

1 はじめに

河川における再曝気は水質汚濁予測を行なう場合には必ず考慮しなければならない因子であり、河川に対する有機汚濁物の許容流入量を規定する最も大きな要素の一つであるといえる。このため、再曝気係数を水量で表わそうという試みが色々な方法で行なわれてきたが、いま普遍的に適用できるような公式は確立されてないといえる。

この問題に対するアプローチの方法は2つに大別することができ、1つは次元解析によって関係する因子をとり出し、実測値を用いて係数を定めに行くという方法であり、もう一つの方法は表面更新理論、さかのぼって2境膜理論から近づく方法である。本文では表面更新理論に基づいて検討し、かなり広い範囲に対して適用できる式を導くことができた。

2. 再曝気現象の物理的モデルの検討

再曝気に関する理論的基づけの試みは Whitman と Lewis¹⁾ の2境膜理論に始まる。2境膜理論では気相と液相との境界に気膜および液膜を考へ、それぞれ膜内では分子拡散によって酸素が定常的に移動すると考へる。ただし、気膜内での分子拡散は液膜内での分子拡散に較べて非常に大きいので、実質的には気膜を無視して液膜のみを考へる。このような液膜が常時存在しており、液膜中での酸素濃度勾配は一定であるとすれば、液膜を通過する酸素の移動速度は次式で表わされる。

$$\frac{dm}{dt} = D_m A \frac{(C_s - C_L)}{L} \quad \dots (1)$$

ここで、 m ；境界面を通過する酸素の移動量、 t ；時間、 D_m ；水中での酸素の分子拡散係数、 A ；境界面の面積、 C_s ；境界面での溶存酸素濃度（飽和溶存酸素濃度）、 C_L ；液膜より下の水中での溶存酸素濃度、 L ；液膜の厚さ、

したがって、液膜より下の水中での溶存酸素濃度の変化は次式で表わされる。

$$\frac{dC_L}{dt} = \frac{D_m}{L} \cdot \frac{A}{V} (C_s - C_L) = \frac{D_m}{LH} (C_s - C_L) \quad \dots (2)$$

したがって、Whitman と Lewis の2境膜理論では酸素移動係数 K_L を $K_L = D_m/L$ 、再曝気係数 K_2 を $K_2 = K_L/H$ （ただし、 H ；水深）と与えておくことになる。

しかし、乱流の流水では表面は静止した状態ではなく、水面下の水によって連続的に交換されるので、分子拡散で酸素の移動が行なわれる層は存在しているがその厚さは時間的に一定ではなく、したがって、酸素の移動も定常的ではないと考へる方が妥当であろう。このような考へ方に基づいて2境膜理論から発展した理論に Higbie²⁾、Danckwerts³⁾ の境膜侵透理論、O'Connor と Dobbins⁴⁾ および Dobbins⁵⁾ の表面更新理論がある。Higbie のモデルは水と空気との接触時間が非常に短い場合には2境膜理論のような定常的な酸素移動を考へることはできないとして、Stefan の無限の深さへの液への分子拡散の理論を再曝気に応用したものである。Stefan の理論は拡散方程式、

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D_m \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \quad \dots\dots (3)$$

を次のような境界条件によって解いたものとして濃度分布を考えている。

$$\begin{cases} t=0, x>0 & \text{で } C=C_L \\ t>0, x=0 & \text{で } C=C_s \\ t>0, x=\infty & \text{で } C=C_L \end{cases}$$

この場合の(3)式の解は

$$C = C_L + (C_s - C_L) \operatorname{erf}(x/2\sqrt{D_m t}) \quad \dots\dots (4)$$

