弾力性概念による需要水量と浄水場設計の分析について

京都大学工学部　正会員　工博　末石冨太郎，同　工修　○住友恒

1. はじめに

従来，上水道分野では安全性の高い設計，管理を第一とし，安全な給水を行なうことを非常に重視してきた。それがゆえに，逆にともすれば安全性さえ満たしうればよいという考え方もあって，結果的には技術の発展を阻んできたことも否定できないようである。浄水技術にしても，原水水質，薬注，フロキュレーション，沈殿，ろ過などの相互関係に案外不明確な問題が少なくない。これらの各単位浄水技術をいかに組合せれば安全な給水を行ないうるかという問題はかなり究明されてはいても，一歩つき進んで，各技術がいかに相互に関連しあっているかについては不明確な問題がきわめて多い。上水道の歴史が古いわりには不明確なままに放置されてきた問題が多く，技術の底が浅い一つの理由として，上述の安全性の取扱いが挙げられよう。さらに周知のごとく，浄水技術が複雑な応用科学として関連する因子があまりに多く，場合場合によってそれぞれ条件が異なり，定量化，定式化しがたい事実も指摘できる。ところで，近年他の技術分野と同様，技術の合理化が叫ばれるに至り，浄水技術の分野にも計装施設の充実，コンピューターの導入など，種々の体制改善に顕著な努力が払われてきたが，公正にみて，その技術上の効果は未だ限られたものであり，行政的，心理的効果あるいは作業員の労務管理上の効果の域にとどまるものが少なくない。より良い水質の，より多量の，そしてより経済的な給水，いわゆる合理的な給水技術への活用とか，さらにより安定した給水への種々の制御技術への活用にはほど遠いものがあろう。

そこで本文では，上下水道系統の合理化を目標としつつ，まず必要となる諸現象の相関機構の究明を試みるものであり，諸現象の水量水質特性分析を通じて不明確なままに放置されてきた技術問題を少しでも明らかにしてゆこうとするものである。水量水質特性分析の手法の一つとして，筆者らは近年ひきつづき限界量分析あるいは微少変量分析を用いてきたが，[1),2),3),4),5)など] 本文はそれらの研究に一連するものである。

2. 微少変量分析による上下水道系統の合理化に関する基本的考察

本文に取り上げる弾力性分析は微少変量分析の一つで，複雑な上下水道系統の合理化に有効な分析手法であり，単に表現上の新規性を示すにとどまらないことをまず明らかにしておく必要があろう。本章では3章に示すような弾力性分析例をいかに合理化に結びつけてゆくべきかについて基本理念を簡単にまとめておく。

2-1. 微少変量分析による水量水質特性分析と上下水道系統の合理化について

一般に，ある一つの事象が均衡しているとき，n個の未知変数（$x_1 \sim x_n$）は事象の構成因子α_j（$j=1\sim m$）を媒介変数として次のように陰関数の形に表わされる。

$$f^i(x_1, x_2, \cdots\cdots x_n, \alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots \alpha_m) = 0 \quad , (i=1,2,\cdots,n), \qquad \text{——(1)}$$

ここで各パラメータα_jが所定の値に定まれば，各未知変数はそれに対応して決定されよう。

$$x_i = g^i(\alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots \alpha_m) \quad , (i=1,2,\cdots,n) \qquad \text{——(2)}$$

均衡方程式あるいは状態方程式ともいう(1)式あるいは(2)式が明らかであれば，種々の状態遷移も確実に追跡することができ，何の問題も生じないばかりでなく，人為的な一つの目標に向って状態を合理化してゆくこともできることはいうまでもない。　いま目標関数をZと表わし，

$$Z = f(\alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots, \alpha_m) \quad \text{———} (3)$$

制約条件を，

$$\left.\begin{array}{l} G^1(\alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots, \alpha_m) = 0 \\ G^2(\alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots, \alpha_m) = 0 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ G^n(\alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots, \alpha_m) = 0 \end{array}\right\} \quad \text{———} (4)$$

と表わすとき，ラグランジェの未定剰数λを導入して，次の関数

$$H = f(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m) + \lambda_1 \cdot G^1(\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_m) + \cdots\cdots + \lambda_n \cdot G^n(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m) \quad \text{———} (5)$$

から極値条件を次のように求めることができる。

$$\left.\begin{array}{l} G^k(\alpha_1^0, \alpha_2^0, \cdots\cdots \alpha_m^0) = 0 \ , \ (k = 1 \sim n) \ \text{で，} \\ \dfrac{\partial H^0}{\partial \alpha_i} = H_i^0 = \dfrac{\partial f^0}{\partial \alpha_i} + \lambda_1 \dfrac{\partial G^{10}}{\partial \alpha_i} + \lambda_2 \cdot \dfrac{\partial G^{20}}{\partial \alpha_i} + \cdots\cdots + \lambda_m \cdot \dfrac{\partial G^{m0}}{\partial \alpha_i} = 0 \\ i = 1 \sim m \end{array}\right\} \quad \text{———} (6)$$

