

水質の変化とその予報に関する研究

(2) 2次元等流としての厳密な解析について

正員 京都大学工学部 合田 健

結 言

この論文では、水流によって移流されつつ拡散・分散し、その途中重力や生物・化学的作用の影響を受ける物質の濃度変化特性を、拡散型方程式をもとに計算する、いわば従来の決定論的手法によっているが、水質環境基準との関連や、水質予報問題の基礎理論とすることを意識し、水理学的には単純な2次元等流の場合を扱って理論を展開した。これが従来の同種の研究と異なり、また進歩しえたと思われるのはつぎの諸点である。すなわち、

- (1) 求めようとする物理・化学的水質量の、断面平均値に関する取扱いが、従来かなり粗雑であった点を改めた。その例としては基礎式における移流項に欠すべき補正係数 α の性格と重要性とを明らかにした。
- (2) 物質拡散係数はふつう一定値として扱われるが、これが場所と時間の関数である場合の解析解を求めた。
- (3) 一般に対象となる分散性の物質には、下水処理の放流水中に含まれる浮遊物質のように、その沈降性が問題になるものが多いが、この種のものも包括して理論的に取扱った。
- (4) 解析過程で、この沈降作用に関する付加項は、1次の反応による生物学的減少作用の項と一緒にして扱えることを示し、その場合の両者の影響度の差異を明らかにした。
- (5) 系への横からの物質添加は、それが系の主要水理量に有意の影響がない範囲でこの解析に含めて取扱えることを示した。

想定した2次元等流は、せん断乱流のモデルを考えているので、これは応用上の制約にはなるが、都市河川や導水路、あるいは下水主幹線における、定常的な状態での水質予知には、この理論が相当の精度で役立つものと思う。しかし本稿の段階では、フィールドデータとの照合は、データ不足のため行なわれない。なおこの理論的研究の1部は、水道協会雑誌にごく概略を記した⁽¹⁾。

1. 基本方程式と仮定

水流のプロファイルは図-1に示す。管路の圧力流の場合は別の機会にゆずり、自由水面を有する2次元のせん断乱流で、 h = 一定とする。この系で物質移動現象を取扱うばあい、気相と液相の界面(水面)、液相と固相の界面(底面)の現象が問題であるが、 O_2, N_2 などの場合を除けば前者は実際上無視してもよいのでその立場をとる。

含有物質によって水理量が変わらないと仮定すると、物質収支式とは独立に運動、および水量連続の式を考えればよい。その2式は、底面粗度が一様に k_s であるとする、速度分布の対数法則および流量一定の式であらわされる。すなわち u_* を摩擦速度、 u_m を平均流速とすると、

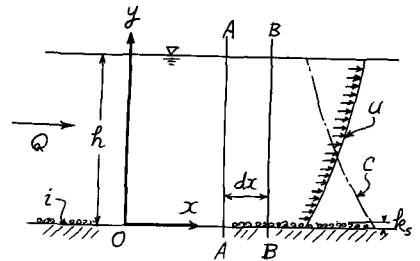


図-1 プロファイルと記号

$$U/u_* = 8.5 + 5.75 \log_{10} y/k_s \quad \text{-----}(1)$$

$$u_m h = Q = \text{一定} \quad \text{-----}(2)$$

である。 u_* はこの場合 $(gik)^{1/2}$ とすればよい。

つぎに、沈降性（または浮上性）を有し、しかも化学的、生物学的作用により変動する指標物質の濃度 C は、局所的につぎの物質収支式に従う。

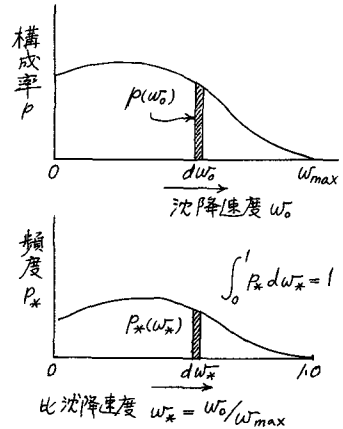
$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(uC) = \frac{\partial}{\partial x}(e_x \frac{\partial C}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(e_y \frac{\partial C}{\partial y}) + f_1(C) + w_{max} \frac{\partial}{\partial y} \int_0^{1.0} w_* C_* dw_* + f_2(x, t) \quad \text{-----}(3)$$

