最大成長粒子のその $1/4$ にすぎないのに、衝突によって生じた粒子の球への再整形がなければ(液滴の合-の場合には考えられるが、フロックの場合はあり得ない) A の方向には成長しえず、A 方向に衝突した粒子は合-することなく乱流変動による剪断により破

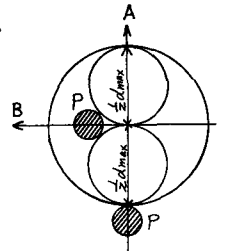


図-8

壊され、衝突前の粒子に戻る。粒子Pが衝突後合一出来るのはBの方向のしかも最大成長径内に納まる場合のみである。しかも実際に形成されるフロックはアルミニウムフロックの密度を求めた際⁽⁷⁾に仮定した形状係数0.8程度とすると図-9のような形状になる⁽⁸⁾。更に粒径が大きくなる程その形状も不整形になり、球と考えるよりも遙かに小さな粒子の形成においても図-8の様な現象が起り得ることは容易に想像される。(S-1)倍粒子と1倍粒子の衝突によってS倍粒子(最大成長粒子)が形成される場合を考えると、1倍粒子が合一出来る場所は必ずかゝる所であり、理論的には合一可能であっても衝突合一の確率は0と考えても大差ないであろう。従って、衝突合一の確率を α_f とすると α_f は小粒子を形成する衝突合一

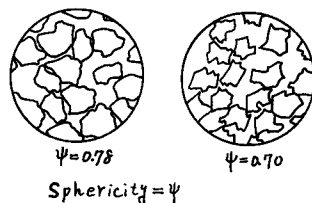


図-9

一において大きく、大粒子を形成する衝突合一においては小さく、しかも数値的には $0 \leq \alpha_f \leq 1$ であることが定性的に理解し得よう。そこで α_f を衝突合一確率関数として次の如く表示することができる。

$$\alpha_f(R) = F(S, R, \beta) \text{----- (10)}$$

なお、 $\alpha_f(R)$ はR倍粒子が形成される際の衝突合一確率を示すこととするが、R倍粒子を形成する粒子の組合わせは種々あり厳密には各々の組合わせで $\alpha_f(R)$ も異なるであろうかここではその平均値を考えることとする。更に α_f は、一連のベキ級数の形で表現することか妥当であろうか、ここでは00式の形で表わすこととする。00式中の β は、そこを越える迄 $\alpha_f = 1$ である倍粒子数を表わし、関数の座標移動の必要上導入した。 β をいかなる値にとるかを理論的に決定することは不可能であるが、次の様な論理は可能である。

最大成長粒内に一方向のみに初期粒子が並んだとすると $S \frac{1}{3}$ 個並ぶ事が出来る。しかしフロックの結合力と乱流変動による剪断力との関係⁽⁹⁾で破壊が起るのであるから、三次元的に相互に補強し合わない限り d_{max} の粒子に迄成長することは不可能である。従って $\beta < S \frac{1}{3}$ である。次に最大成長粒内に平均的空隙を持つ初期粒子が配列している場合について考えると、一方向に並んでいる初期粒子の数は $S \frac{1}{3}$ 個である。この場合、 $S = 10^3$ (通常のフロック形成では比較的強い攪拌条件に相当し、例え、 $d_p = 5 \mu$, $K_g = 1.2 \text{ Z}$, $d_{max} = 100 \mu$ 程度である)とすると10個の粒子が一方向のみに並んでいる事になるが、実際には、この様な配列のフロックでは剪断力が結合力よりも遙かに大きく最大成長径以下であっても破壊が起る。以上の点も考えて $\beta = 3 \sim 5$ 程度を採用すべきであろうか本論文においては、 $\beta = 0$ とし $\alpha_f(R)$ の関数形を(11)式の様に定めることとする。

$$\alpha_f(R) = \left(1 - \frac{R}{S+1}\right)^n \text{----- (11)}$$

なお、 β を考慮した式は

$$\alpha_f(R) = \left(1 - \frac{R-\beta}{S+1-\beta}\right)^n \text{----- (12)}$$

となり、実際に対照としてゐる範囲のフロックについては、 $S+1 \gg \beta$, $R \gg \beta$, であるから(12)式のように表現する限りにおいては $\beta = 0$ としても大した差は生じて来ない。