(4)式を時間で微分して $x=0$ とおけば、時間 t のときの空気中からの酸素移動速度が求まり

$$N_i = (C_s - C_L) \sqrt{D_m/\pi t} \quad \dots\dots (5)$$

したがって、表面が交換されてから時間 t までの間の酸素移量は、(5)式を積分して

$$\int_0^t N_i dt = 2(C_s - C_L) \sqrt{D_m t/\pi} \quad \dots\dots (6)$$

表面が交換されてからつぎに交換されるまでの時間 τ と考えれば、平均の酸素移動速度は(6)式を τ で割って

$$N = 2(C_s - C_L) \sqrt{D_m/\pi \tau} \quad \dots\dots (7)$$

時間 τ を表面の平均の更新率 $r = 1/\tau$ で置きかえれば

$$N = 2(C_s - C_L) \sqrt{D_m r}$$

したがって、酸素移動係数 K_L は

$$K_L = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{D_m r} \quad \dots\dots (8)$$

Higbie のモデルは、水の表面はもはや一定の接触時間の間は静止しており、その後瞬間的に混合され、この過程が無限に繰返されるというモデルであるが、Danckwerts は接触時間または膜の存在時間は Higbie が仮定したように一定ではなく、短時間に交換される部分もあり、非常に長時間交換されない部分もありとし、存在時間の確率分布を導入して Higbie の理論を修正した。水面のある部分が交換される場合は、その部分が今迄存在していた時間に全く無関係で、ある瞬間に交換される割合は水面にとった単位面積のうち r を含む部分であるとすれば、存在時間の分布 $f(t)$ は次式のような形になる。

$$f(t) = r e^{-rt} \quad t \geq 0, \quad r \text{ は更新率} \quad \dots\dots (9)$$

流水の表面が、(9)式で表わされるような確率分布を持った存在時間の微小部分から成っているとすると、Higbie と同様な方法で酸素移動係数 K_L を求めれば

$$K_L = \sqrt{D_m r} \quad \dots\dots (10)$$

となり、Higbie の K_L と非常に良く似た形になる。

O'Connor と Dobbins のモデルは、Whitman と Lewis の2境膜理論と、Danckwerts の境膜侵透理論とを組合わせたもので、Danckwerts の場合には存在時間が非常に長い部分では、分子拡散が深く進行して行くのに反し、O'Connor と Dobbins のモデルでは、存在時間がいくら長い部分でも分子拡散が行なわれる深さは限られており、それより深い部分では乱流拡散が常に行なわれていると考えている。したがって、拡散方程式(3)を解く境界条件は Higbie, Danckwerts が用いた境界条

件とは異なり、次のような境界条件を用いている。

$$\begin{cases} t=0, & 0 < x < L & \text{で} & C = C_u \\ t > 0, & x = 0 & \text{で} & C = C_s \\ t > 0, & x = L & \text{で} & C = C_u \end{cases}$$

この境界条件を用いて (3) 式を解き、酸素移動係数 K_L を求めると、

$$K_L = \sqrt{D_M r} \coth \sqrt{r L^2 / D_M} \quad \dots \dots (11)$$

しかし、(11) 式中 $a \coth \sqrt{r L^2 / D_M}$ は通常の条件の下では 1 に非常に近い値なので、結局は Danckwerts の (10) 式に一致することになり、表面更新理論と一致する限り

$$K_L \propto \sqrt{D_M r} \quad \dots \dots (12)$$

としてよいと考えられる。したがって、再曝気係数を水流量で表わすという問題は表面更新率 r を水流量の関数としていかに表わすかに帰着する。

O'Connor と Dobbins は、表面更新率 r は水面の交換に関与する渦による変動流速 $|v|$ に比例し、渦の大きさのスケール L に反比例するとして $r = |v|/L$ と表わした。つぎに、流水を 2 つに分類して「面附近でも流速勾配のある流水と流速勾配のない流水とに分け、流速勾配のある非等方性乱流の場合には Prandtl の混合距離理論を用いて、表面の交換に関与する渦の大きさのスケールを混合距離に等しいと置き、更新率 r をつぎのように表わした。

$$r = |v|/L = dU/dy = (HgI)^{1/2}/\kappa y \approx (HgI)^{1/2}/\kappa H \quad \dots \dots (13)$$