ここに C は考慮している浮遊・溶解性物質の指標の濃度、 e_x, e_y は x, y 方向に関する物質の見かけの拡散係数、 f_1 は生物、化学的作用による、単位時間当りの濃度増加（減少）率、 w_* は粒子の沈降速度を一般に w_0 とあらわした場合、それが図-2 のようなスペクトラムで一般に表示されるとして、その最大値を w_{max} としたときの比沈降速度（無次元）であり、 $w_* = w_0/w_{max}$ ； C_* は代表値 w_* であらわされる粒子グループの、濃度値 C におけるシェアとする。ここには当然つぎの関係がある：

$$\int_0^{1.0} \frac{C_*}{C} dw_* = 1, \quad \int_0^{1.0} P_* dw_* = 1;$$

つぎに $f_2(x, t)$ は、流路途中で加えられる指標物質の、該点における単位時間の量である。

(3) 式の解を論ずる前にその構成因子の物理・化学的意義を考えると、左辺第1項は指標値の時間的变化率、第2項はその移流による増加率、右辺第1、2項はそれぞれ x, y 方向での拡散による増加率、第3項以下の意義は上述のとおりである。ここで各項の寄与率の大小を論ずるのは早すぎるが、もし指標に DO や緑藻類のようなものを考えるならば、光合成作用を考慮せねばならない。また、右辺第4項の沈降作用については、この形のままでは実計算が著るしく複雑になるので、代表沈降速度 w_0 をとり、これを一定値として近似計算することは已むとえないであろう。このときは、右辺第4項は、 $w_0 \frac{\partial C}{\partial y}$ でよい。実計算の精度をあげたい時は、 $w_0 = 0$ とする溶解性物質 ($D.M.$) のグループと、沈降性物質 ($Settleable Solids, SS$) のグループとにわけて別々に計算するほうがよいと考えられる。何故ならば、そうすることにより、 $D.M.$ グループは濃度分布が y 方向に一様となることがわかって⁽²⁾いるので (3) 式の各項の断面平均値表示はかなり容易かつ simple になり、一方、 SS グループのみを独立に扱うばあいは (3) 式の右辺の $f_1(C)$ を事実上無視できることが多いからである。



四-2 沈降速度のスペクトラム

2. 断面平均値に関する物質収支式

(3)式をそのままでは、差分式としても計算が困難だから、各項の断面平均値を求める。以下の計算は(1), (2)両式を代入しつつ、(3)式を断面平均量 u_m, C_m, e_{xm}, e_{ym} などの諸量によって正確にあらわし、応用性のよい基礎式に変換しようとするものである。

1) 時間的变化

以下(3)式の各項を四-2のA-A断面につき積分し、 x の寄与率を求める奥で共通している。

$$dT = \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_0^h C dy \right) dx = \left(\frac{\partial C_m}{\partial t} \right) \cdot h dx \quad \text{----- (4)}$$

2) 移流項

u および C の断面平均値と、瞬間変動を無視した x の局所値、偏差の関係を下記のよう表わす。

$$u - u_m = u', \quad C - C_m = C'$$

dA_d を移流(Advection)によるA-B間の増分と考えると、積 (uC) が変域 $0 \leq y \leq h$ で x, y に連続、かつ微分可能であれば、

$$dA_d = \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^h u C dy \right) dx = Q dx \cdot \frac{\partial}{\partial x} [C_m (1 + \alpha)], \quad \alpha = \frac{1}{h} \int_0^h \frac{u' C'}{u_m C_m} dy$$

であり、 C_m, C' は x, t の関数であるが、 (C'/C_m) の x 方向の変化は短区間では無視できる。よって、

$$dA_d \cong (1 + \alpha) Q dx \frac{\partial C_m}{\partial x}, \quad \alpha = \frac{1}{h} \int_0^h \frac{u' C'}{u_m C_m} dy \quad \text{----- (5)}$$

である。 α について考えてみるに、 C が鉛直方向に一樣な場合($w_0 = 0$ か、乱流交換が極めて激しいとき)明らかに $\alpha = 0$ である。しからざる一般の場合は、対数法則により u が図-1に示したような特性をもつのに対し、 C は粒子の沈降性のため鎖線のような逆の傾向を示す。従って u' と C' の関係は一般にかなり強い負の相関を示す。これまで物質の拡散輸送を扱ってきた多くの研究者がこの奥を無視している奥に注意すべきである。しからばこの α のマグニチュードはどの程度であるか?

いま $C(x, y, t)$ の関数形が不明なので、1つの近似法として、 C が化学、生物学的作用の影響をうけぬと考へ、単に沈降性を保持しつつせん断乱流の場でどう分布するかを考えると、定常状態での基礎方程式

$$\frac{d}{dy} \left(e_y \frac{dC}{dy} \right) + w_0 \frac{dC}{dy} = 0$$

に対し、 $y = a$ (底面のすぐ近く)で $C = C_a$ として得られたRouseの式

$$\frac{C}{C_a} = \left(\frac{h-y}{y} \right) \left(\frac{a}{h-a} \right)^{w_0/\kappa u_*} \quad \text{----- (6)}$$

