

大気環境基準の確率論的考察

関西大学工学部 庄司 光
京都大学原子炉実験所 塙谷 恒雄 ○

現在、政府 厚生省を中心として大気汚染物質の環境基準の検討が進められ、いおう酸化物については既に閣議決定がなされている。本稿は、閣議決定の環境基準のパーセンタイル論について数学的解析を加えることを主たる目的としている。

1. 大気汚染物質の分布形

各種のデータの分布形のうち、ある種のものはその確率密度分布が対数正規型で近似されることが天文学、水文学、農学、医学、経済統計学、心理学、鉱山学などの分野において古くから知られている。¹⁾ 大気中の汚染物質は空間的、時間的に分布しているが、近年の微量物質の自動測定機の発達と測定網の充実により一点における時間的濃度分布を見出すことが可能になりつつある。

筆者らは最近大阪府、尼崎市、東京都の大気汚染物質濃度実測値の統計的結果、いおう酸化物、浮遊粉塵の濃度分布が対数正規型で近似されることを認めた。図1～3はその結果の例を対数正規確率紙上に示したものである。用いたデータは1時間平均値である。濃度変動の大きさは、図における直線の勾配に対応しており、勾配が大であれば濃度変動は小さい。最近の全国における大気汚染測定網の拡大は、膨大な量のデータを蓄積しているが、その統計処理は必ずしも充分ではない。図1～3のごとく対数正規型に整理することは、疫学などの研究に資するところがある。

対数正規分布の発生根拠はついての議論は多くあるが、充分なものがあるとは言えない現状であるが、その一つとして次のような解釈がある。すなわち変量化（観測された汚染物質濃度）が種々の因子 X_1, X_2, \dots （排出条件、気象条件、地形条件、測定条件など）によって次のように表わされると仮定すれば、

$$X = \prod_i X_i^{c_i} \quad (c_i \text{ は定数})$$

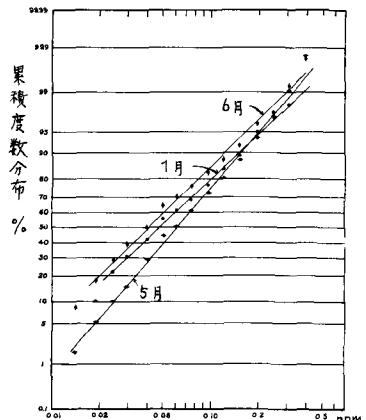


図1 対数正規分布へのあてはめ(いおう酸化物)
国設尼崎観測所 昭和41年

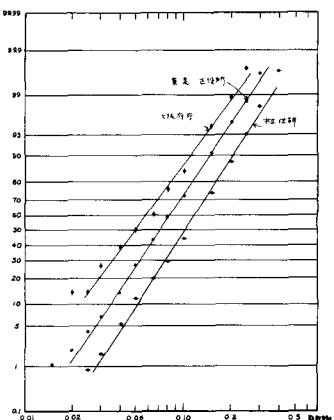


図2 対数正規分布へのあてはめ(いおう酸化物)
大阪市 昭和43年1月

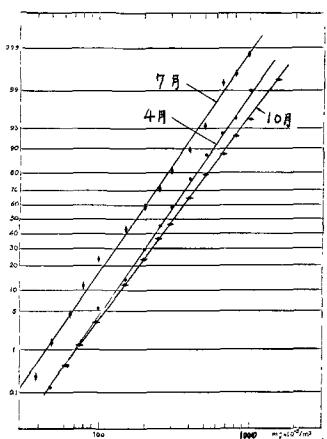


図3 対数正規分布へのあてはめ(浮遊粉塵)
大阪府立公衆衛生研究所 昭和41年

$\log X$ は各 $\log X_i$ の線型量となり、各 $\log X_i$ が独立に不規則変動をするとき、 $\log X$ は中心極限定理によって正規分布をなすことが導かれる。

一方、濃度の時間的変動 $X(t)$ (t は時間) は一つの確率過程であり、その対数値 $X(t) = \log X(t)$ ($X(t) > 0$) も同様に確率過程であり、定常性、エルゴード性を仮定して $X(t)$ 、 $X(t)$ の平均値、分散、相関係数、スペクトルなどが実測値から求められる。尚以下に使用する \log は自然対数を表わす。