ここで、 U ；平均流速、 y ；河床からの距離、 g ；重力の加速度、 I ；動水勾配、

κ ；カルマンの常数

また、流速勾配のない等方性乱流の場合には、Kalinske がミシシッピ川で実測した結果を利用して、変動流速および混合距離がそれぞれ平均流速および水深の約 10% であるとし、更新率 r をつぎのように表わした。

$$r = |v|/L \approx 0.1 U/0.1 H = U/H \quad \dots \dots (14)$$

Dobbins は前の理論を発表した後、表面更新率 r と液膜の厚さ δ について再検討を行ない、表面の交換は表面張力に乱れのエネルギーが打勝つて起るとして表面交換率を次式で表わした。

$$r = C_1 \rho L E_s / \sigma$$

ここで、 C_1 ；常数、 ρ ；水の密度、 E_s ；表面附近での乱れの逸散エネルギー、 σ ；表面張力さらに、液膜の厚さ δ を Kolmogoroff の消散スケールに比例するものとして、更新率 r をつぎのように表わした。

$$r = \frac{C_2}{C_3} \frac{\rho U^{3/4} E^{3/4}}{\sigma} \quad \dots \dots (15)$$

ここで、 C_2 ；常数、 C_3 ；流水の特性によって定まる値

以上、表面更新理論に基づく再曝気の理論について概略的にみてきたが、このような考え方には妥当でないと思われる仮定も含まれている。たとえば、O'Connor と Dobbins の理論については、流速の対数分布式を水面まで適用するのは疑問であるし、また、等方性乱流の場合として、変動流速および乱れのスケールをそれぞれ平均流速および水深の 10% として一律に用いるのはあまりにも便宜的と思われる。また、Dobbins の理論の場合液膜の厚さとして Kolmogoroff の消散スケールをもそのまま用い

ているが、表面に存在する渦の大きさを規定するパラメーターには表面張力も含まれているので、Kolmogoroffの消散スケールをこのように用いるのは適当でないと考えられる。

そこで、(12)式にもとづいて Γ を水理量の関数で表わしてみよう。いま、水面の近く近傍を考えた場合、自由表面では表面張力が働くので、表面からある深さ λ までの層では主流とは流水の機構が異なっているはずである。この深さ λ については、表面では表面張力のみが乱れを減衰させるパラメーターであるから、次元解析によつて、

$$\lambda \propto \sigma / \rho v_s^2 \quad \dots \dots (16)$$

ここで、 v_s ; λ なる深さまでの垂直方向の変動流速

(16)式は水面の歪度を規定する式ともいえるわけだ、 λ は垂直方向の変動流速によつて、表面張力に抗して水面が持ち上げられる高さの程度を表わすともいえる。

y を水面からとった水深方向の座標とし、 v を水深方向の変動流速とすると、 v は λ なる深さまでは y の一次に比例すると考えよう

$$v = v_s y / \lambda \quad \dots \dots (17)$$

また、乱れの長さのスケール l も表面に近づくにつれて一次に減少すると考えられるので

$$l \propto y \quad \dots \dots (18)$$

したがって、表面の交換に関与する渦の存在時間 t は (17), (18) 式より

$$t = v/l = v_s / \lambda \quad \dots \dots (19)$$

となる。 v_s は $y = \lambda$ の所での変動流速であり、種々の流速スケールのものから構成されているようが、再曝気に関係するものは周期の大きいものから支配的であると考えられるので、Kolmogoroffの消散スケールの渦の流速スケールは比例すると考えよう

$$v_s \propto (\nu E)^{1/4} \quad \dots \dots (20)$$

ここで、 ν ; 水の動粘性係数、 E ; 単位体積当りのエネルギー消散率

(16), (20) 式を (19) 式に代入し、 $\tau = 1/t$ とおけば、 C を比例常数として

$$\tau = C \rho (\nu E)^{3/4} / \sigma \quad \dots \dots (21)$$

(21) 式は結果的には Dobbins が誘導した (15) 式と同じ形になつてゐるが、係数の意味が異なる。つまり、Dobbins の (15) 式の場合は係数が流水の特性によつて定まるとしているのに反し、(21) 式では常数である。