があるので、これから C の y 方向の分布型を概略知ることができ。例として、 $w_0 = 0.01, 0.1$, および 1.0 cm/sec とし、緩流河川の低水時の例とし

て、 $i = 1/1000$, $h = 100 \text{ cm}$, $a = k_s = 0.5 \text{ cm}$, $u_* \cong 10 \text{ cm/sec}$, $\kappa = 0.40$ として α を計算してみると表-1のよう結果が得られる。この表から判るように、 $w_0/u_* < 10^{-2}$ では、移流項の補正率

表-1 α の近似値

$w_0 (\text{cm/sec})$	w_0/u_*	α
0.01	10^{-3}	-1.22×10^{-3}
0.1	10^{-2}	-1.23×10^{-2}
1.0	10^{-1}	-0.172

は数パーセントで、それほど問題にはならないが、 $w_0/u_* > 10^{-2}$ では問題があり、例えば 10^{-1} ではその必要補正率は実に17.2%に達する。この表にみるように α は通常負であって、いまのような割引きを行なわないと、平均値に関する基礎式の計算は初から誤りを冒すことになる。例えば密度流の起っている沈殿池などがその好例である。実測値があつてそれと理論とを照合する場合にもつとも注意を要する点である。

したがつて、(5)式による dA_d の表示は α を入れたことに重要な意義がある。

3) 拡散項と沈殿項

$\partial/\partial x (e_x \partial C/\partial x)$ と $\partial/\partial y (e_y \partial C/\partial y)$ とは性格が異なるので別々に論ずる。前者の断面平均値表示を dD_x 、後者のそれを dD_y とあらわす。

(i) dD_x について：

2) におけると同様に、平均値と偏差の関係 $e_x - e_{xm} = e'_x$ 、 $C - C_m = C'$ を用いて演算し、

$$dD_x = \frac{\partial}{\partial x} \left[\int_0^h e_{xm} \frac{\partial C_m}{\partial x} \{1 + \beta\} dy \right] dx = h dx \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left\{ (1 + \beta) e_{xm} \frac{\partial C_m}{\partial x} \right\} \quad \text{----- (7)}$$

$$\equiv C(1 + \beta) h dx \cdot \frac{\partial}{\partial x} (e_{xm} \frac{\partial C_m}{\partial x}), \quad \beta = \frac{1}{h} \int_0^h e'_x \frac{\partial C'}{\partial x} / e_{xm} \frac{\partial C_m}{\partial x} dy \quad \text{----- (7)},$$

この β についても、(5)式の α と同様な検討が必要である。しかしこの場合は $(\partial C/\partial x)$ と e'_x との相関を、 u' と C' の相関と同様にみる必然性はない。まず $\beta = 0$ とした場合の $C(x, y, t)$ についてこの相関性を近似的に検討し、改めて補正係数として、必要があれば導入するという試行錯誤法でもよいのではないか。したがつてここではひとまず(7)₁を標準式としておく。ところで β は、 C の鉛直方向の変動がない場合は当然0であり、また e_x がせん断乱流の渦拡散係数 $\epsilon = u_* x y (1 - y/h)$ と等しい場合、おまじや方向に変化のない等方性乱流の場合も同様であるから、(7)₁をとることは厳密性をあまり損なっていないと考えられる。

(ii) dD_y について： $A \sim B$ 断面間の蓄積率ということから、

$$dD_y = \left\{ \int_0^h \frac{\partial}{\partial y} (e_y \frac{\partial C}{\partial y}) dy \right\} dx = \left[e_y \frac{\partial C}{\partial y} \right]_0^h dx$$

であり、水底と水面における、物質収支に関する境界条件が導入されねばならない。先ず冒頭の仮定により水面($y=h$)では物質の水面外脱出がないから

$$\left[e_y \frac{\partial C}{\partial y} + w_0 C \right]_{y=h} = 0 \quad \text{----- (8)}_1$$

であり、一方水底では、 $e_y(y=0)$ の値と物質の洗掘・堆積あるいは底質物質への移行が問題になる。

e_y は、渦拡散係数であれば $y=0$ で0である。また、沈降率は単位時間に $w_0 C dx$ であるから、

a) $y=0$ で沈殿堆積のみが起る場合：

$$-e_y \frac{\partial C}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0 \quad \text{----- (8)}_2$$

b) $y=0$ で沈殿のほかの作用による物質移動があり、それが単位時間に r の割合である場合：

$$-e_y \frac{\partial C}{\partial y} \Big|_{y=0} = r \quad \text{----- (8)}_3$$

そこで dD_y は基礎式(3)中の右辺第4項 $w_0 \partial C/\partial y$ と関係が深いことがわかる。そこで該項の $A \sim B$ 間での積算値 dW とあわせて考えよう。 dW は

$$dW = w_0 \left(\int_0^h \frac{\partial c}{\partial y} dy \right) dx = w_0 dx [c_{y=h} - c_{y=0}] \quad \dots \dots \dots (9)$$

