

# 集水暗きよの取水量の解析

九州大学 工学部 正員 上田年比古

〇杉尾 哲

## 〇まえがき

本報は、浸透領域内の産水体が等方性均質である場合について、領域上面に湛水がある場合とない場合、さらに湛水がある場合には、暗きよ内が満水の場合と未満水の場合など、さまざまな境界条件のもとでの、円形暗きよによる取水量を複素ポテンシャルの理論より解析したものである。

湛水を被われた半無限領域内の満水の円形暗きよの取水量算式としては、Muskhelishvili 式<sup>1)</sup>あるいは Kirkham 式<sup>2)</sup>が広く用いられているようで、公式集などにもあげられている。これら二式は円形暗きよへの流れを、流入・流出点間の Potential Flow におきかえて解析する際に、流入点が暗きよ中心にあると近似して誘導されたものである。本報では、この近似による算定誤差を除去するために、円形暗きよ周壁を等ポテンシャル線とする流入点を用いて解析した。

## 〇基礎式

いま図-1 に示すような浸透流の流れの場合において、水の単位重量を  $w$ 、領域内の任意点の圧力を  $p$ 、各その点の  $x$  方向 (鉛直下向きを正) および  $y$  方向の速度成分を  $u$  および  $v$  とし、透水係数を  $k$  とすると、Darcy の法則より

$$\Phi = k \{ (p/w) - x \} \quad \text{--- (1)}$$

非回転定常流の基礎理論より

$$u = -\partial\Phi/\partial x, \quad v = -\partial\Phi/\partial y \quad \text{--- (2)}$$

がえられる。式-(1)より、暗きよ中心の圧力を  $p_c$  とすれば、暗きよ内の速度ポテンシャル  $\Phi_r$  は

$$\Phi_r = k \{ (p_c/w) - d \} \quad \text{--- (3)}$$

また、上面に湛水がある場合の地表面 ( $x=0$ ) における速度ポテンシャル  $\Phi_0$  は、地表面上の湛水深を  $H_0$  とすれば、

$$\Phi_0 = k H_0 \quad \text{--- (4)}$$

とそれぞれ一定値になり、暗きよ周壁および湛水で被われた地表面は等ポテンシャル線である。なお、解析は暗きよ周壁と完全産水体と仮定して行う。

## Ⅰ. 地表面に湛水があり、暗きよ内は満水の場合.

### 1. 半無限浸透領域.

#### 1) 解析

いま図-1 に示す半無限領域内の満水の円形暗きよを考える。図-1 の流れは、 $y$  軸と円形暗きよを等ポテンシャル線とする Potential Flow であり、この流れは、暗きよ内の一点  $A$  ( $x=a, y=0$ ) に流入点と、 $y$  軸に対して対称な位置  $A'$  点 ( $x=-a, y=0$ ) に流出点をもつ Potential Flow と同じになる。

この場合の複素ポテンシャルは、 $Q$  を単位奥行当りの暗きよ取水量とすると、次式で表され、

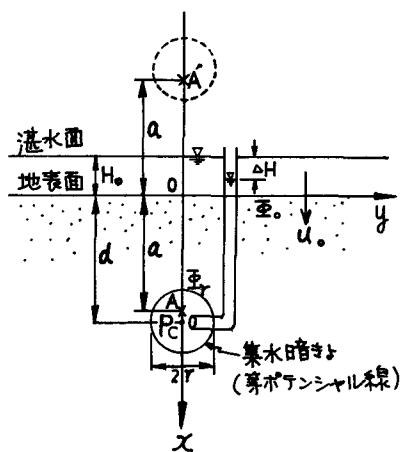


図-1 半無限浸透領域  
( $x$ -平面)

$$W = \Phi + i\psi = \frac{Q}{2\pi} \ln \frac{z-a}{z+a} + ReH_0 \quad (5)$$

式-(5)に  $z = x + iy$  を代入して、実数部と虚数部にわけると、

$$\Phi = \frac{Q}{4\pi} \ln \frac{(x-a)^2 + y^2}{(x+a)^2 + y^2} + ReH_0 \quad (6)$$

$$\psi = \frac{Q}{2\pi} \tan^{-1} \frac{2ay}{x^2 - a^2 + y^2} \quad (7)$$

となって、流線網は図-2 のようになる。

式-(6)において、 $\Phi$  を一定として変形すれば円の方程式がえられ、図-2 の等ポテンシャル線群は、同軸円群であることがわかる。この円群の中心点の位置と、半径との関係から  $Q$  を求めると

$$Q = \sqrt{d^2 - r^2} = \sqrt{(d+r)(d-r)} \quad (8)$$

がえられる。なお式-(8)は 式-(6)において、

$$\Phi_{(x=d-r, y=0)} = \Phi_{(x=d+r, y=0)} \quad (9)$$

としても導出できる。

いま式-(6)より暗きよ周壁の速度ポテンシャルを求めると、

$$\Phi_r = \frac{Q}{2\pi} \ln \frac{\sqrt{d^2 - r^2} - (d-r)}{\sqrt{d^2 - r^2} + (d-r)} + ReH_0 \quad (10)$$

となり、式-(3)と等しいとおけば、取水量算定式は

$$Q = \frac{2\pi Re \{ H_0 + d - (pc/w) \}}{\ln \{ (d + \sqrt{d^2 - r^2}) / r \}} \quad (11)$$

ここに、 $H_0 + d - (pc/w) = \Delta H$  は浸透領域上面と暗きよ内との水頭差をあらわす。

満水状態の暗きよ周壁は等ポテンシャル線であり、図-2 の等ポテンシャル線群の一本と必ず一致する。したがって、式-(11)は取水量算定式の厳密解である。

#### ii) 電気モデル実験

浸透流と電気の流れはともに Laplace の方程式を満足する Potential Flow であり、両者の相似関係から円形暗きよの取水量が求められる。実験に用いた抵抗測定回路を図-3 に、測定結果および式-(11)の算定結果を図-4 に示す。これより、式-(11)はよい一致を示す。また逆に、電気モデルの実験結果が十分な精度でえられることがわかる。図-4 には Muskat 式および Kirkham 式による算定結果も示しているが、これらは  $r/d$  が大きくなると