(21) 式における単位体積当りのエネルギー消散率 E は $E = g I U$ であり、さらにマニングの平均流速公式を用いると

$$E = n^2 g U^3 R^{-1/3} \quad \dots \dots (22)$$

ここで、 n ; マニングの粗度係数、 R ; 径深

(22) 式を (21) 式に代入すると

$$\tau = C \rho g^{3/4} n^{3/2} \nu^{3/4} U^{9/4} / (\sigma R)$$

したがって、(12) 式より

$$K_L = C' \cdot \frac{g^{3/4} \rho^{1/4} \nu^{1/8} D_m^{1/4} n^{3/4}}{\sigma} \cdot \frac{U^{9/8}}{R^{1/2}} \quad \dots \dots (23)$$

両曝気係数 K_2 の形で表わすと

$$K_2 = C' \cdot \frac{g^{3/8} \rho^{1/8} U^{1/8} D_m^{1/2} n^{3/4}}{G^{1/2}} \cdot \frac{U^{3/8}}{H \cdot R^{1/4}} \quad \dots \dots (24)$$

$H \div R$ としたときには,

$$K_2 = C' \cdot \frac{g^{3/8} \rho^{1/8} U^{1/8} D_m^{1/2} n^{3/4}}{G} \cdot \frac{U^{3/8}}{H^{3/4}} \quad \dots \dots (25)$$

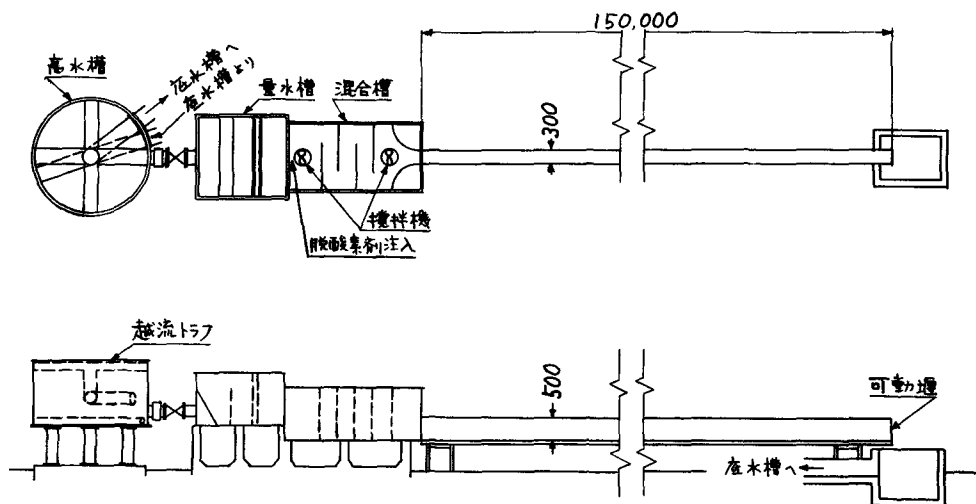
3. 実測値による検証

(25) 式には常数 C' があり, この値が未知なので実験水路で測定した両曝気係数によつて C' を定め, 種々報告されている実験値での両曝気係数によつて (25) 式の適用性を検討することとした。

1) 実験方法 および実験結果

実験に使用した水路は図-1 に概略を示すようなもので, 幅 30 cm, 深さ 50 cm, 長さ 150 m の鋼製水路である。実験条件は次の通りである。水路勾配: 約 $1/7,500$ および $1/2,000$, 水深: 0.04 m ~ 0.33 m, 流速: 0.15 m/s ~ 0.45 m/s, 水温: 6.5 °C ~ 28.6 °C, 測定区間長: 100 m, 水路の粗度: 0.011 ~ 0.013

図-1 両曝気実験用水路略図 単位 mm



水路の上流端で注入する脱酸素剤には亜硫酸ソーダを用い, 触媒として塩化コバルトを 5 ppm (as Co) 使用した。溶存酸素の測定はサイフォンを用いて採水し, ウィンクラー・ナトリウムアザイト変法によつて行なった。なお, 分析誤差を小さくするために 1 回の採水につき試料を 5 本採水して分析した。両曝気係数 K_2 の計算は次式によつて行なった。

$$k_2 = (\log D_u - \log D_d) / t$$

ここで, D_u ; 上流側の溶存酸素不足量 (ppm), D_d ; 下流側の溶存酸素不足量 (ppm),

t ; 流下時間 (day)