(11)式中の指数 n は理論的には勿論決定出来ないが、前報⁽¹⁾で実験により示された接触フロック形成における平均的有效衝突係数と成長平衡におけるフロックの粒度分布と、 n を1から6まで変化させて行なった計算結果とを比較する事により求めた。その結果 $n=5\sim7$ の値が妥当と思われたので本論文においては、衝突合-確率関数を(13)式の如くに定めた。

$$\alpha_f(R) = \left(1 - \frac{R}{S+1}\right)^6 \text{------(13)}$$

6 標準化成長平衡 m 曲線

図-5に示した様に、フロックの破壊を考えると m 値がある値まで増加して来るとフロック群の成長が止まる。この様な状態を成長平衡とここでは称することとする。成長平衡に達した粒子群の粒度分布が初期条件の如何にかかわらず一つの定まった形になることについては、大気中のエアロゾルの凝集現象において経験的にJungeにより見出され、SwiftとFriedlander⁽¹⁰⁾が理論的裏付けを行ない、Hidy⁽¹¹⁾がSmoluchowskiのBrown運動による凝集速度式の数値解から確かめられている。この様な平衡時の分布形を示す関数はSelf-preserving size distribution function (自平衡粒度分布関数)と呼ばれる。Swift, Friedlanderの理論において、一定の大きさ以上の粒子は重力により沈降して、考えられている系から消滅すると仮定しているが、成長平衡が存在する点を考えるならば、フロックの粒度分布も自平衡状態となって、初期条件に関係なくフロック形成条件を表示する適当な変数を用いて変数変換を行なえば、一つの分布に帰一させる事が可能であろうと推察される。

平衡分布に達した m 曲線(横軸に初期粒子が所定の水深を沈みきるに要する時間を100とした無次元化沈降時間、縦軸に除去累積百分率をとり、 m をパラメータとして示した沈降曲線)は、その時のフロックの粒度分布を間接的に示すものであるから、もし分布が同一関数形を有しているのであれば、横軸の目盛を適当に伸縮させることによって一本の曲線に帰一させることが出来るはずである。そこで、各々の S_m についての m 曲線の横軸に適当な係数をかけ、曲線を水平方向に伸縮させて一本の標準化時間累積曲線(標準化 m 曲線)に帰一させる手順を次の様にして行なった。

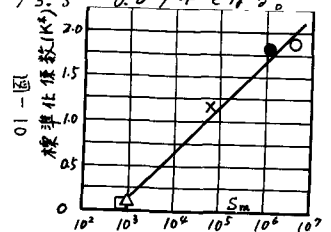
まず、(14)式のような標準化関数を定義する。

$$\theta^* = K^* \theta \text{------(14)}$$

ここで、 θ^* :標準化された無次元化沈降時間、 K^* :標準化係数、 θ :無次元化沈降時間。

簡単のために、 $g(\theta) = 50\%$ で $\theta^* = 1.0\%$ となる様な成長平衡 m 曲線を標準化成長平衡 m 曲線と指定することとする。実験によって求めた各 S_m についての成長平衡 m 曲線の $g(\theta) = 50\%$ 値がすべて $\theta^* = 1.0\%$ の所に来るように補正するための標準化係数を決める。例えば $S_m = 700$ の場合、 $g(\theta) = 50\%$ で $\theta = 13.5\%$ であるから、 K^* を(14)式に代入して $K^*(700) = 1/13.5 = 0.074$ となる。

この様にして求めた最大成長度 S_m と K^* の関係を図示すると図-10のように片対数グラフで直線関係が得られる。各 S_m についての成長平衡 m 曲線の横軸の値にそれぞれについて得られた標準化係数をかけてプロットすると図-11のようになる。図から明らかなように成長平衡 m 曲線是一本の標準化 m 曲線に帰一され、予想したように成長平衡粒



度分布は自平衡 (Self-preserving) 性を持つていることがわかる。従って、すべての成長平衡粒度分布は図-10と図-11を併用して一般的に示し得ることが可能となった。

7. 衝突合-確率関数を導入したフロック形成基本式の数値解

衝突合-確率関数を導入したフロック形成基本式は

$$\frac{dNR}{dm} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{R-1} (1 - \frac{R}{S+1})^n \left\{ i^{\frac{1}{3-K}} + (R-i)^{\frac{1}{3-K}} \right\}^3$$

$$N_i N_{R-i} - NR \sum_{i=1}^{S-R} (1 - \frac{R+i}{S+1})^n N_i \dots (15)$$

ここで $n=6$

(15)式を(1)式と同様に(2)解いた結果を横軸に無次元化攪拌時間(m), 縦軸にR倍粒子の体積百分率をとり図示すると図-12となる。 $K_g=1.2$ について, $S=50, 75, 100$ における成長平衡時の累積体積粒度分布を示すと図-13となる。