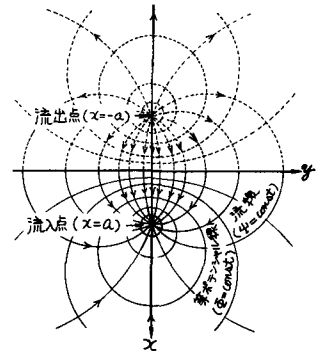


図-2 流線網

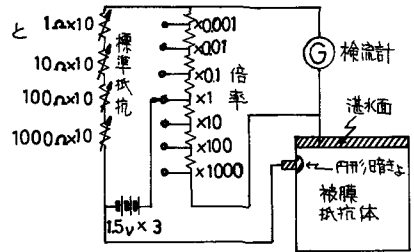


図-3 抵抗測定回路

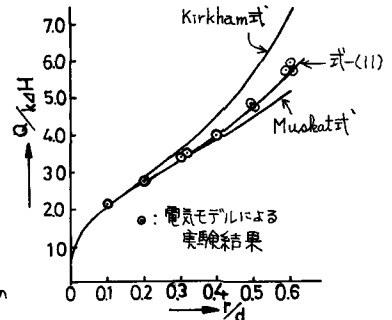


図-4 計算結果と実験値との比較

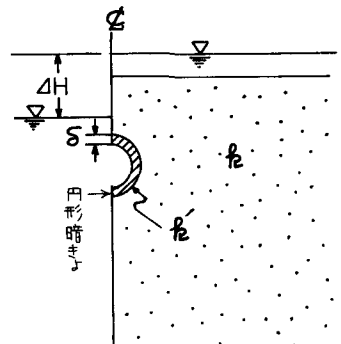


図-5 暗きよ周壁の水頭損失

実験結果とかなりの差異を生ずることがわかる。

iii) 暗きよ周壁による損失水頭を考慮した場合。

上記の取水算定式は、暗きよ周壁を完全透水体と仮定して解析したもので、暗きよ周壁による水頭の損失を考慮してはいない。

いま、あらかじめ暗きよ周壁自体の透水係数がわかっていゝものとすると、暗きよ周壁による損失水頭  $\Delta h$  は

$$Q = A \cdot v = A k_e i = A \cdot k_e' (\Delta h / \delta) \quad \text{--- (12)}$$

$$\text{より} \quad \Delta h = (Q \cdot \delta / A \cdot k_e') \quad \text{--- (13)}$$

こゝに  $A$  は単位奥行き当たりの暗きよ周壁の表面積

（たがって、浸透砂層にかかる水頭差は  $\Delta H - \Delta h$  となる）とすると、

$$\frac{Q}{k_e (\Delta H - \Delta h)} = \frac{2\pi}{\ln \{ (d + \sqrt{d^2 - r^2}) / r \}} = f(d, r) \quad \text{--- (14)}$$

$$\text{より} \quad Q = \frac{k_e \Delta H f(d, r)}{1 + (k_e / k_e') \cdot \{ \delta \cdot f(d, r) / A \}} \quad \text{--- (15)}$$

とる。同様に、円形暗きよが砂利等で被覆されている場合も、被覆外周が等ポテンシャル線と考えられるから、暗きよ周壁と被覆部とによる透水係数が知れば、式(15)より取水量を修正できる。

iv) 浸透領域の透水係数が異なる場合。

この場合の厳密な解は非常に困難であるが、図-6 が  $k_{e1} < k_{e2}$  の場合には、次のように近似的に取扱える。いま、境界面において、流線が鉛直線となす角を  $\alpha_1, \alpha_2$  とすると、

$$\tan \alpha_1 = (k_{e1} / k_{e2}) \cdot \tan \alpha_2 \quad \text{--- (16)}$$

が成り立つから、 $\alpha_1 < \alpha_2$  となり、 $k_{e1}$  区間の流線は、 $k_{e2}$  区間に比較して、鉛直に降りてくることになる。したがって  $k_{e1}$  区間と同じ損失水頭を生ずる透水係数  $k_{e2}$  の層（厚さ:  $d_1'$ ）を想定し、式(11)の分母に

$$d = d_1' + d_2 = (k_{e2} / k_{e1}) \cdot d_1 + d_2 \quad \text{--- (17)}$$

を代入すれば、図-6 の暗きよ取水量の近似値がえられる。

## 2. 長方形浸透領域

暗きよが長方形領域内にある場合を考える。このような浸透領域としては、不透水性土質の河床の一部を長方形に掘削し、円形暗きよを設置して砂質土で埋めもじした場合、あるいは浸透領域に同じ直径の多数の円形暗きよを同じ深さに並列設置した場合の、一つの暗きよの浸透領域などが想定できる。