て扱った方が計算としては合理的である。そこで、この項では(1)のパターンのみを扱えば、指標値Cに対する、dx 区間での単位時間当り流入率 $q(x)dx$ が A~B 区間での等しになるので、これが流水に完全混合したと考えた場合のC値の平均上昇率は C_0 であり、dx 区間の増加量としては

$$dF_2 = q_1 dx \quad \text{-----}(12)$$

とあらわすことができる。

6) 平均量であらわした基礎方程式

以上 1) ~ 5) の結果を総合して、物質収支式を書くと当然、 $dT + dA_d = dD_x + dD_y + dW + dF_1 + dF_2$ 、であるから、(4)、(5)、(10)_a、(10)_b、(11) および(12) 式から、つぎのように表現できる。

a) 水底で沈殿捕獲のみが起る場合：

$$\frac{\partial C_m}{\partial t} + (1+\alpha)u_m \frac{\partial C_m}{\partial x} = (1+\beta) \frac{\partial}{\partial x} (e_{xm} \frac{\partial C_m}{\partial x}) - \left(\frac{rW_0}{h} + k \right) C_m + \frac{q_1}{h} \quad \text{-----}(13)_a$$

b) 水底における物質移動率が単位時間に r である場合：

$$\frac{\partial C_m}{\partial t} + (1+\alpha)u_m \frac{\partial C_m}{\partial x} = (1+\beta) \frac{\partial}{\partial x} (e_{xm} \frac{\partial C_m}{\partial x}) - \left(\frac{rW_0}{h} + k \right) C_m + \frac{r+q_1}{h} \quad \text{-----}(13)_b$$

ここで式中の σ の値は、 α の値を表-1 に近似的に示したのと同様、(6) 式を基礎としてあらかじめそのマグニチュードを察することができる。パラメータは W_0/u_* であるから、図-4 には σ と W_0/u_* との関係を示してある。

また、上式の右辺第3項()内は、 $W_0 \geq 0.01$ cm/sec であれば k を無視してよいことを述べたが、表現の便宜上、

$$\frac{rW_0}{h} + k = A \quad \text{-----}(14)_1$$

また、

$$\frac{r+q_1}{h} = q_1 \quad \text{-----}(14)_2$$

と記すことにする。ここに A および q_1 は(13) 式中でいずれも定数として扱う量である。さらに、 $(1+\alpha)u_m = u_{m1}$ 、 $(1+\beta)e_{xm} = e_{x1}$ と記せば、(13)_a、(13)_b は統一的に(15) 式の表現でよい。

$$\frac{\partial C_m}{\partial t} + u_{m1} \frac{\partial C_m}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (e_{x1} \frac{\partial C_m}{\partial x}) - AC_m + q_1 \quad \text{-----}(15)$$

これは、断面平均値について与えられた精度の高い物質収支式として位置づけうる。実用の目的の計算、解析には、(1)、(2) および(15) をもとに適当な近似等を行なって操作すればよい。

3. 解析例-1, $q_1=0$, $r=0$ の場合

基本的な解析として、途中での汚濁負荷がなく、水路底には沈殿捕獲のみがある場合につき、(15)

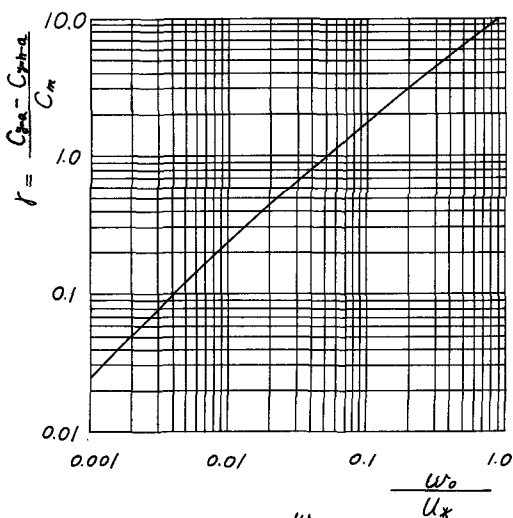


図-4 σ と $\frac{W_0}{u_*}$ との関係

式の解を求める。与えべき条件としては

$$\left. \begin{array}{ll} t = t_0, & x = 0 \text{ で } C_m = C_1 \\ \text{, } & x = x_0 \text{ で } C_m = 0 \end{array} \right\} \quad (t \geq t_0) \quad (16)$$

をとる。 $x=0$ は起臭; $x=x_0$ は 起臭から十分遠く離れた断面を意味し, 上流側で与えられた汚濁が, 下流方向へ時刻の経過とともに伝播する速さや機構を解析することになる。