それらの図の横軸を累積体積が50%を示すようなR (V_{50})で無次元化すると図-14のような一本の曲線に帰一される。無次元化の際のSとR (V_{50})の関係は 図-15から

$$R(V_{50}) = 0.45 S \dots (16)$$

この図からも, Swift, Friedlander, Hidy 等が, 粒子の破壊が起らない Brown 運動による凝集において指摘した自平衡粒度分布が, 過大成長粒子の破壊が生ずる乱流変動によるフロック形成においても成立する事が明らかとなった。

この自平衡分布が先に実験で求められし自平衡分布と一致するか否かの検討のために図-11を作成したと同様の手順により標準化して図-11に加えて示すと, $S=50$ については(3)式より, $S_m \approx 700$, その際の K^* は 0.08 となり大略実験値と一致する。沈降時間の増加につれて数値解と実験値のずれが大きくなるのは実験に用いたフロックュレーター内のエネルギー分布が均一でないことや, フロック径の測定の精度にも原因があろう。

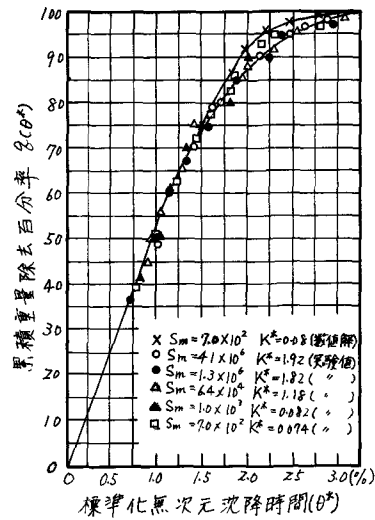


図-11

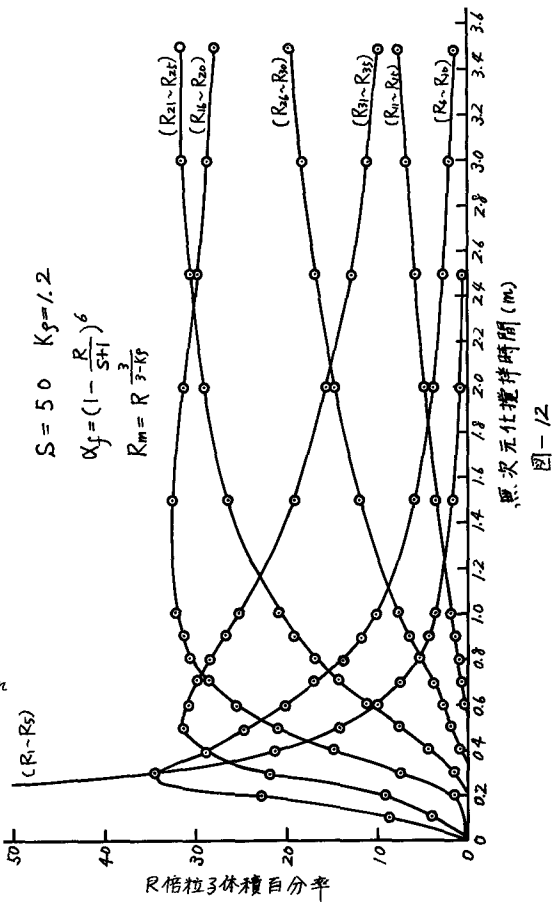


図-12

また平衡分布に達してゐる母フロック群とマイクロフロック群とを反応させる接触フロック形成は累積体積60%を示すフロックに於て母フロック群の粒径が代表されるからその際の平均的衝突合一確率を $\bar{P}$ とすると(13), (14)式より

$$\bar{P} = \left(1 - \frac{0.45S}{S+1}\right)^6 \div (1-0.45) \div \frac{1}{35}$$

代表径を累積体積60%を示すフロック径とすると, $\bar{P} \div 1/50$ 従つて, 平均的に1/40程度となり前報⁽¹⁾における接触フロック形成の際の平均的衝突合一確率 $\bar{P} = 1/40 \sim 1/45$ とはほぼ一致する。

8 おわりに

本論文において、従来定量的設計の基本関数として示されて来たフロック形成基本式も、フロックの物性、衝突合一確率を考慮する事により定量化し、数値解を求め、実験値と比較しながら理論の実用化を達成して来た。その結果得られた結論は次の諸点に要約される。

(1) フロック形成反応においては、衝突速度式も、直接、合一速度式に適用することは不可能であり、衝突合一の確率を考慮する事が必要である。衝突回数、大小と合一の速度は同一なものではなく、フロック形成速度は衝突回数と衝突合一確率の積である。