このようにして計算した実験水路での k_2 を表-1 に示す。なお, 表-1 には筆者らが荒川および江

川で測定した再曝気係数⁶⁾をあわせて示してある。

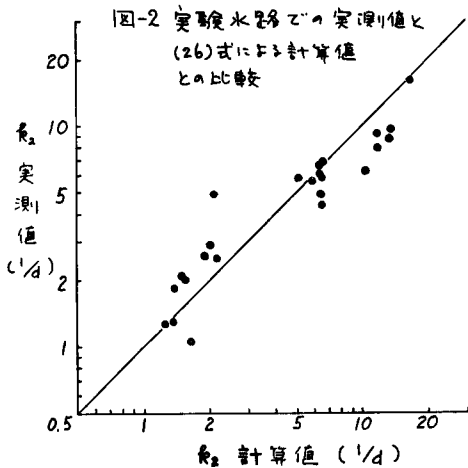
表-1 再曝気係数実測値

この再曝気係数は河水が流下して行く間の溶存酸素収支を測定し、これから計算したものである。

先づ、本文で提案した(24)式について検討するために、表-1の実験水路での実測値を用いて(24)式中の常数 C' を定めると、 $C' = 3.21 \times 10^5$ となり、(24)式は次のように表わされる。(ただし、再曝気係数を10を底とする形で表わした場合、 k_2 以外の単位はすべてM.K.S系)

$$k_2 = 3.21 \times 10^5 \frac{g^{1/2} \rho^{1/2} U^{3/2} D_H^{1/2}}{\sigma^{1/2}} \cdot \frac{\eta^{3/4} U^{3/4}}{H R^{1/4}} \quad (26)$$

(26)式で計算した値と実験水路での実測値との比較を図-2に示すが、常数をこれらのデータから求めたので当然であるが、よく一致している。



2) 河川での実測値による検証

(26)式において水温20℃の場合を考

え、 $g = 9.8 \text{ m/s}^2$, $\rho = 0.998 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$, $\nu = 1.0105 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$, $D_H = 2.037 \times 10^{-7} \text{ m}$

$\sigma = 7.275 \times 10^{-2} \text{ kg/s}^2$ を代入すると、20℃の場合の再曝気係数はつきようになる。(ただし、 $H \div R$ とした場合)