(15) 式の解析解を一般的に求めることは容易でないが, つぎに示す2段階の変数変換により, 問題の物理的意義を失なうことなく, 原方程式の常微分方程式への変換と, x の完全解を得ることが可能となる。すなわち先ず, (15) の右辺末項に, 時刻の経過とともに指標値を減少させる作用の項があるが, これをつぎの第1変換で消去する。

$$C_m = \theta \exp[-At] \quad (17)$$

対応する境界条件は,

$$\left. \begin{array}{ll} t = t_0, & x = 0 : \quad \theta = C_1 e^{At_0} = \theta_1 \\ \text{, } & x = x_0 : \quad \theta = 0 \end{array} \right\} \quad (18)$$

である。この変換と $q_1 = 0$ によって (15) は次式にかわる。

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + u_m \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(e_{x_1} \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) \quad (19)$$

本式の左辺第2項, つまり移流項が含まれぬ場合の解析は, パラメーター $\xi = x/2t^{1/2}$ の導入によって, 随伴型の常微分方程式を解く問題に帰着することが Boltzmann⁽³⁾ により示されている。筆者はこのパラメーター ξ のもつ物理的な意義は, 移流を伴なう (19) 式の場合には, 新パラメーター

$$\eta = (x - u_m t) / 2t^{1/2} \quad (20)$$

に再現されると考え, 第2段の変換, すなわち独立変数変換を行なった。すなわち (20) により

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial x} &= \frac{d\theta}{d\eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{1}{2} t^{-1/2} \left(\frac{d\theta}{d\eta} \right), & \frac{\partial \theta}{\partial t} &= \frac{d\theta}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{1}{4} (x t^{-3/2} + u_m t^{-1/2}) \frac{d\theta}{d\eta}, \\ \frac{\partial}{\partial x} (e_{x_1} \frac{\partial \theta}{\partial x}) &= \frac{1}{4} t^{-1/2} \frac{d}{d\eta} (e_{x_1} \frac{d\theta}{d\eta}) \end{aligned}$$

などの変換式がえられるので, これらを (19) に入れて整理することにより,

$$-2\eta \frac{d\theta}{d\eta} = \frac{d}{d\eta} (e_{x_1} \frac{d\theta}{d\eta}) \quad (21)$$

が得られ, 結局 (19) の解をうることは, (21) 式をつぎの境界条件を満たすよう解くことに帰着する。

$$\left. \begin{array}{ll} \eta = \frac{-u_m t_0}{2\sqrt{t_0}} = -\frac{u_m \sqrt{t_0}}{2} = \eta_0 & : \quad \theta = \theta_1 \\ \eta = \frac{x_0 - u_m t_0}{2\sqrt{t_0}} = \eta_{x_0} & : \quad \theta = 0 \end{array} \right\} \quad (22)$$

(21) の解は変数分離法により,

$$-2\eta d\eta / e_{x_1} = d(e_{x_1} \frac{d\theta}{d\eta}) / (e_{x_1} \frac{d\theta}{d\eta})$$

の形にして1回積分すると, 常数 A_1 を含む次式がえられる。

$$A_1 \exp \left[-\int_{\eta_0}^{\eta} 2S / e_{x_1} \cdot dS \right] = e_{x_1} \frac{d\theta}{d\eta} \quad (S \text{ の変域は } \eta \text{ に同じ})$$

これをふたたび変数分離して積分すると2常数を含む一般解が得られる。

$$\theta = A_1 \int_0^{\eta} \frac{1}{e_{x_1}} \exp \left[- \int_0^{\eta} \frac{zS}{e_{x_1}} dS \right] d\eta + A_2 \quad \text{-----} (23)$$

条件 (22) の第2式より

$$A_2 = - A_1 \int_0^{\eta_{x_0}} \frac{1}{e_{x_1}} \exp \left[- \int_0^{\eta} \frac{zS}{e_{x_1}} dS \right] d\eta \quad \text{-----} (24)$$

さらに (22) の第1式から, $\theta_1 = A_1 \left\{ \int_0^{\eta_{x_0}} \frac{1}{e_{x_1}} \exp \left[- \int_0^{\eta} \frac{zS}{e_{x_1}} dS \right] d\eta - \int_0^{\eta_{x_0}} \frac{1}{e_{x_1}} \exp \left[- \int_0^{\eta} \frac{zS}{e_{x_1}} dS \right] d\eta \right\}$,

$$\therefore A_1 = \frac{\theta_1}{\int_{\eta_{x_0}}^{\eta} \frac{1}{e_{x_1}} \exp \left[- \int_0^{\eta} \frac{zS}{e_{x_1}} dS \right] d\eta} \quad \text{-----} (25)$$