(2) フロック成長における衝突合一確率は Smoluchowski の仮定した可べの粒子に同一ではなく、粒子の大きさに伴つて変化する性質を持ち、また、Fuchs のエネルギーバリアーの存在を考慮して理論的に導いたものとも異なる。何故ならば、両者の採用した衝突合一確率は只単に集塵時間、スケールを伸縮させる事により全く同一の粒度分布が得ら

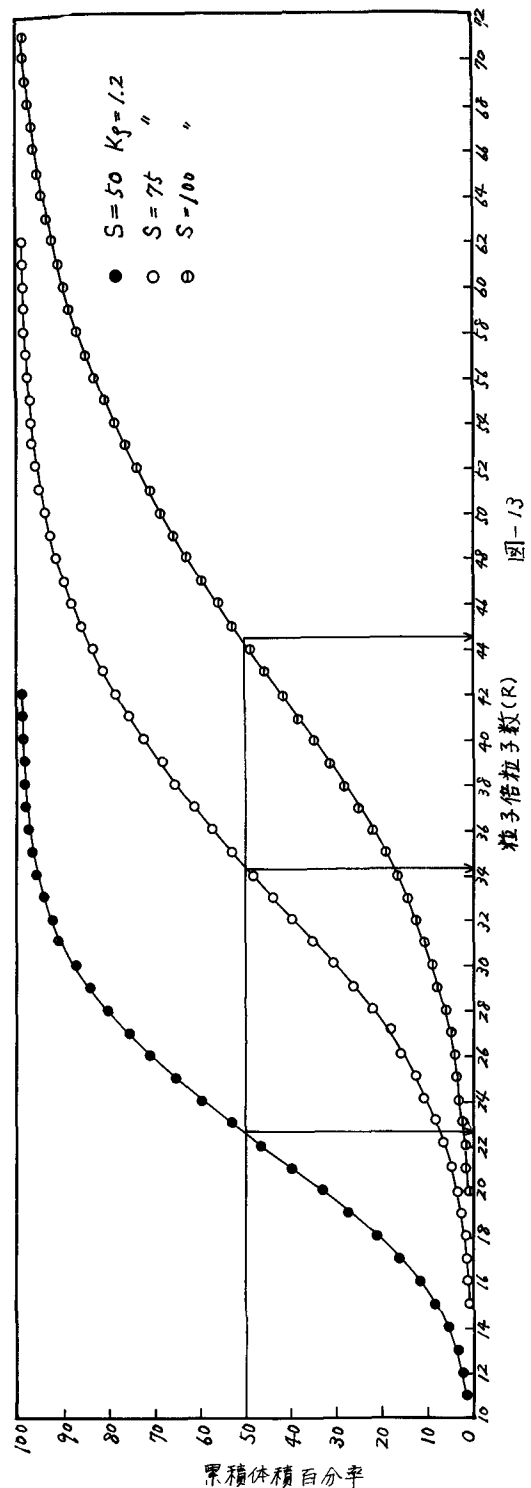


図-13

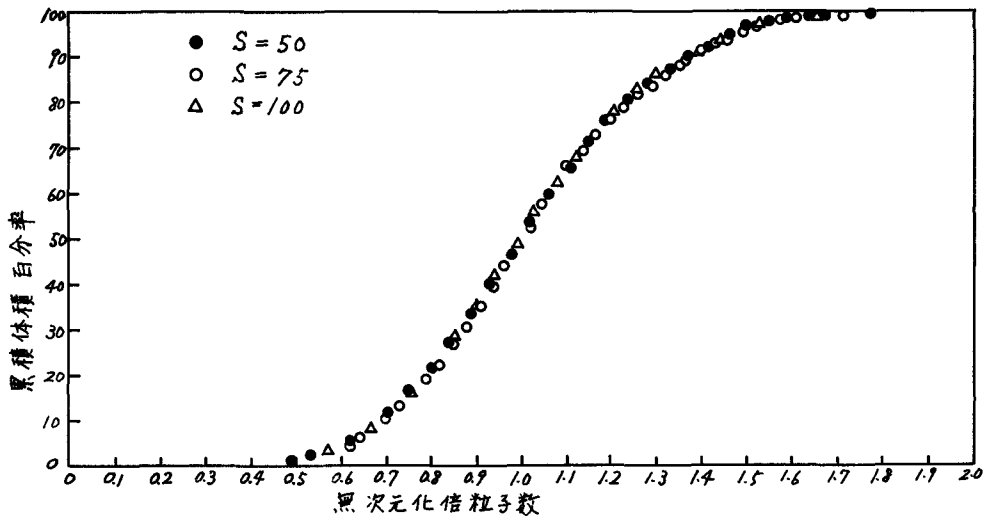


図-14

れるのに対して、フロック形成反応においては、時間的スケールのみならず粒度分布にも影響する性質を持つものではないかと思われる。

(3) フロック形成反応における衝突合-確率(α_f)は

$$\alpha_f(R) = F(S, R)$$

の関係にあり、 $(S+1)$ 倍粒子以上の粒子を形成する衝突における割合であることとを考慮すると $2 \leq R \leq S$ において

$$\alpha_f(R) = \left(1 - \frac{R}{S+1}\right)^n$$

(4) n の値として、接触フロック形成に

り求めた平均的衝突合-確率と成長平衡時におけるフロックの粒度分布から $n=5 \sim 7$ 程度であり、近似的に $n=6$ と考えてもよいであろう。

(5) Brown 運動による凝集において見出されていると同様の自平衡粒度分布 (Self-preserving size distribution) が乱流変動によるフロック形成においても存在し、形成条件 (初期粒子の大きさ、数、攪拌強度、フロック形成時間) が n の値として無次元化された如く、成長平衡時におけるフロックの粒度分布も最大成長比 (S) と K_0 の関数として無次元化された。なお、過渡状態における粒度分布の無次元化が可能か否かについては現在検討中である。

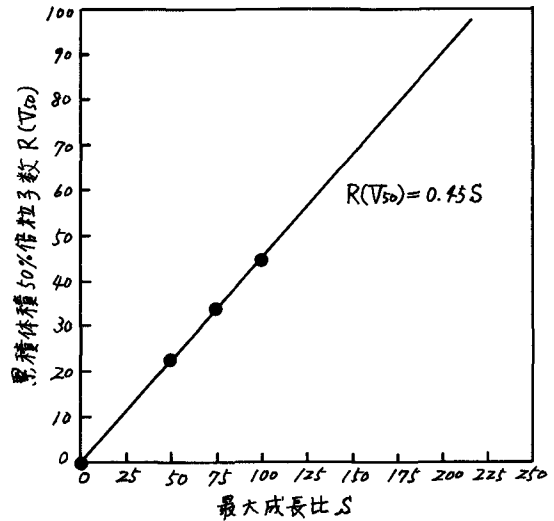


図-15

フロック形成過程は本論文中に示された様に、単なる物理現象ではなく、界面化学的現象も当然考慮する必要があろうが、少なくとも界面化学的反応が十分に完了した場合に於けるフロック形成過程の定量化はなし得たと考えられている。

参考文献

- (1) 丹保憲仁, 穂積準, 渡辺義公 フロッキュレーターの合理的設計 [I], 水道協会雑誌 431号 P.20~27 昭45.8
- (2) 丹保憲仁, 渡辺義公, 清水慧 アルミニウムフロックの密度に関する研究 [II], 水道協会雑誌 410号 P.14~17 昭43.11