2-a 暗きよが領域の中心軸上にある場合。

i) 解析

図-7（ $\zeta$  平面）の長方形領域の内部を、図-2 の無限大領域へ写像する関数は Jacobi の楕円関数の  $m$  関数であり次式で示される。

$$\zeta = \operatorname{sn}(\zeta, m) \quad \text{--- (18)}$$

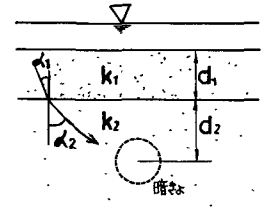


図-6 透水係数が異なる場合

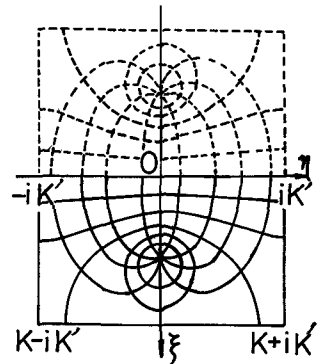


図-7  $\zeta$  平面

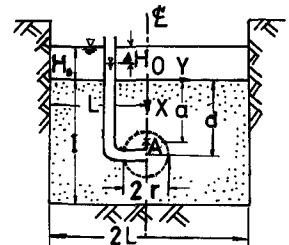


図-8 長方形浸透領域

ここに  $m$  は楕円関数の母数である。

したがって、図-8 の与えられた長方形領域 ( $Z$ -平面) を拡大・縮小 (図-7 に対応させれば  $Z$ -平面の複素ポテンシャルがえられる。いま図-7 と図-8 との長方形の縮尺を  $C$  で表わすと、

$$\zeta = CZ \quad \text{--- (19)}$$

となり、式-(5), (18), (19) より

$$W = \frac{Q}{2\pi} \ln \frac{\operatorname{sn}(CZ, m) - \operatorname{sn}(Ca, m)}{\operatorname{sn}(CZ, m) + \operatorname{sn}(Ca, m)} + \operatorname{Re} H_0 \quad \text{--- (20)}$$

式-(20) を実数部と虚数部に分けて速度ポテンシャルの式を導出し、式-(9) を用いると、流入点の位置について

$$\operatorname{sn} Ca = \sqrt{\operatorname{sn} C(d+r) \cdot \operatorname{sn} C(d-r)} \quad \text{--- (21)}$$

定数  $C$  は、 $Z$ -平面と  $\zeta$ -平面との相似条件より

$$C = K(m)/I = K(m')/L \quad \text{--- (22)}$$

ここに  $K(m)$  は母数  $m$  についての第一種完全楕円積分を表わし、 $m'$  は  $m$  の補母数で  $m^2 + m'^2 = 1$  の関係がある。また母数  $m$  の値は  $K(m')/K(m) = L/I$  により、浸透領域の形状によって与えられる。したがって、式-(11) と同様、暗きよ周壁の速度ポテンシャルを求め、式-(3) と等しいとおけば、取水量算定式は

$$Q = \frac{2\pi R \{H_0 + d - (pc/w)\}}{\ln \left\{ \frac{\sqrt{\operatorname{sn} \frac{K}{I}(d+r)} + \sqrt{\operatorname{sn} \frac{K}{I}(d-r)}}{\sqrt{\operatorname{sn} \frac{K}{I}(d+r)} - \sqrt{\operatorname{sn} \frac{K}{I}(d-r)}} \right\}} \quad \text{--- (24)}$$

なお、暗きよが底面の不透水層上に設置された ( $d=I$ ) 半円の場合には、

$$\operatorname{sn} \left\{ \frac{K(m)}{I}(d+r), m \right\} = 1 / \operatorname{dn} \left\{ \frac{K(m')}{I} r, m' \right\}, \quad \operatorname{sn} \left\{ \frac{K(m)}{I}(d-r), m \right\} = \operatorname{cn} \left\{ \frac{K(m')}{I} r, m \right\} / \operatorname{dn} \left\{ \frac{K(m')}{I} r, m \right\} \quad \text{--- (25)}$$

として取水量を算定できる。

## ii) 取水量算定式の検討

長方形領域における流入点のまわりの等ポテンシャル線は、図-7 に示すように円群ではなく、わずかに円形曲線群である。したがって、暗きよ周壁と一致せず、解析結果はこの等ポテンシャル線の一つを円とみなした近似解である。いま図-3 の電気モデル実験装置を用いて、円形暗きよについて求めた実験結果と、式-(24) の計算結果とを比較すると図-9 のようになり、かなり一致していることがわかる。図中には Kirkham<sup>2)</sup>によって得られた長方形領域の取水量算定式の計算結果も示しているが、全体的に実験結果より大きい値である。この Kirkham 式は流入点を暗きよ周壁上端にあるとした算定式である。したがって、式-(24) の等ポテンシャル線を円とみなす近似による解析誤差は、流入点の近似による解析誤差より小さいことがわかる。

## iii) 取水量におよぼす諸要素の影響

- 浸透領域幅を広げると、 $Q/R_0H$  も大きくなるが、その増加率は  $L/d$  が小さい時に大きく、 $L/d$  が 2.0 以上ではほとんど増加しない。
- 浸透領域の深さが大きいと、 $Q/R_0H$  も大きくなるが、その変化はおおよそ  $L/d$  の場合と同じ傾向を示す。また  $L/d$  が大きいほど増加率は大きくなる。
- 暗きよの埋設深さを大きくすると、 $Q/R_0H$  は減少する。したがって暗きよ内水位と地表面上の

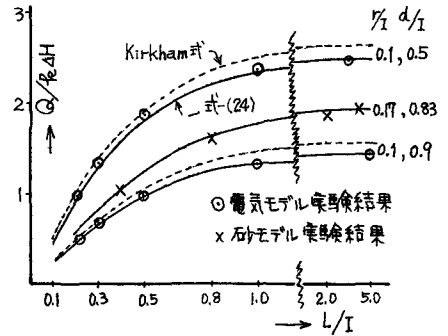


図-9 実験結果との比較

湛水との水頭差が一定の場合には取水量は減少するが、一般に、埋設深さを大きくすると、水頭差を大きくできるから、取水可能な最大量は増加する。

○ 暗きょ径を大きくした場合の  $Q/R_0H$  の変化は図-4 とほぼ同じ傾向を示す。

2-b 暗きょが領域の中心軸上にある場合、

i) 解析

図-8 の Z 平面を図-10 のように考え、2-a と同じ手法で写像を繰返すと、図-10 に対する Z 平面は図-11 のように、流入・流出点がそれぞれ二個ずつある Potential Flow と同じになる。したがって、Z 平面の複素ポテンシャルは次式で示される。

$$W = \frac{Q}{2\pi} \ln \left\{ \frac{\text{sn} CZ - \text{sn} C(a+ib)}{\text{sn} CZ - \text{sn} C(-a+ib)} \cdot \frac{\text{sn} CZ - \text{sn} C(a-ib)}{\text{sn} CZ - \text{sn} C(-a-ib)} \right\} + R_0 H_0 \quad (26)$$