2. 大気環境の制限式

現在諸外国における大気汚染対策の中に制定化されている種々の環境基準は、それぞれの国によってその性格、適用などの条件を異にしている。

近年、特に米国などにおいて大気の許容基準を表わすのに、汚染物質濃度とそのばく露時間をもつてすることが提唱されはじめている。²⁾国連の世界保健機構（WHO）の専門委員会においても、空気性状の良否をきめる指針として、動植物および環境一般におよぼす大気汚染の特有な作用の程度に対応した幾組かの濃度とばく露時間の組合せを提唱している。³⁾また同委員会は、遺伝的作用のある場合や現在の知識段階では定量的な評価ができない場合を指摘しており、人間の活動から生産される生物学的に有害な物質による大気汚染は可能な最大限まで避けるべきであることを強調している。

いまばく露時間 S に対応する人体に対する許容濃度を $X_{c(S)}$ とする。実際の大気中の汚染物質濃度 $X(t)$ は時間的に変動しており、 $X(t)$ を定常過程とみなすと $X(t)$ と $X_{c(S)}$ の関係は式(1)のよう

$$\exp\left(\frac{1}{S} \int_0^S \log X(t) dt\right) < X_{c(S)} \quad (1)$$

に表わされる不等式を満たさなければならぬ。実際に測定される $X(t)$ は単位時間毎に変化する階段状の不規則変動であって、式(1)は次のように変形される。

$$\left(\prod_{i=1}^S X_i \right)^{1/S} < X_{c(S)} \quad (2)$$

式(1)、式(2)にみられるように濃度変動の平均値として幾何平均を採用するのは、次の理由に依る。

1. 対数正規分布で近似される変量の平均値は、幾何平均をとるのが適当である。

2. 一定濃度におけるばく露時間と症状、一定ばく露時間における濃度と症状の関係をみる既往の医学研究の成果が利用できる。

式(1)、式(2)の対数をとると、次のような大気環境の制限式が求まる。

$$\frac{1}{S} \int_0^S X(t) dt < \log X_{c(S)} \quad , \quad X(t) = \log X(t) \quad (3)$$

$$\frac{1}{S} \sum_{i=1}^S X_i < \log X_{c(S)} \quad , \quad X_i = \log X_i \quad (4)$$

3. 平均操作による分布形の変化

1で述べた対数正規分布は、1時間平均値の確率密度分布である。ここでは任意の平均化時間 S による分布形の変化の様相を求める。

$X(t), -\infty < t < \infty$ を平均連続な定常過程で、スペクトル分布関数 $F(\lambda)$ をもち、 $E\{X(t)\} = \bar{X}$ とする。このとき $X(t)$ は振動領域の直交成分 $\psi(\lambda)$ で確率調和表現が可能である。

$$X(t) = \bar{X} + \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(it\lambda) dZ(\lambda) \quad (5)$$

濃度の時間的変動 $X(t)$ の対数値 $X(t)$ の二乗モーメントを σ^2 , $X(t)$ を平均化時間 S で移動平均したもののが二乗モーメントを $\sigma^2(S)$ とすると、これらはそれぞれ次のようになる。

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= E\{|X(t)-\bar{X}|^2\} \\ &= E\left\{\int_{-\infty}^{\infty} \exp(it\lambda) dZ(\lambda) \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-it\lambda) d\bar{Z}(\lambda)\right\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dF(\lambda) \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \sigma^2(S) &= E\left\{ \left| \frac{1}{S} \int_0^S (X(t) - \bar{X}) dt \right|^2 \right\} \\ &= E\left\{ \left| \frac{1}{S} \int_0^S \int_{-\infty}^{\infty} \exp(it\lambda) dZ(\lambda) dt \right|^2 \right\} \\ &= E\left\{ \left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(i\lambda S) - 1}{i\lambda S} dZ(\lambda) \right|^2 \right\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin(\lambda S/2)}{(\lambda S/2)} \right)^2 dF(\lambda) \\ &= \sigma^2 \int_0^{\infty} \left(\frac{\sin \pi n s}{\pi n s} \right)^2 \Phi(n) dn \end{aligned} \quad (7)$$

ここに $\Phi(n)$ はスペクトル密度函数であり、 $n = \lambda/2\pi$ である。なおこれより以降スペクトル密度函数を単にスペクトルと称する。