(6)式では$(m+n)$個の未知数に関する$(m+n)$個の等式を構成するので，α_j，λ_jについて一つの最適解を求めることもできる。（第2必要条件については省記）　たとえば制約条件が1式のとき，極値条件として次の等式をえる。

$$\frac{\dfrac{\partial Z}{\partial \alpha_1}}{\dfrac{\partial G'}{\partial \alpha_1}} = \frac{\dfrac{\partial Z}{\partial \alpha_2}}{\dfrac{\partial G'}{\partial \alpha_2}} = \cdots\cdots = \frac{\dfrac{\partial Z}{\partial \alpha_m}}{\dfrac{\partial G'}{\partial \alpha_m}} \quad \text{———} (7)$$

ところが上下水道分野では，1.にも述べたようにこの状態方程式が不明確なままになっているものが多い。　先の例にもどって急速ろ過方式においても，原水濁度をα_1，薬注量α_2，沈殿時間α_3，ろ速をα_4として，ろ水水質xを次のように表示することができるだろうか。

$$x = g(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \quad \text{———} (2)'$$

現状では各α_j値の設計基準値$\bar{\alpha}_j$を設定して，ろ水水質基準値$\bar{x}$を満たす安全な給水を行ないうることを明らかにしているにすぎない。　すなわち，　$\bar{x} \geq g(\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \bar{\alpha}_3, \bar{\alpha}_4)$ ——— $(2)''$

したがって，(6)式や(7)式などをもとに一挙に合理化への方策を示しえないのみならず，ある要因α_jが$\alpha_j + \Delta\alpha_j$に変化した場合の対策すら明示しがたいのが現状であろう。　すなわち，コンピュータを導入しても，計算の基本となる状態方程式の不足がその活用の大きな障害となっていることはすでに述べた通りである。　以上からも明らかなように上下水道系統の合理化には，まず種々の角度から水量水質特性を明らかにして，(1)式あるいは(2)式に示される均衡関係を明確にしてゆくのが先決問題であろう。　しかし，これとて決して容易なことでなく，一般に上下水道技術においては，多数の因子が複雑に関連するので厳密な均衡方程式を確立することが不可能なことさえ少なくない。

そこで，未知のものは未知のままに残して，特に途中の遷移過程をとび越えてある原因因子の微少変量が結果的にいかなる変化をもたらすかを重点的に分析し，特性を調べようとするのがここに示す微少変量分析の主目的である。　こういった特性分析がひいては状態方程式の推測を可能にするとともに，あるいは直接合理解への方向ずけを可能にするものと期待できる。

いま，ある均衡状態（$x_1^0, x_2^0, \cdots\cdots x_n^0$，$\alpha_1^0, \alpha_2^0, \cdots\cdots, \alpha_m^0$）で，仮に一つのパラメータ$\alpha_1$が微少量変化すれば，その結果(1)式より次の関係を得る。

$$\left.\begin{array}{l} f^1_{x_1}\cdot\left(\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_1}\right)+f^1_{x_2}\cdot\left(\frac{\partial x_2}{\partial \alpha_1}\right)+\text{-------}+f^1_{x_n}\cdot\left(\frac{\partial x_n}{\partial \alpha_1}\right)=-f^1_{\alpha_1} \\ \text{------} \qquad\qquad\qquad \text{---} \qquad\qquad\qquad \text{------} \\ f^n_{x_1}\cdot\left(\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_1}\right)+f^n_{x_2}\cdot\left(\frac{\partial x_2}{\partial \alpha_1}\right)+\text{------}+f^n_{x_n}\cdot\left(\frac{\partial x_n}{\partial \alpha_1}\right)=-f^n_{\alpha_1} \end{array}\right\} \text{————} (8)$$

行列表示して、 $[f^i_j]\cdot[\partial x_j/\partial\alpha_1]=[-f^i_{\alpha_1}]$ ———— $(8)'$