となるので, (24), (25) を (23) 式に代入してつぎの完全解を得る。

$$\frac{\theta}{\theta_1} = \frac{\int_{\eta_{x_0}}^{\eta} \frac{1}{e_{x_1}} \exp \left[- \int_0^{\eta} \frac{zS}{e_{x_1}} dS \right] d\eta}{\int_{\eta_{x_0}}^{\eta} \frac{1}{e_{x_1}} \exp \left[- \int_0^{\eta} \frac{zS}{e_{x_1}} dS \right] d\eta} \quad \text{-----} (26)$$

この解が (22) の2条件式を満たし, (21) を満足するものであることは容易に判別できるが, θ が η のみの関数として表現されたことに特色があり, その物理的意義は5節に論ずる。

最後に (17) 式の逆変換により, C_m に関する solution (27) 式を得る。

$$\frac{C_m}{C_1} = \frac{\int_{\eta_{x_0}}^{\eta} \frac{1}{e_{x_1}} \exp \left[- \int_0^{\eta} \frac{zS}{e_{x_1}} dS \right] d\eta}{\int_{\eta_{x_0}}^{\eta} \frac{1}{e_{x_1}} \exp \left[- \int_0^{\eta} \frac{zS}{e_{x_1}} dS \right] d\eta} \cdot e^{-A(t-t_0)} \quad \text{-----} (27)$$

($t \geq t_0 > 0$, $\eta_0 \leq \eta < \eta_{x_0}$)

4. 解析例-2, 溶解性物質で生物学的1次反応に従う場合, ($\eta_1 = 0$, $r = 0$)

前節に求めた解析解と form は同じで, 式中の A が (14) により k となるだけである。すなわち,

$$\frac{C_m}{C_1} = \frac{\int_{\eta_{x_0}}^{\eta} \frac{1}{e_{x_1}} \exp \left[- \int_0^{\eta} \frac{zS}{e_{x_1}} dS \right] d\eta}{\int_{\eta_{x_0}}^{\eta} \frac{1}{e_{x_1}} \exp \left[- \int_0^{\eta} \frac{zS}{e_{x_1}} dS \right] d\eta} e^{-k(t-t_0)} \quad \text{-----} (28)$$

このほか, $\partial C_m / \partial t = 0$ の場合とか, $A = 0$ の場合, $r \neq 0$ の場合など, (28) のような完全解の式が可能な例がいろいろ考えられるが, これは別の機会に論ずる。

5. e_{x_1} の性格とパラメータ η の意義

(27) 式, あるいはその原式である (15) における e_{x_1} は, 指標物質の拡散係数であるが, それが (20) で定義される, η のみの関数であることの物理的意義が問題である。(27), (28) の解析解は, e_{x_1} が η の任意関数として C_m 値を定めてはいるが, 次元の長からいって, その関数形が全く任意でよいわけではない。ただ数学的な形式が一応整えられたことになる。パラメータ η は, x , t からなる関数で, (20) により自由度は減ったことになり, 普通にいう意味での e_{x_1} の一般性は見かけ上損なわれたように見える。しかしここで, 拡散方程式の解に $L^2 T^{-1}$ の元の量が必然的に入ってくることを, η の意

義がどこで結びつくかを考えねばならぬ。

初に記したとおり、水流の運動については(1)の型一カ等モデルを想定しているので、流れ、すなわち分散媒の状態をせん断乱流としたことになり、 x れが指標物質の拡散性を見かけ上支配すること考えねばならない。この制約のために、 e_{x_1} 、正しくは e_x を等方性乱流における渦拡散係数のようには扱いたくない。だからまず、素直に e_x が(1)の運動方程式に矛盾しない渦拡散係数に極めて類似した特性をもつとすれば、明らかに

$$e_x \cong e_y = u_* \kappa y (1 - \frac{y}{h}), \text{ または } e_x = a_0 e_y + \epsilon_c \dots \dots \dots (29)$$

(a_0, ϵ_c : 定数)

であり、 e_y の y 方向の平均値は、 $\kappa = 0.4$ とすれば、 $0.067 u_* h$ であるから、いま考えている力学モデルに関するかぎり、渦乱の挙動に物質がfollowしておれば、

$$e_{x_1} = e_x \cong e_m = 0.067 u_* h \dots \dots \dots (30)$$

とするのが、追従性のある物質に対しては最も妥当である。したがって、輸送される物質が物理的には「運動量」や「濃度」と同じような性格であるかぎり、 $e_{x_1}(\eta)$ の関数形について立ち入ったせんさくの必要はない。よって6.では、指標物質がせん断乱流にほぼ追従するものとして、見かけの拡散係数 e_{x_1} を(30)式、または e_m と η による関係にあるものとして数値計算する。