変動 $X(t)$ の確率密度函数を $B(X)$, $X(t)$ を平均化時間 S で移動平均したときの確率密度函数を $B_S(X)$ とすると、これらはそれぞれ式(8), 式(9)で表められる。

$$B(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(X-\bar{X})^2}{2\sigma^2}\right\} \quad (8)$$

$$B_S(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma(S)} \exp\left\{-\frac{(X-\bar{X})^2}{2\sigma^2(S)}\right\} \quad (9)$$

式(8), 式(9)は、式(7)にドリフトがつけられているが、現在我が国で得られる大気汚染自動測定機による実測データは $S = 1$ 時間 に相当するものが多いから、任意の平均化時間 S に対応する分布形は次のようにして求められる。

$$B_S(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma(S)} \exp\left\{-\frac{(X-\bar{X})^2}{2\sigma^2(S)}\right\} \quad (10)$$

$$\sigma(S) = \sigma(1) \sqrt{G(s)/G(1)} \quad (11)$$

$$G(s) = \int_0^\infty \Phi(n) \left(\frac{\sin \pi n s}{\pi n s} \right)^2 dn \quad (12)$$

スペクトル $\Phi(n)$ は変動 $X(t)$ の相関係数 $R(t)$ のフーリエ余弦変換であるから、これも実測値から求めることができます。

$$\Phi(n) = 4 \int_0^\infty R(t) \cos(2\pi n t) dt \quad (13)$$

$$R(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{\frac{1}{2T} \int_{-T}^T \{ X(t) - \bar{X} \} \{ X(t+\tau) - \bar{X} \} dt}{\frac{1}{2T} \int_{-T}^T \{ X(t) - \bar{X} \}^2 dt} \right] \quad (14)$$

実測値からのスペクトルの求め方については、多くの報告があるので省略する。従来から大気中の風速変動のスペクトルについては多くの研究成果が得られているが、濃度のようなスカラー量のスペクトルについては、その他に温度、気圧、屈折率などの測定がある。⁴⁾

スペクトルの函数形は、高周波域 (*inertial subrange, viscous subrange*)においては、Kolmogorov, Heisenberg らによて理論的に導かれている。⁵⁾ これはいわゆる $-5/3$ 乗則といわれるものである。 *inertial subrange* 以外の周波数域にも適用できる、大気汚染物質の濃度変動のスペクトルの函数形としては、通常マルコフのスペクトルと呼ばれる次式のものがある。

$$\Phi(n) = \frac{4\ell}{1 + 4\pi^2 \ell^2 n^2} \quad (15)$$

上式中の変数 n は周波数であり、定数 ℓ は *integral scale* と呼ばれ次のような性質をもつ。

$$\ell = \int_0^\infty R(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4} \Phi(n) \quad (16)$$

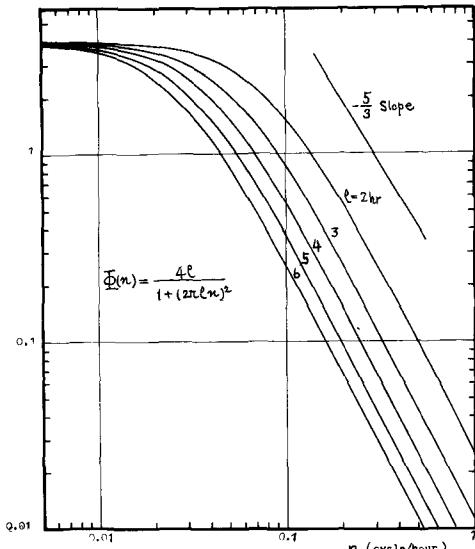


図 4 マルコフのスペクトル $\ell = 2 \sim 6 \text{ hr}$

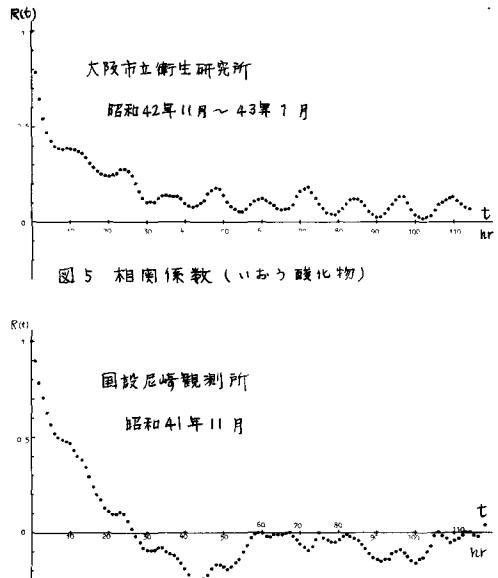


図 5 相関係数 (ハオウ酸化物)