$$k_2 = 22.56 \eta^{3/4} U^{3/4} / H^{3/2} \quad \dots (27)$$

河川での再曝気係数の実測値と水量とをあわせて報告してあるデータとして、Churchillらの

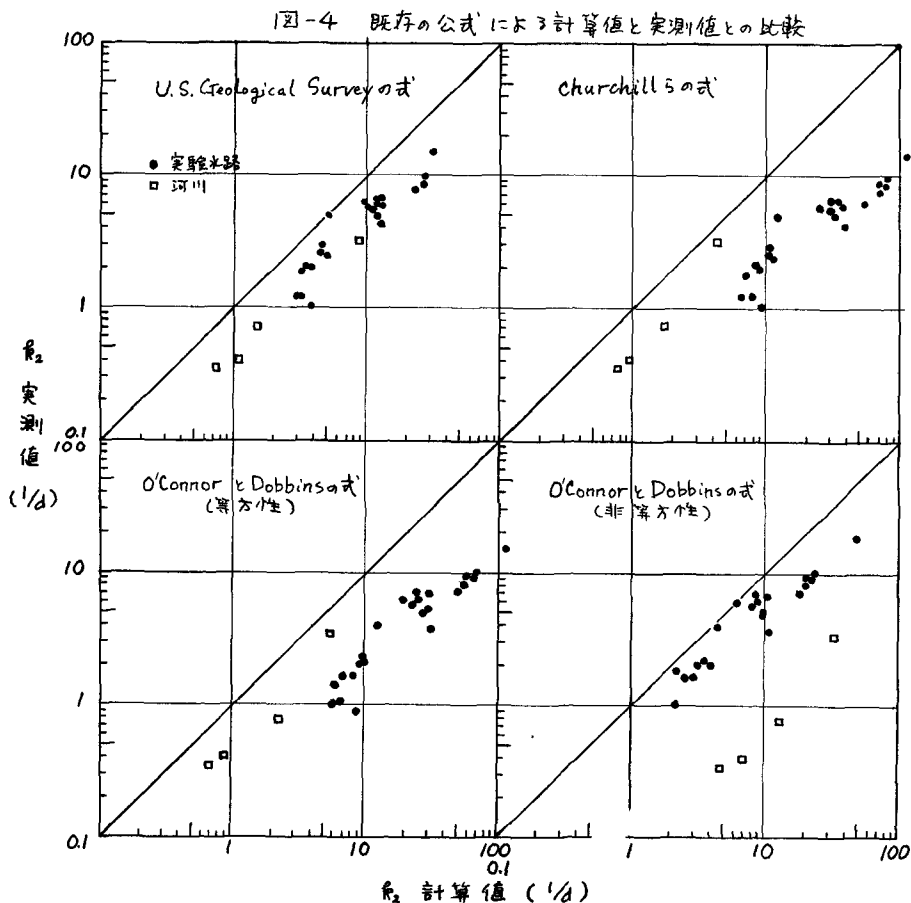
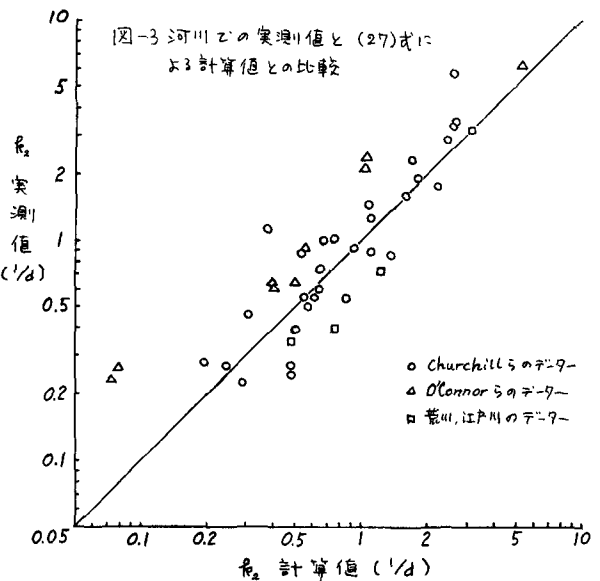
実験番号	水温 ℃	水深 m	径深 m	流速 m/s	k_2 1/d	備考
1	9.8	0.0827	0.0533	0.198	3.68	水路5配 1/7,500 $\eta = 0.011$ ~ 0.013
2	7.5	0.1554	0.0763	0.156	4.00	
3	9.7	0.1052	0.0618	0.264	4.91	
4	6.6	0.190	0.0831	0.170	2.08	
5	9.0	0.220	0.0891	0.176	0.88	
6	6.5	0.220	0.0857	0.189	2.33	
7	9.1	0.235	0.0916	0.181	1.69	
8	6.0	0.221	0.0894	0.226	2.03	
9	7.4	0.2907	0.0989	0.198	1.06	
10	7.5	0.2835	0.0981	0.211	1.71	
11	7.0	0.3290	0.1030	0.210	1.03	水路5配 1/2,000 $\eta = 0.011$ ~ 0.013
12	7.5	0.3288	0.1030	0.228	1.52	
13	21.6	0.169	0.0795	0.410	5.68	
14	23.7	0.147	0.0742	0.380	5.19	
15	24.0	0.131	0.0699	0.341	6.80	
16	22.7	0.0772	0.0510	0.311	8.17	
17	23.0	0.0772	0.0510	0.311	9.53	
18	23.0	0.0675	0.0466	0.296	9.12	
19	23.8	0.0669	0.0463	0.29	10.22	
20	23.1	0.170	0.0797	0.439	6.98	
21	23.2	0.163	0.0781	0.418	6.33	
22	23.2	0.211	0.0877	0.455	6.08	
23	28.6	0.0926	0.0573	0.342	7.20	
24	28.9	0.0542	0.0398	0.234	6.81	
25	28.6	0.0398	0.0315	0.188	18.6	