- (3) Fair, G. M, Gemmel, R. S, A Mathematical Model of Flocculation, Journal of Colloid Science 19 P.360~372 1964
- (4) Harris, H. S, Kauffman, W. J, Krone, B, Orthokinetic Flocculation in Water Purification, Journal of Sanitary Engineering Division P.95~111 Dec. 1966
- (5) Krays, H. R, Colloid Science I P.283~286 Elsevier Publishing Co 1952
- (6) Hahn, H. H, Stumm, W, Kinetics of Coagulation with Hydrolyzed Al (III) The rate-determining Step, Journal of Colloid and Interface Science 28.1 P.134~144 Sep. 1968
- (7) 丹保憲仁, 渡辺義公, アルミニウムフロックの密度に関する研究 [I], 水道協会雑誌 397号 P.2~10 昭42.10
- (8) Fair, G. M, Geyer, J. C, Oker, D. L, Water and Waste Water Engineering Vol.2 John Wiley & Sons P.27~12
- (9) 丹保憲仁, 山田浩一, 穂積準, フロック強度に関する研究, 水道協会雑誌 427号 P.4~15 昭45.4
- (10) Swift, D. L, Friedlander, S. K, The Coagulation of Hydrocolloids by Brownian Motion and Laminar Shear Flow, Journal of Colloid Science 19 P.621~647 1964
- (11) Hidy, G. M, On the Theory of the Coagulation of Non-interacting Particles in Brownian Motion, Journal of Colloid Science 20 P.123~144 1965
- (12) 丹保憲仁, 渡辺義公, フロック形成過程の基礎的研究—非接触型—, 第20回全国水道研究発表会講演集 P.166~167 昭44