式(26)を実数部と虚数部にわけて速度ポテンシャルの式を導出し、

$$\Phi(x=d-r, y=s) = \Phi(x=d+r, y=s) \quad (27)$$

$$\Phi(x=d, y=s-r) = \Phi(x=d, y=s+r) \quad (28)$$

とすると流入点の位置  $a, b$  が求まる。なお式(27), (28) は  $a, b$  に關する二元連立高次方程式であるから、解析解はえられず、数値解析により求めなければならぬ。

この場合の等ポテンシャル線群も円ではないから、暗きょ周壁の形状と一致しないが、式(24)と同様に、暗きょ上端と下端とに相当する二点を通る等ポテンシャル線を円形暗きょ周壁と考えると、取水量算定式は

$$Q = \frac{4\pi R_0 \{H_0 + d - (p_c/w)\}}{\ln \left\{ \frac{(CA+CB)^2 + (CC-CD)^2}{(CA-CB)^2 + (CC-CD)^2} \cdot \frac{(CA+CB)^2 + (CC+CD)^2}{(CA-CB)^2 + (CC+CD)^2} \right\}} \quad (29)$$

$$CA = \text{sn} C(d-r) \cdot \text{dn} CS \cdot (1 - \text{sn}^2 Cb \cdot \text{dn}^2 CA), \quad CB = \text{sn} Ca \cdot \text{dn} cb \cdot \{1 - \text{sn}^2 CS \cdot \text{dn}^2 C(d-r)\}$$

$$CC = \text{sn} CS \cdot \text{sn} C(d-r) \cdot \text{dn} C(d-r) \cdot (1 - \text{sn}^2 Cb \cdot \text{dn}^2 CA), \quad CD = \text{sn} cb \cdot \text{sn} Ca \cdot \text{sn} cb \cdot \text{dn} ca \cdot \{1 - \text{sn}^2 CS \cdot \text{dn}^2 C(d-r)\}$$

$$C = K(m)/I = K(m')/2L$$

ii) 取水量算定式の検証。

いま  $r/d = 0.1$ ,  $d/I = 0.7$ ,  $S/I = 0.8$  の場合について、図-3 の電気モデル実験装置を用いて行った実験結果と、式(29)の計算結果とを比較すると、図-12 のようになり、ほぼ一致している。

iii) 領域中心軸からのずれと取水量への影響。

$2L/I = 2.0$ ,  $d/I = 0.5$  の場合について、暗きょが領域中心軸上にある場合 ( $S/I = (2L/I)/I = 1.0$ ) の取水量  $Q$  と、中心軸よりずれている場合 ( $S/I \neq 1.0$ ) の取水量  $Q'$  とを比較してみる。図-13 に  $S/I = 1.0 \sim 1.5$  (あるいは  $0.5$ ) を横軸とした取水量の変化を実験値、また  $r/I = 0.01 \sim 0.3$  を縦軸とした変化を破線を示している。これより暗きょ位置が中央軸よりずれているほど取水量が減少することがわかる。また減少の割合は暗きょ径によって異なり、 $r/I = 0.2$  の場合が最も大きくなった。これ

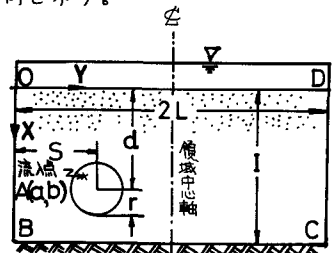


図-10 領域中心軸からずれた場合。

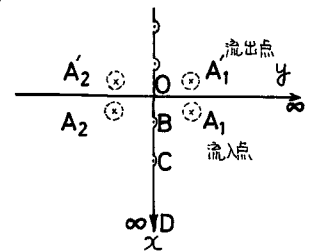


図-11 図-10のZ平面。

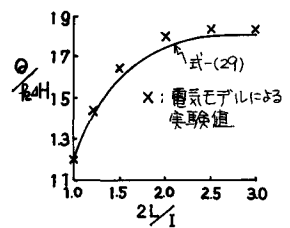


図-12 実験値との比較。

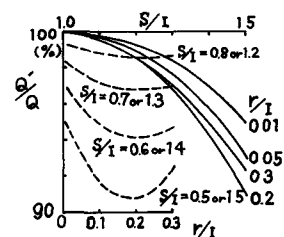


図-13 暗きょ取水量の変化。

は  $d/I=0.3$  あるいは  $d/I=0.7$  の場合についても同じ傾向を示した。ただし  $d/I$  が大きくなるほど減少の割合が大きくなるようである。

## 2-C. 領域の拡大

楕円関数の定理より

$$\begin{cases} m=0 & \text{で } \Delta u(Z, m) = \sin Z, K(m) = \pi/2, K(m') = \infty \end{cases} \quad (30)$$

$$\begin{cases} m=1 & \text{で } \Delta u(Z, m) = \tanh Z, K(m) = \infty, K(m') = \pi/2 \end{cases} \quad (31)$$

したがって、式-(23)を考慮す

ると、横方向に無限大 ( $L=\infty$ )