江戸川	調子橋～野田	22.0	1.9		0.80	0.36	$\eta = 0.031$
	野田～大井	22.0	1.5		0.86	0.41	
荒川	荒川大橋～大井	28.0	0.45		0.52	3.5	$\eta = 0.040$
	大井～横田	28.0	0.8		0.53	0.77	$\eta = 0.035$

データーおよび O'Connor と Dobbins のデーターがあるが、これらのデーターと表-1の荒川、江戸川のデーターにより、(27)式による計算値と河川ごの実測値との比較を行なった。結果は図-3 に示してあるが、計算値と実測値とは比較的よく一致しており、(27)式の常数を実験水路ごの実測値によって定めたことを考えるとかなり普遍性のある式であるといえる。

3) 既存の公式の適用性の検討

表-1 に示したデーターを用いて既存の公式の適用性を検討してみる。検討の対象とした式は U.S. Geological Survey の式、Churchill の式、O'Connor と Dobbins 式



(等方性の場合および非等方性の場合)の4つの式で、流速、水深などを m-sec 系で表わした場合とを以下のような式である。

U.S. Geological Survey の式	$R_2 = 2.2 V / H^{4/3}$
Churchill の式	$R_2 = 2.18 V^{0.969} / H^{1.673}$
O'Connor と Dobbins の式 (等方性)	$R_2 = 3.74 \times 10^{-4} (D_M V)^{1/2} / H^{3/2}$
O'Connor と Dobbins の式 (非等方性)	$R_2 = 10.48 \times 10^{-4} D_M^{1/2} I^{1/4} / H^{5/4}$

このうち U.S. Geological Survey の式は O'Connor と Dobbins および Churchill の河川で実測した値と、Krenkel のおよび Streeter の実験水路で測定した値を用いて最小2乗法で求めたものであるが、現在までの実験公式のうちでは最も広範囲のデータに基づいた式といえる。

これらの式による計算値と表-1に示した実測値との比較を図-4に示す。ただし、計算値と計算するにあたっては、実験水路では側壁の影響が大きいのと酸素移動係数 K_L に関係する水深には径深を用い、 K_L と水深を割って R_2 としてある。図-4によると U.S. Geological Survey の式では実測値と計算値がほぼ比例する形になり、であり、絶対値で比較すると計算値の方が約2倍大きい。水理量の变化に対応する再曝気係数の変化は良く表わしているといえる。O'Connor と Dobbins の等方性の式の式と Churchill の式とはほぼ同じ傾向であり、河川における実測値は計算値に比較的近い値になっているが、実験水路の値がかなりくっついていく。この傾向は他の研究者からも報告されており、これらの式が普遍的ではないことを示している。また、O'Connor と Dobbins の非等方性の式の式は、逆に実験水路での実測値は比較的計算値に近いが、河川での実測値は計算値からかけ離れた値になっている。

4. 結論

表面更新理論に基づいて(25)式または(27)式で表わされる再曝気公式を導き、実験水路および河川での実測値によって検討した結果、かなり広い適用範囲を持つた式であることがわかった。また、既存の公式の中では U.S. Geological Survey の式が広い適用範囲を持っていることがわかった。

参考文献

- 1) W.C. Whitman and W.K. Lewis, Industrial and Engineering Chemistry, Vol. 26, 1924
- 2) R. Higbie, Trans. Alch. E., Vol. 31, 1935
- 3) P.V. Danckwerts, Industrial and Engineering Chemistry, Vol. 43, 1951
- 4) D.J. O'Connor and W.E. Dobbins, Trans. ASCE, Vol. 123, 1958
- 5) W.E. Dobbins, Proc. ASCE, SA 3, 1964
- 6) 村上, 第5回環境工学研究討論会講演集
- 7) W.B. Langbein and W.H. Durum, Geological Survey Circular 542, 1967