マルコフのスペクトルを図示したものが図4である。図における周波数の単位は cycle / 時である。

尼崎市、大阪府における大気汚染物質の濃度変動の実測値から計算した相関係数、スペクトルの一例を図5～8に示す。相関係数は1時間平均値を使用して計算した。スペクトルの計算は、赤池の方法に依った。

マルコフのスペクトルを使い、式(12)に基いて $G(s)$ を求めた結果を図9に示す。



図4 スペクトルの例 曲線はマルコフの
スペクトル $\tau = 5.4 \text{ hr}$

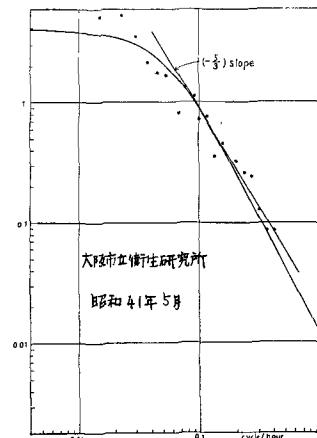


図5 スペクトルの例 曲線はマルコフの
スペクトル $\tau = 3 \text{ hr}$

4. 環境基準

大気汚染物の濃度分布が対数正規型で近似されることは、どのように大きな値をもつ許容値に対してもその許容値を超過する確率が0ではないことを示している。それゆえ、大気環境の制限式(3)または(4)を完全に満足させるような濃度変動 $\chi_c(t)$ はモデル上では見出せない。しかしながら、許容値を超過する年間の平均的な超過確率をあるレベル内にあさえ、これをもって大気環境の管理規制の基準とすることができる。

さて s 時間平均濃度が、ばく3時間 s に対応する許容値 $\chi_c(s)$ を超過する確率 $\eta(s)$ は次のようく表わされる。

$$\eta(s) = \int_{\log \chi_c(s)}^{\infty} B_s(X) dX = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma(s)} \int_{\log \chi_c(s)}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{(X-\bar{X})^2}{2\sigma^2(s)} \right\} dX \quad (17)$$

上式は変数変換 $y = (X-\bar{X})/\sigma(s)$ によって次のような誤差函数となる。

$$\eta(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_y^{\infty} \exp \left\{ -\frac{x^2}{2} \right\} dx \quad (18)$$

$$y(\log \chi_c(s)) = (\log \chi_c(s) - \bar{X}) / \sigma(s) \quad (19)$$

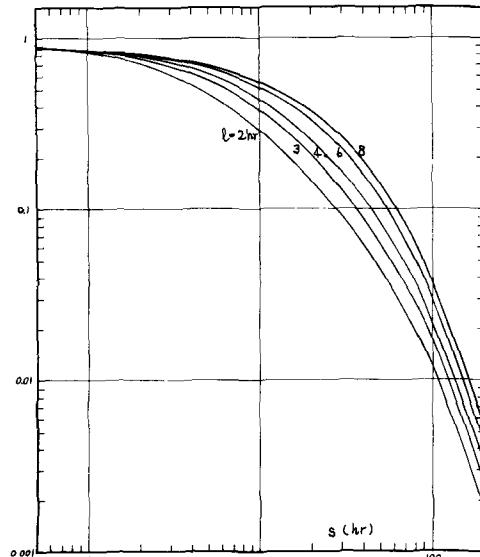


図9 積分関数 $G(s)$ (スペクトルはマルコフのスペクトル)

$\eta(s)$ の意味は次のとおりである。すなはち $T (> s)$ 時間のうちで、 s 時間平均濃度が許容値を越える時間は $T \times \eta(s)$ である。これを時間 s で除したものは、 T 時間のうちで s 時間平均濃度が許