の浸透領域の取水量算定式は

$m=0$ 、縦方向に無限大 ( $I$

$=\infty$ ) は  $m=1$  とおくとにより

得られる。さらにこれらの拡

大した式を級数に展開して、 $I=\infty$  あるいは  $L=\infty$  とすれ

ば、半無限浸透領域の算定式もえられる。式-(24)より

順次、領域を拡大しておくと半無限領域の算定式は、

式-(11) と一致する。

図-14 のように有限個の暗きよが等間隔に並列して

ある場合を考えると、暗きよ中央線に挟まれた長方形

領域は互に独立であるから、個々の暗きよの取水量が

算定でき、したがって総取水量が求まる。このとき、

両端二個の暗きよによる取水量はそれぞれ、式-(29)で

$m=0$  とおいた算定式より求められる。

また図-14の両端の暗きよ間隔を  $2S/I=5.0$  と

し、この二つの暗きよの間に円形暗きよをふやして

いった場合の総取水量と暗きよ本数および暗きよ径

の関係を求めてみると図-15 のようになる。いま、

暗きよ一本当りの建設費が、1 円当り [暗きよ径  $\times$  本数]

の一次関数で表示できるものとすれば、同じ取水量

を得る場合には、暗きよ径を小さくして本数をふや

した方が安価となる。たとえば  $\Sigma Q/Q_{\Delta H} = 5.0$  の場

合には、 $r/I=0.1$  と 2 本と  $r/I=0.05$  と 4 本とでは

1/5 に軽減できる。水理的にも、暗きよ径を小さくすると、一本当りの取水量は減少し、同時に浸透

領域内の流速が平均化されるから、土砂等を吸い込む力が弱くなり、暗きよ内の土砂の堆積が、ある

いは暗きよ直上の地表面への過度の流量集中によって引起される浸透路の目づまりが回避できる利点

をもっと考えられる。

次に、半無限領域に二つの暗きよを並列して設置した場合の、暗きよ間隔と取水量の関係を求めると

図-16 のようになる。

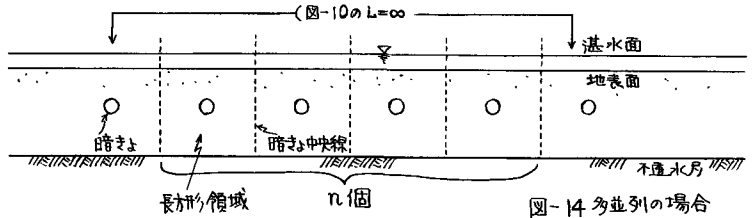


図-14 多並列の場合

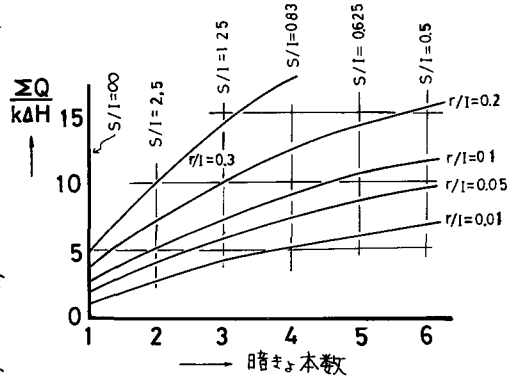


図-15 総取水量と暗きよ本数

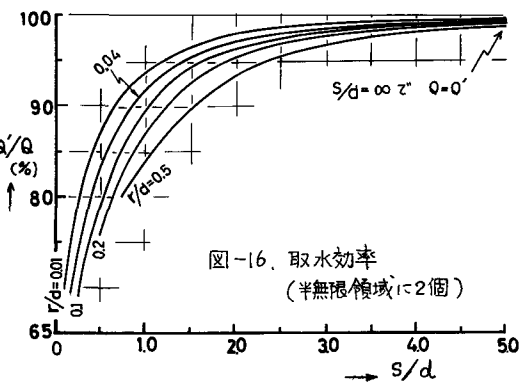


図-16. 取水効率  
(半無限領域に2個)

## II. 地表面に湛水があり、暗きよ内が未満水の場合

長方形浸透領域

i) 近似的解析の考え方

式(1)により暗きよ周壁の速度ポテンシャル分布を求める  
と、 $\widehat{BrE_0}$ および $\widehat{BrF_0}$ 間では 大気圧  $p_a=0$  として

$$\Phi = f\{ (p_a/w) - X \} = -fX \quad (32)$$

$\widehat{E_0DrF_0}$  間では暗きよ内水深による静水圧分布をなすから、

$$\Phi = f\{ h_r - X_D \} \quad (\text{等ポテンシャル}) \quad (33)$$

すなわち、暗きよ周壁は等ポテンシャル線とならない。この  
ようなポテンシャル分布に対する流れの厳密解を求めることは  
困難であると考えられ、ここでは次のような考えのもとに近似解  
を求めることにした。

図-18において点線の曲線群は図-7の浸透流の等ポテンシャル  
線群と同じものとする。また、円 $\widehat{BrDr}$ の暗きよ周壁の速度ポテン  
シャルと同じ深さにおいて、同じポテンシャルをもつ点線の等ポテン  
シャル線群上の点をとって結んだものを $\widehat{BrE'DrF'r}$ とする。このよ  
うに考えると、 $\widehat{BrE'DrF'r}$ に対する流れは、図-7の浸透流の流れ  
と等しくなり、流入量が算定できる。すなわち、円 $\widehat{BrDr}$ への流入量  
(求める取水量)を近似的に $\widehat{BrE'DrF'r}$ への流入量に等しいとして  
この流入量を算定するものである。なお円 $\widehat{BrDr}$ の流入量と $\widehat{BrE'DrF'r}$   
の流入量の差を考えると、 $\widehat{BrE'DrF'r}$ は円 $\widehat{BrDr}$ の中に図-18の点々  
の部分だけ余分に砂がつまっていることから、 $\widehat{BrE'DrF'r}$ への流入  
量は円 $\widehat{BrDr}$ へのそれより少なめの量を与えることが推察される。