ところで指標物質濃度が一般に(15)式に従い、(20)の変換によって(27)式が導びかれるゆえんは何であるか。これは(15)式が、媒質流体の運動状態のいかんにかかわらず独立に成立する(ただし、 y , z 方向の移流が伴えば、左辺にそれだけ移流項がふえる)ことから、 η の元である $[L^2 T^{-1}]^{1/2}$ と結びつけて考えてみる。 $[L^2 T^{-1}]$ は拡散係数と同じ元であって、 $(x - u_m t) = x_1$ とすると、 x_1^2 と t とは、G. I. Taylorの統計理論における流体エレメントの t 時間内における、変動運動による平均2乗行程 $\bar{x}^2$ と t との比、

$$\frac{\bar{x}^2}{t} = D_v = 2 \bar{u}^2 \int_0^\infty R(\xi) d\xi, \quad R_\xi = \frac{\overline{u'(t) u'(t-\xi)}}{\bar{u}^2} \dots \dots \dots (31)$$

(Lagrangeの自己相関係数)

であらわせる、等方性乱れの渦拡散係数 D_v と η は $x-t$ 平面のある特定奥において

$$(D_v/2)^{1/2} = \eta. \dots \dots \dots (32)$$

の関係で結ばれる。ただし上式の u' は変動速度を意味している。

この関係は $x-t$ 平面(η -平面)のある特定奥のみに限るのか、一群の孤立集団で成立するか、それとも定まったひろがりをもつdomainでも成立するかは、媒質と指標物質のinterrelationによるわけで、一般には何ともいえない。

上述のように、媒質流体中での e_{x_1} の値が η の関数で表わされることの物理的、および数学的意義はあるといど了解されるが、詳細は今後の議論にまつ他ない。ただ云えることは、(1),(2)式のようなせん断乱流場を考えるかぎり、(29)→(30)式の線で e_{x_1} を取扱わざるをえない、ということである。

6. 数値解析例

途中からの汚濁の流入がなく、底面・側岸からの洗掘も考えない、3.のケースについて数値計算を行なった結果を示す。基本式は(27)であるが、粒子の沈降性を考慮している。論文の紙数の関係で計

算例の紹介は最小限度に止めることにした。

計算例の条件 河川の中・下流部における等流状態の例として、つぎの数値を与えた：

水深 (h) = 100 cm, こし配 (i) = $1/1000$, 摩擦速度 (u_*) = 10 cm/sec, (u_m) = 178.5 cm/sec,
 1次生物作用速度定数 (k) = 0.1/day = 1.2×10^{-5} /sec, 粒子の平均沈降速度 (w_0) = 0.1 cm/sec,
 (w_0/u_*) = 10^{-2} , これに対応する移流項補正係数 (α) = -1.23×10^{-2} , (β) = 1.0 (e_x としては渦
 拡散係数をとった) (e_{x1}) = $0.067 u_* h$, 沈殿項補正係数 (γ) = 0.24 (図-4) ;

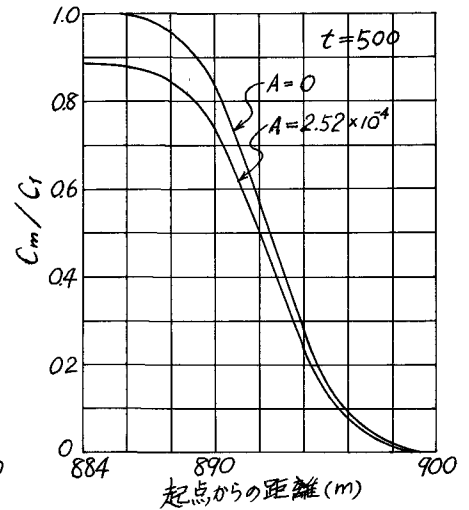
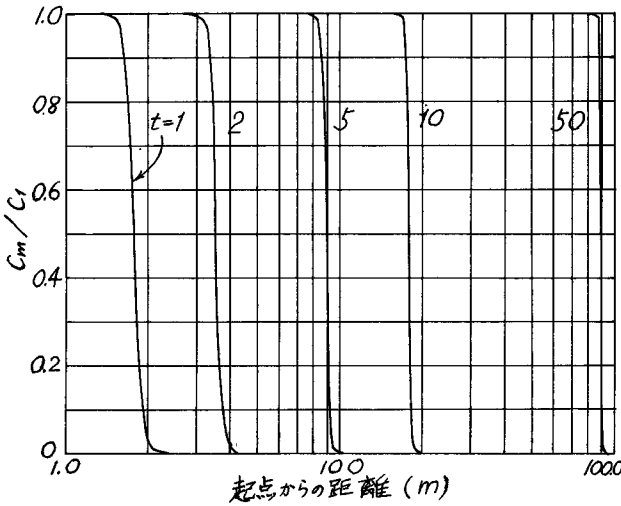