容値を越える回数 N に等しい。

$$N = T \cdot \eta(s) / S \quad (20)$$

この N を 1 より小さくすることによって大気環境の管理規制の基準が求まる。

$$\eta(s) < \frac{S}{T} \quad (21)$$

いま $\eta(s) = S/T$ を満足する $y_c(\log X_c(s))$ の値を式(18)から数表を使って求め、これを y_c とすると、式(21)は次式に相当するようになる。

$$y_c < \frac{1}{\sigma(s)} (\log X_c(s) - \bar{X}) \quad (22)$$

以上の結果を使った一例を示せば以下の通りである。

いおう酸化物の人体に対する許容濃度は、1時間値 0.1 ppm 、24時間値 0.05 ppm を基礎にして外挿し、内挿し、 $X_c(s) = 100 s^{-0.218} \text{ (ppb)}$ なる指数型を仮定する。管理の基準となる期間 T を1カ年とし、スペクトルは $\ell = 4$ 時間のマルコフのスペクトルを使用する。計算結果を表1および図10にまとめる。すなむち許容濃度を上まわらないための大気の環境は、 \bar{X} 、 $\sigma(1)$ の組み合せが図10の斜線部になければならぬ。

5. 政府の「いおう酸化物の環境基準」について

厚生大臣の諮詢機関である生活環境審議会は、昭和43年7月に「いおう酸化物による大気汚染防止のための環境基準の設定について」と題した答申を提出した。これに基いて政府は昭和44年2月に「いおう酸化物にかかる環境基準」を閣議決定した。⁶⁾

生活環境審議会の答申の内容は次のとおりである。

1) 環境基準の設定に関する基本原則

環境基準は、人の健康の保護を第一とし、その確保の上にたって生活環境保全と経済発展との調和が図られるように考慮されている。また環境基準は行政の目標であり、大気中のいおう酸化物の濃度をそれ以下に維持することを目的にするものであるが、緊急時の事態が発生するニヒも例外的に認められるものである。

2) 環境基準に係る具体的条件

環境基準は、瞬濃度を基礎的な尺度として、濃度 時間 出現頻度に係る具体的数値によって示し、この尺度に合致する条件を年間を通じて実現可能な限り最大限確保することを原則とする。

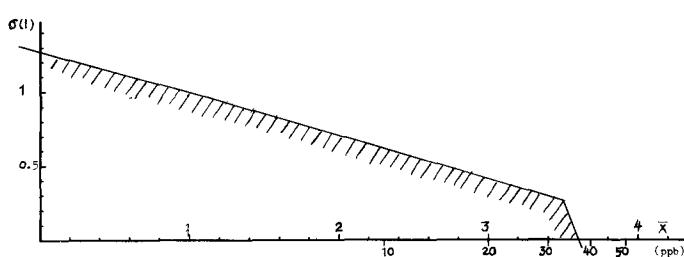


図10 環境濃度制限図

s	s/T	y_c	$X_c(s)$	$G(1)/G(s)$
1 hr.	0.000114	3.63	4.6052	1
2	0.000228	3.51	4.4542	1.026
4	0.000457	3.315	4.3032	1.203
8	0.000913	3.12	4.1522	1.616
12	0.00137	2.995	4.0632	2.105
1 day	0.00274	2.78	3.9122	3.885
2	0.00548	2.545	3.7612	9.31
4	0.01096	2.29	3.6122	33.3
7	0.01918	2.07	3.4892	
14	0.03836	1.77	3.3372	
1 m.	0.08333	1.38	3.1682	

$$\frac{1}{\sigma(s)} = \frac{1}{\sigma(1)} \sqrt{G(1)/G(s)}$$

$$G(s) = \int_0^\infty \Phi(n) \left(\frac{\sin \pi n s}{\pi n s} \right)^2 dn$$

$$T = 1 \text{ year} = 8760 \text{ hrs}$$

表1 環境基準の計算例

閾濃度は次のとおりである。

1日平均値(1時間値の24時間平均)---0.05 ppm, 1時間値---0.1 ppm
具体的条件は次のとおりである。

- (ア) 年間を通じて、総時間数に対し、1時間値が0.2 ppm以下である時間数が少くとも99%以上維持され、かつ1時間値の年平均値が0.05 ppmをこえないこと。
- (イ) 年間を通じて、総日数に対し、1時間値の1日平均値が0.05 ppm以下である日数が少くとも70%ないし80%以上維持されること。
- (ウ) 年間を通じて、総時間数に対し、1時間値が0.1 ppm以下である時間数が少くとも88%ないし93%以上維持されること。

3) 測定方法

測定方法は、当面導電率法による。この測定結果に基いて環境基準に適合しているか否かを判断する場合には、地域の特性を総合的に勘案して、2ないし3地点の測定結果により行なうものとする。なお、地形その他の事情による局地汚染については、1地点の測定結果により当該地区を判断する。