ii) 解析

連続の条件から、この浸透領域内の流入点を含む円曲線 $\widehat{BrE'DrF'r}$ の流入量すなわち取水量は、図  
-18の点線で示すどの等ポテンシャル線に対する流入量とも等しくなる。したがって $\widehat{Br}$ 点を通る等ポ  
テンシャル線(図-18の $Ir$ )あるいは $\widehat{Dr}$ 点を通る等ポテンシャル線(図-18の $II_r$ )に対する流入量を求め  
ればよい。 $Ir, II_r$ の等ポテンシャル線の半径をそれぞ  
れ $r_I, r_{II}$ 、中心の位置を $d_I, d_{II}$ とすれば、この流入量  
 $Q_N$ と流入点の位置は式(21), (24)より

$$\begin{aligned} \left( \frac{Q_N}{2\pi K} \right) &= \frac{\Delta H_I}{\ln \frac{\sqrt{\Delta m \frac{K}{2}(d_I + r_I)} + \sqrt{\Delta m \frac{K}{2}(d_I - r_I)}}{\sqrt{\Delta m \frac{K}{2}(d_I + r_I)} - \sqrt{\Delta m \frac{K}{2}(d_I - r_I)}}} \\ &= \frac{\Delta H_{II}}{\ln \frac{\sqrt{\Delta m \frac{K}{2}(d_{II} + r_{II})} + \sqrt{\Delta m \frac{K}{2}(d_{II} - r_{II})}}{\sqrt{\Delta m \frac{K}{2}(d_{II} + r_{II})} - \sqrt{\Delta m \frac{K}{2}(d_{II} - r_{II})}}} \quad (34) \end{aligned}$$

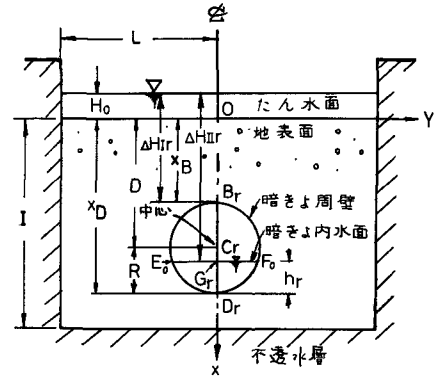


図-17. 未満水円形暗きよ.

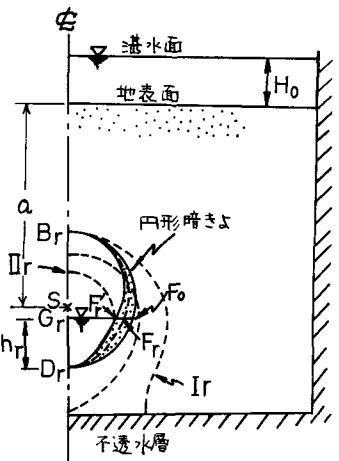


図-18. 近似的解析断面.

(Sは点線で示す等ポテンシャル線群の流入点)

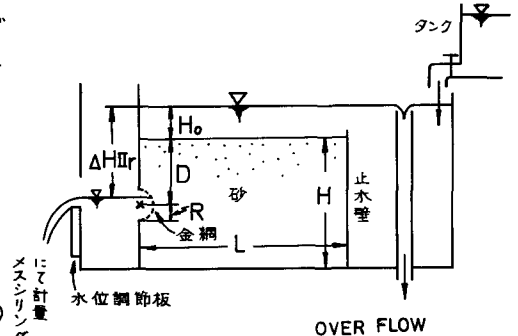


図-19. 砂モデル実験装置.

$$\left( \Delta H_{\frac{K}{2}} \right) = \sqrt{\Delta H_{\frac{K}{2}}^2 (d_I + r_I) \cdot \Delta H_{\frac{K}{2}}^2 (d_I - r_I)} = \sqrt{\Delta H_{\frac{K}{2}}^2 (d_{II} + r_{II}) \cdot \Delta H_{\frac{K}{2}}^2 (d_{II} - r_{II})} \quad (35)$$

$$\left( \Delta H_{\frac{K}{2}} X_B \right) = \Delta H_{\frac{K}{2}} (d_I - r_I) = \Delta H_{\frac{K}{2}} (D - r) \quad (36)$$

$$\left( \Delta H_{\frac{K}{2}} X_D \right) = \Delta H_{\frac{K}{2}} (d_{II} + r_{II}) = \Delta H_{\frac{K}{2}} (D + r) \quad (37)$$

ここに  $\Delta H_I$  および  $\Delta H_{II}$  は地表面と  $I_r$  および  $II_r$  の等ポテンシャル線との水頭差であり、

$$\Delta H_I = H_0 - (-X_B) = H_0 + D - R \quad (38)$$

$$\Delta H_{II} = H_0 - (-X_D + h_r) = H_0 + D + R - h_r \quad (39)$$

したがって式(34)~(37)を連立に解くと、式(34)の第一式より目的の  $Q_N$  を得る。すなわち式(34)~(37)は未満水円形暗渠の取水算定式である。

### iii) 計算結果および実験による検討

以上の解析による取水量の算定値を図-20に実線を示している。ここに  $\Delta H_I / \Delta H_{II} = 1.0$  は暗渠内が水で満たされて、しかも暗渠周壁上端の圧力が大気圧の場合に相当する。また  $H_0$  の値によって変化するが  $\Delta H_I / \Delta H_{II} = 0.75 \sim 0.76$  が暗渠内からの状態である。この図から、暗渠内水深が小さくなるにつれて  $Q/R\Delta H_I$  は増加する ことがわかる。