種々の議論を(1)あるいは(2)式上で行ないたいが、これらの定式化がきわめて困難であるので、ひとまず、(8)式をもとに議論を進め、明らかにしうる特性をまず分析してゆこうとするのが基本的な考え方で、システム工学あるいは近代数理経済学の分野でもこういった手法が採用されているようである。ここでは全体システム構成に関する正確な知識が必要でない代りに、各パラメータの変化の影響量に関する相対的な知識が要求されるけれども、一般には均衡条件の一つだけをシフトさせるようなパラメータを特に取り上げて考察するなどして問題を進めてゆくことが可能になるのが特徴である。 分析は瞬間的変化率の議論に限られず、微少有限変化の場合にも適用できるので、その応用性は広範囲にわたる。 たとえば、(8)式から、 $\left(\frac{\partial x_k}{\partial \alpha_1}\right)^0=\left(-\sum_1^n f^i_{\alpha_1}\cdot A_{ik}\right)/A$ $k=1\sim n$, ———— (9)

ただし、 $A=[f^i_{x_k}]$, A_{ik} は i 行, k 列要素の余因子である。

最も簡単に、(9)式右辺各因子の正負符号のみが既知のときには、 $\left(\frac{\partial x_k}{\partial \alpha_1}\right)^0$ の符号がわかり、 α_1 の変化によって x_k はいかに変化するか、その変化の方向を定性的に把握でき、種々の対策が生れてくる。

$(\Delta x_k/\Delta\alpha_j)^0 \cong (\partial x_k/\partial\alpha_j)^0$, ただし, Δ は微少有限変量 ———— $(9)'$

$(9)'$ 式を定量的にも把握できれば、この変化量は1単位の α_j の変化に起因する x_k の変化量とみなして、α_j 1単位の存在価値を評価し、各因子相対評価の定量化も可能となる。

以上に示した例からも、こういった分析が複雑な上下水道系統の合理化に結びつくことは明らかであろうが、最も端的には均衡方程式が得られないままに、次のように(7)式の近似検討も可能である。

$$\frac{\frac{\Delta Z}{\Delta\alpha_1}}{\frac{\Delta G'}{\Delta\alpha_1}}=\frac{\frac{\Delta Z}{\Delta\alpha_2}}{\frac{\Delta G'}{\Delta\alpha_2}}=\text{-----}=\frac{\frac{\Delta Z}{\Delta\alpha_m}}{\frac{\Delta G'}{\Delta\alpha_m}} \text{————} (7)'$$

2-2. 弾力性分析について

以上に微少変量分析の基本概念のみを簡単に示したが、その一環として弾力性分析がある。[6]
ある評価因子を x_i と表わせば、評価因子は一般に他の種々の関連要因によって(2)式のように表わされうる。 ところで、一つの特殊な場合として、各因子を p 倍するときに状態方程式が次のような関係を示すときに弾力性分析が有効となる。

$$x_i=g(p\alpha_1,\ p\alpha_2,\text{------},p\alpha_m)=p^{\beta}\cdot g(\alpha_1,\alpha_2,\text{------},\alpha_m) \text{————} (10)$$

すなわち、数学的にいって、x_i が β 次の同次関数であるとき弾力性分析が注目される。 オイラーの定理より、 $\left(\alpha_1\cdot\frac{\partial}{\partial\alpha_1}+\alpha_2\cdot\frac{\partial}{\partial\alpha_2}+\text{-----}+\alpha_m\cdot\frac{\partial}{\partial\alpha_m}\right)g=\beta\cdot g$ ———— (11)

$\beta=0$, すなわち0次の同次関数のとき、(11)式より

$$\frac{\partial x_i}{\partial\alpha_1}\cdot\alpha_1+\frac{\partial x_i}{\partial\alpha_2}\cdot\alpha_2+\text{------}+\frac{\partial x_i}{\partial\alpha_m}\cdot\alpha_m=0 \text{————} (12)$$

全項を x_i で割り、 $\frac{\partial x_i}{\partial\alpha_1}\cdot\frac{\alpha_1}{x_i}+\frac{\partial x_i}{\partial\alpha_2}\cdot\frac{\alpha_2}{x_i}+\text{--------}+\frac{\partial x_i}{\partial\alpha_m}\cdot\frac{\alpha_m}{x_i}=0$ ———— (13)

ここで、 $\eta_{ij}=\frac{\partial x_i}{x_i}/\frac{\partial\alpha_j}{\alpha_j}=\frac{\Delta x_i}{x_i}/\frac{\Delta\alpha_j}{\alpha_j}$ と表わせば、 ———— (14)

(13)式より、次の関係をえる。 $\eta_{i1}+\eta_{i2}+\eta_{i3}+\text{-----}+\eta_{im}=0$ ———— (15)

同様に1次の同次関数の場合、 $\eta_{i1}+\eta_{i2}+\eta_{i3}+\text{-----}+\eta_{im}=1$ ———— (16)