4) 環境基準の適用

略。

生活環境審議会は最初に環境基準専門委員会の閾濃度に関する勧告をうけてこの環境基準の策定をしたが、この過程においてすでに発言的には誤りを含めている。これについては庄司が別に論じてるので省略する。⁷⁾以上の答申に基いて策定された閣議決定の環境基準は次のように変更せられている。

- (ア) 年間を通じて、総時間数に対し、1時間値が0.2 ppm以下である時間数が少くとも99%以上維持され、かつ1時間値の年平均値が0.05 ppmをこえないこと。
- (イ) 年間を通じて、総日数に対し、1時間値の1日平均値が0.05 ppm以下である日数が少くとも70%以上維持されること。
- (ウ) 年間を通じて、総時間数に対し、1時間値が0.1 ppm以下である時間数が少くとも88%以上維持されること。

閣議決定の環境基準を式(17)～(20)を適用して数式表現をすれば次のとおりである。

すなわち条件(ア)は $\int_{\log(200)}^{\infty} B_1(X) dX \leq 0.01$ (23)

$$\bar{X} \leq 50 \quad (24)$$

条件(イ)に対応して、 $\int_{\log(50)}^{\infty} B_{24}(X) dX \leq 0.3$ (25)

条件(ウ)に対応して $\int_{\log(100)}^{\infty} B_1(X) dX \leq 0.12$ (26)

ここで濃度の単位は ppb (10^{-3} ppm)を採用している。式(24)の \bar{X} は算術平均である。計算の簡略化のため式(25)の24時間平均は幾何平均を表わすものとする。

式(23)～(26)を式(22)のごとく($\sigma(1), \bar{X}$)平面上に表わすと次のようになる。

a) 式(23)について。

$$\int_{\log(200)}^{\infty} B_1(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_y^{\infty} \exp(-\frac{y^2}{2}) dy \leq 0.01, \quad y = \frac{1}{\sigma(1)} (\log(200) - \bar{X}) \quad (27)$$

式(27)は次式に相当する。 $\frac{1}{\sigma(1)} (5.3 - \bar{X}) \geq 2.325$

b). 式(24)について。 Ahrens (1954)は花崗岩中の各種物質の濃度分布が対数正規型であることを認め、その際に算術平均 \bar{X} と幾何平均 g_m との間に次式が成り立つことを経験的に確めた。⁸⁾

$$\log_{10} \frac{\bar{X}}{g_m} = 1.1513 \lambda^2 \quad (28)$$

ここで入は対数値の標準偏差である。一方 Zimmer と Larsen (1965) は、大気中の各種物質の濃度分布が対数正規型であることを認め、各平均時間に対応する算術平均 \bar{X} 、幾何平均 g_m 、幾何標準偏差 S_g とのあいだの関係を次式で表わした。⁹⁾

$$\bar{X} = g_m S_g^{0.5 \log S_g} \quad (29)$$

式(28)、式(29)の記号を本稿中の記号で表わすと $g_m = \exp \bar{X}$ 、 $\lambda = \sigma$ 、 $S_g = \exp \sigma$ となり、両式は次のようにまとめられる。