次に図-19のような、暗渠内水深を自由に变えうるようにした砂モデル実験装置によって、 $d/I=0.5$ ,  $r/I=0.1$  の場合について求めた実験結果を図-20に示している。これによると、前述のように  $B_r E_r D_r F_r B_r$  の流入量は円形暗渠のそれより小さい値を与えており、その誤差は、本実験の場合には  $L/I=1/2$  のとき 5.4%,  $L/I=1.0$  のとき 4.1%,  $L/I=2.0$  のとき 3.85% となり、別に求めた半無限領域の場合<sup>3)</sup>の 2.5% と比べてやや大きな値を生じてはいるが、全般的に外せばよい一致を示しているといえよう。なお参考のために、従来用いられてきた、暗渠周壁上端と暗渠中心の圧力が大気圧の水で満たされているとする考え方により求めた算定結果を図中に破線または一点鎖線を示している。また透水係数は、満水状態の測定流量を用いて、式(24)より逆算した値を用いた。

なおこの場合も、先の長方形領域と同様に、縦方向あるいは横方向に無限大の帯状領域へ、さらに半無限領域へと領域を拡大できる。

### III. 地表面に透水がなく、暗渠内が満水の場合

#### 半無限帯状領域

#### i) Zhukovskiy 関数

まず解析の都合上、 $z$  平面の座標軸を図-21のように取りなおす。

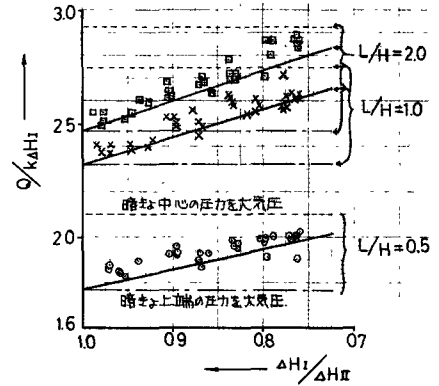


図-20 計算結果と実験値との比較

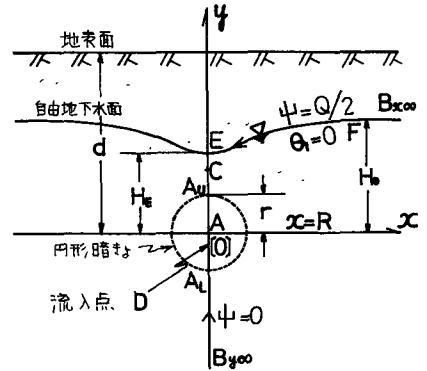


図-21 自由地下水面のある浸透領域

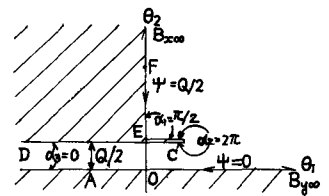


図-22  $\theta$ -平面

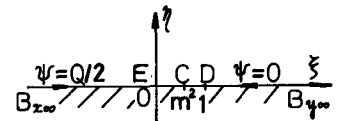


図-23  $\xi$ -平面

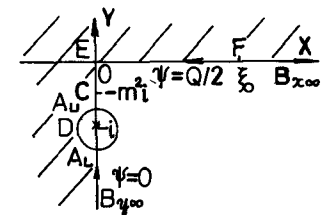


図-24  $Z$ -平面



この場合、式-(1) は次式のように変形される。  $\Phi = Re\{(p/w) + y\}$  — (40)

自由地下水面は大気圧  $p_a = 0$  とすると、式-(40)より  $\Phi = Re y$  となるように、等ポテンシャル線ではなく一本の流線である。また、補圧帯水層中の井戸と同様に、 $x > R$  では自由地下水面の高さが変わらないものとする。このZ平面を

$$\theta = \theta_1 + i\theta_2 = \Phi - Re y + i(\psi + Re x) = W + iRe z \quad \text{--- (41)}$$

の Zhukovsky 関数<sup>4)</sup>を使って  $\theta$  平面へ写像すると、図-21 の右半分の自由地下水面より下の領域が、図-22 の多角形  $B_{\infty} E C D B_{y\infty}$  の内部（ハッチのない部分）へ写像され、Z平面では曲線を表わされた自由地下水面が、 $\theta$  平面では  $B_{\infty} E$  のように直線を表わされる。次にこの多角形の内部を、Schwarz-christoffel の変換式により、図-23 のような  $\zeta \geq 0$  の領域に写像し、さらにZ平面へ写像する。この  $\theta$  平面からZ平面への写像関数を実数部と虚数部にわけると次式がえられる。

$$\Phi = Re y - \frac{Q}{\pi(1-m^2)} Y + \frac{Q}{4\pi} \ln \frac{X^2 + (Y+1)^2}{X^2 + (Y-1)^2} \quad \text{--- (42)}$$

$$\psi = -Re x + \frac{Q}{\pi(1-m^2)} X + \frac{Q}{2\pi} \tan^{-1} \frac{2X}{X^2 + Y^2 - 1^2} \quad \text{--- (43)}$$

## ii) 複素ポテンシャル

図-24 の流れは  $B_{\infty} \sim B_{y\infty}$  から流入点Dに向っている。これは  $Y = \pm 1$  に流入点をもつ Potential Flow であり、この複素ポテンシャルの式は次式で与えられる。

$$W = \Phi + i\psi = \frac{Q}{2\pi} \ln(Z+i)(Z-i) + \mu \quad \text{--- (44)}$$

式-(44)を実数部と虚数部にわけ、E点の境界条件を与えて  $\mu$  を決定すると次式を得る。

$$\Phi = \frac{Q}{4\pi} \ln\{X^2 + (Y-1)^2\} \{X^2 + (Y+1)^2\} + Re HE \quad \text{--- (45)}$$

$$\psi = \frac{Q}{2\pi} \tan^{-1}\{2XY / (X^2 - Y^2 + 1)\} \quad \text{--- (46)}$$