図-5(a) 数値計算例

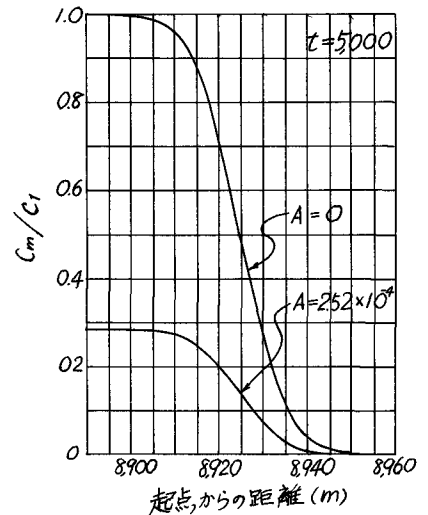
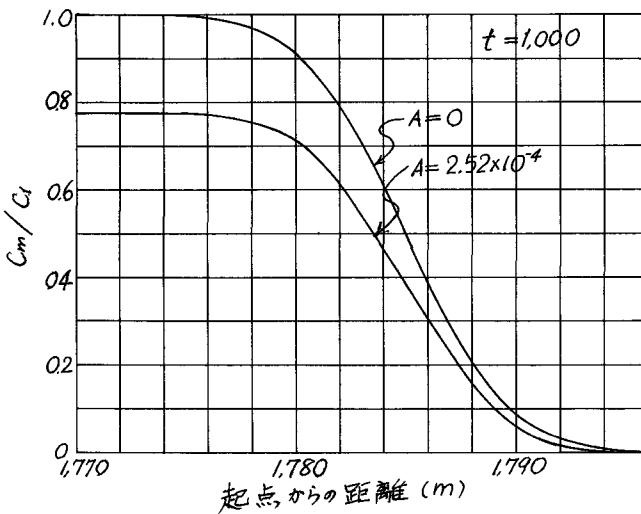


図-5(b) 数値計算例

図-5 (a), (b) は前記の計算条件に依する, 厚さからの水平距離 x に対する C_m/C_i の変化を示したものである。 $w_0 = 0.1 \text{ cm/sec}$ の場合は, 高性能の沈降地をキヤリ・オーバーする限界値に近いが, それに対応する (A) 値は $2.52 \times 10^{-4} / \text{sec}$ で, 1 次生物作用の効果は 1 桁以上の無限小となり, 利いてこない。粒子の沈降性が無視でき, しかも生物作用がこのマグニチュードで影響している場合は, 図中の $A=0$ の場合とみて事実上の誤りはない。上記のような沈降性は, $t > 500 \text{ sec}$ の段階で (b) 図に示すように, $A=0$ の場合と明確な相違を示すことに注意を要する。なお $t = 500 \text{ sec}$ とは, 平均流でいえば約 900 m 下流を意味している。この計算例では初期値 (t_0) = 1 sec としている。 A や σ の値, また w_0/u_* の変化がどういふ意味をもつか, より詳細な検討を目下行なっている。

7. 結 び

以上, 水流が 2 次元等流で, 含有物質の存在が水量に大きい影響を与えない, とみられる範囲で, 分散性や沈降性を有する含有物質の挙動を支配する基礎式 (1), (2), (3) をもとに種々の理論的検討を行なったが, その成果のうち従来の同種の研究より進歩したと思われる点は緒言に記したとおりであり, 要約すれば

- 1) 断面平均量に対する厳密な表現として (13) a, (13) b 式を得た。
- 2) 移流項に対する補正係数の性格と, 近似値ではあるが数値を明らかにした (表-1 が創)。
- 3) 拡散係数 E が, x と t で (20) 式に示すパラメータ η の関数として表現できる場合, 拡散方程式の解析解が求められることを示した。(27), (28) はその例である。
- 4) η の意義はまだ検討が十分でないが, 乱流統計理論で定義される渦拡散係数と物理的に関係のある量であることを指摘した。
- 5) 数値計算例で, 粒子の沈降性と生物学的減少作用の影響度が直接比較でき, これからの実用近似計算でとるべき方針がはっきりした。

等である。

ただし, 横からの物質添加や, 底面での物質交換がいろいろな条件で与えられた場合の問題は, 今回の課題として残っている。しかし数学的にはすでに片付いたといつてよい。

終りに, 今研究に種々協力していただいた大学院生海老瀬潜一, 祖岡保両君に謝意を表する。

引 用 文 献

- (1) 合田 健: 上水管理に関する問題の提起と分析 (I), 水道協会雑誌 421, 2~9 (1969. 10)
- (2) Vanoni, V. A.: Transportation of Suspended Sediment by Water, Trans. ASCE, 111, 67 (1946), ほか多数
- (3) Crank, J.: The Mathematics of Diffusion, Oxford Press, 148 (1964).

以上