$$\log \bar{X} - \bar{X} = k \sigma^2 \quad (30)$$

式(29)より $k = 0.5$ を用いて式(24)を表わすと次のような放物型の不等式が得られる。

$$\bar{X} + 0.5 \sigma^2 \leq 3.91$$

c). 式(25)について。 a). と同様にして次式を得る。

$$\frac{1.97}{\sigma(1)} (3.91 - \bar{X}) \geq 0.525 \quad (31)$$

ここで式(19)による変数変換の際の G(24)の計算は $\tau = 4$ 時間のマレコフのスペクトルを使っている。

d) 式(26)について。 a). と同様にして次式を得る。

$$\frac{1}{\sigma(1)} (4.6 - \bar{X}) \geq 1.175 \quad (32)$$

a). ~ d). の結果を図示したものが、図 11 である。

次に式(20)に示される超過回数 N を求めるところとなる。

式(23)の条件

$$N = \frac{8760 \times 0.01}{1} = 87.6$$

式(25)の条件

$$N = \frac{8760 \times 0.3}{24} = 109.5$$

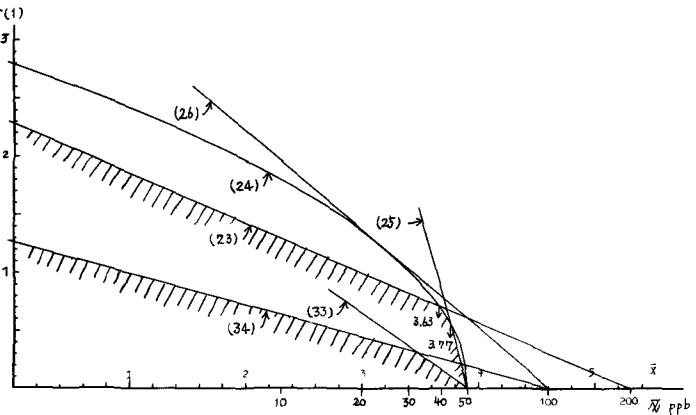


図 11 政府等による環境濃度制限図

式(26)の条件

$$N = \frac{8760 \times 0.12}{I} = 1051.2$$

上に述べた生活環境審議会およびその答申に基いた政府の環境基準には、諸種の難点がみられる。その詳細を述べれば次のとおりである。

- ① 答申においては、基礎的な尺度である濃度に合致する条件を年間を通じて実現可能な限り最大限確保することを原則とするとある。これに対して示された具体的な条件は、1日平均値で 109.5, 1時間平均値では 1051.2 の超過回数をもち、この原則からかけ離れたものになっている。
- ② 環境基準は、濃度・時間・出現頻度の組み合せによる 4 個の条件で表わされているが、「1時間値 0.1 ppm がが年間の 88% 以上」という条件は 図 11 によって示されるように他の 3 個によって暗に表現されているから、必要条件ではあっても充分条件ではない。
- ③ 環境基準は 4 個の条件が並列的に述べられているが、平均濃度の別によっては不充分なものがある。図 11 に示されるように $\bar{X} < 3.63$, すなむち幾何平均値が 0.037 ppm 以下の場合は 式(23) によって示される条件が必要充分条件である。 $\bar{X} < 3.77$, すなむち幾何平均値が 0.043 ppm 以下の場合は 式(25) によって示される条件は不充分なものである。
- ④ 平均値を求めるのに幾何平均を使用していいないために、対数正規分布をなす大気汚染現象をより正確に把握していいない。

以上に述べた難点は、環境基準専門委員会の勧告（1 時間値 0.1 ppm, 1 日平均値 0.05 ppm 以下）に忠実でないことに依るものである。基礎的尺度である濃度に忠実であるための環境基準は次のようなものでなければならぬ。

$$\text{1日平均値 } 0.05 \text{ ppm について } \int_{\log(50)}^{\infty} B_{24}(X) dX < \frac{24}{8760}$$

これは変数変換を行なうと次のようになる。

$$\frac{1.97}{\sigma(1)} (3.91 - \bar{X}) > 2.78 \quad (33)$$

$$\text{1時間値 } 0.1 \text{ ppm について } \int_{\log(100)}^{\infty} B_1(X) dX < \frac{1}{8760}$$

これは変数変換を行なうと次のようになる。

$$\frac{1}{\sigma(1)} (4.6 - \bar{X}) > 3.63 \quad (34)$$

式(33), 式(34) を図 11 に示す。すなむち年間の \bar{X} , $\sigma(1)$ の組み合せが図の斜線部になければならぬ。

本稿の作成にあたり、大阪府公害指導課より各種資料を提供していただいた。ここに謝意を表したい。

本稿中の各種計算は、京都大学電子計算機 OKITAC-5090H を使用した。

文献

1. Chow, V. T. : Proc. ASCE, 80 (1955)
2. Guide posts on air quality. Air Eng. 9, 6 (1967)
3. WHO Tech. Rep. No. 271 (1964)
4. Lumley, J. L., Panofsky, H. A. : The structure of atmospheric turbulence. Interscience Publishers (1964)
5. Batchelor, G. K. : The theory of Homogeneous Turbulence (1953)
栗友正訳：乱流理論，吉岡書店 (1960)
6. 生活環境審議会答申「イオウ酸化物による大気汚染防止のための環境基準の設定について」
昭和43年7月15日
7. 庄司光；許容度と環境基準 戒能通考編 公害法の研究 日本評論社 (1969)
8. Ahrens, L. H. : Geochim. et Cosmochim. Acta 5 (1954)
9. Zimmer, C. E., Larsen, R. I. : J. of APCA 15 (1965)