## iii) 取水量算定式と自由地下水面の形状

式-(45),(46) と式-(42),(43)とは同値であるから、Z平面を媒介平面として、Z平面とW平面とが一対一に対応することになる。(1)によって、Z平面、Z平面およびW平面における各点の境界条件を与え、 $H_0$ で無次元化すると、式-(47)~(52)がえられる。このうち

$$\frac{Q}{Re H_0} = \frac{2\pi(1-m^2) \cdot \{(p_0/w) + r\} / H_0}{(1-m^2) \cdot \ln\{(\beta-1)/(\beta+1)\} + 2\beta} \quad \text{--- (47)}$$

$$m^2 = -2\alpha \{Q / Re H_0\} / \{2\pi\{(p_0/w) - r\} / H_0 - (Q / Re H_0) \cdot \ln\{(1-\alpha)/(1+\alpha)\}\} \quad \text{--- (48)}$$

$$\alpha^2 = 1 - \text{Exp}\{2\pi Re\{(p_0/w) / H_0 - (HE / H_0)\} / (Q / Re H_0)\} \quad \text{--- (49)}$$

$$\beta^2 = 2 - \alpha^2 \quad \text{--- (50)}$$

の四式に境界条件として  $r/H_0$ ,  $(p_0/w)/H_0$  を与えると、 $HE/H_0$  に対する  $Q/Re H_0$  をうる。すなわち、式-(47)~(50)がこの場合の取水量算定式であり、計算は繰返し演算になる。この算定結果を残りの式-(51),(52)に代入すると  $R/H_0$  が求まる。

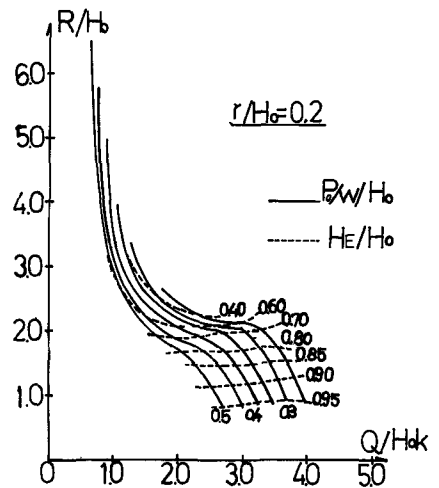


図-25 計算図表.

$$X_0^2 = \text{Exp} [2\pi (1 - H_E/H_0) / (Q/kH_0)] - 1. \quad (51)$$

$$R/H_0 = \left[ \tan^{-1} \{ 2X_0 / (X_0^2 - 1) \} - \pi + 2X_0 / (1 - \pi^2) \right] (Q/kH_0) / 2\pi \quad (52)$$

なおこの解析結果は、井戸の理論と同様に  $x=\infty$  の点で  $y=\infty$  の水位をもつ。したがって、暗きよ中心より  $x=R$  の位置に、 $y=H_0$  の水位をもつ水源があるような浸透領域を想定しないと矛盾を生じる。

#### iv) 数値解析

$r/H_0 = 0.2$  の場合の  $(P_0/w)/H_0$ ,  $H_E/H_0$ ,  $R/H_0$  および  $Q/kH_0$  の計算図表を図-25 に示している。これによれば、暗きよ内水位が一変であっても、影響範囲 ( $R/H_0$ ) が大きければ、自由地下水面の最低点の位置は低く、暗きよ取水量は小さい。また影響範囲が小さい場合には、暗きよ内水位を下げると取水量は大きくなるが、自由地下水面の最低点の位置はあまり変化しないことがわかる。

図-26 に自由地下水面形の計算結果を示す。

#### v) 淡塩境界面の解析への応用

いま図-27 のような領域におかれた円形暗きよにより取水を行った場合について考えこみると、淡塩境界面より下では

$$\Phi = k \left\{ (P/w_s) + y \right\} \quad (53)$$

$w_s$ : 海水の単位重量

が成り立ち、淡塩境界面における圧力  $P_{fs}$  は淡水の静水圧に等しいから、 $P_{fs} = w(d-y)$  とする。これを式-(53)に代入して変形

$$k \frac{w}{w_s} d = \Phi - k \frac{w_s - w}{w_s} y \quad (54)$$

となる。したがって、Zhukovskiy 関数を

$$\theta = \theta_1 + i\theta_2 = \Phi - k\varepsilon_0 y + i(4 + k\varepsilon_0 x) \quad (55)$$

$$\varepsilon_0 = (w_s - w) / w_s$$

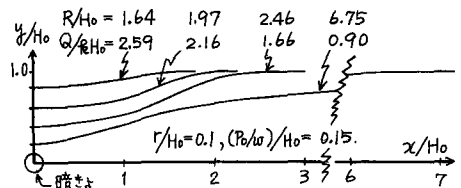


図-26 自由地下水面の形状

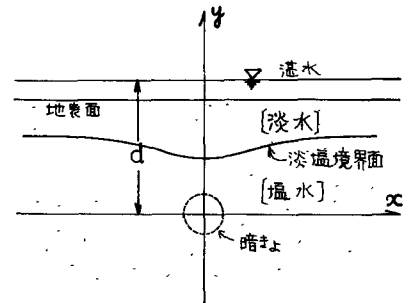


図-27 淡塩二層流

で表わせば、図-27 では曲線で示される淡塩境界面が円平面で

は  $\theta_1 = k \frac{w}{w_s} d$  の直線で示されることになり、以上と同じ手法により図-27 の暗きよへの浸透流が解析できる。

#### 参考文献

- 1) Muskat: Flow of Homogeneous Fluids through Porous Media, Edwards Brothers, Inc. 1946.
- 2) Kirkham: Flow of ponded water into drain tubes in soil overlying an impervious layer, Trans. Amer. Geoph. Union, Vol.30, 1949
- 3) 上田 杉雄. 水で満たされてはいない集水暗きよの取水量について, オ3回 水理講演会講演集, 1969.
- 4) Polubarinova-Kochina: Theory of ground water movement, Princeton Univ. Press, 1962.