以上のようにある構成因子の変量（$\Delta\alpha_j$）による評価因子の変量（Δx_i）の大きさのみを問題にし，$\Delta\alpha_j$ がいかなる機構によって Δx_i をもたらしたかをここでは問題にせず，(14)式のように $\Delta\alpha_j$，Δx_i の百分率表現した値 e_{ij} が弾力性と呼ばれる。先にも述べたように，端的にはあるシステム内での各因子の相対的価値評価をこの e_{ij} 値の比較によって行なうことも可能であるが，さらに(15),(16)式などに示す次数の検討によってシステムの構成を類推して，全体システムの合理化に活用することができる。つまり，上下水道系統における水量水質相互関係を(2)式のように明確に設定することができない場合にも，実際上下水道問題における微少変化の実績のみを観察して，ある適用範囲内での(15),(16)式の関係を吟味することによって種々の水量水質特性を類推することが可能になってくる。

上下水道系統合理化の一つの考え方として，ある一定の処理能を発揮させつつ必要経費の最小化をはかることもある[2]が，こういった合理化にあたっては，処理能と総費用がそれぞれ目標関数と制約関数として選定される。いま，(7)'式の G' 関数として次のような線型費用関数（c_j は定数）が用いられるとき，

$$G' = c_1\cdot\alpha_1 + c_2\cdot\alpha_2 + \text{------} + c_m\alpha_m \qquad \text{———} \ (17)$$

(7)'式に示される合理解を得るための条件は次のように表わされる。

$$\frac{\pi_1}{c_1} = \frac{\pi_2}{c_2} = \text{-------} = \frac{\pi_m}{c_m} \quad ,\ \text{ただし,}\quad \pi_j = \frac{\partial Z}{\partial\alpha_j} \qquad c_j\ \text{は定数} \qquad \text{———}\ (7)''$$

Z が一定の関数型に保たれる限り，合理解は各単位コスト c_j によって左右されるが，いま全ての c_j を p 倍しても，(7)"式より合理解は変らないことがわかる。つまり，合理解と各 c_j とは 0 次の同次関数関係にある。先に示した弾力性による合理解の検討がここでも効果的である。

次に，弾力性概念の動的考察について簡単にふれておく。(2)式の均衡方程式に時間 t を採用しうるとき，

$$x_i = g(\alpha_1, \alpha_2, \text{------}, \alpha_m, t) \qquad \text{———} \ (2)'$$

時間 t が $t+\Delta t$ に進み，Δt 時間経過にともなう諸因子および x_i の変化を分析してみる必要がある。[3]
最も簡単な現象では(15),(16)式と同様の関係を得ることができよう。しかし一般には，時間とともに均衡状態は変化して，弾力性を動的に分析してはじめて効果がでてくると考えるのが妥当であろう。

$$e_i(t) = \frac{\Delta x_i(t)}{x_i(t)} \Big/ \frac{\Delta t}{t} \qquad \text{———} \ (14)'$$

一般にシステム工学の分野では，動的に特性が変化しない場合について，伝達関数による動特性の解析が展開されているので，参照すべき点が多い。

3. 上水道系統における弾力性分析例

弾力性概念活用の基本的な考え方を以上に示したので，次に具体的な2，3の分析例を示しておく。実際に弾力性分析を用いて上下水道系統の合理化をはかる場合，現段階では大別して二通りのアプローチがある。一つは任意の主要因子のみについて弾力性を算定し，系統内におけるその因子の効用を単独に論ずる場合で，他の方法はある系統内の全因子の弾力性を同時に算定し，(15),(16)式などに示す全体システムの構成について論ずる場合である。いずれも(1),(2)式などの均衡方程式の得がたいときに特に効果的であることはすでに述べた通りである。類推される均衡方程式の構成因子 α_1, α_2, ---, α_m 相互の関係に相互依存性が認められる場合とそうでない場合によって分割される。つまり，各 α_j が評価因子 x_i のみと相関関係があり他の α_j とあまり相互依存性のない場合，弾力性分析は主要因子についての単独分析となることが多く，分析は単純になる反面，全体システムの合理化をはかるた

めには，さらに角度をかえた側面からの分析が必要となろう。したがって弾力性分析を行なう場合，ある程度各因子間の相互関係を考慮して分析方針を選定する必要がある。そういった意味で以下に二通りの分析例を示しておく。

3-1. 上水需要の弾力性

上水の需要誘発因子が明らかで，(2)式に示すように需要構造が定式化されている場合，需要水量の予測，推定，あるいは種々の条件変動にともなう需要変動をも容易に把握しうる。たとえば，C.W. Howe and F.P. Linaweaver, Jr.[7] は種々の需要分析から家事用上水需要水量を平均的に次のように定式化している。

$$q = f(v, a, d_p, k, p_w) \qquad (18)$$

$$= 233 + 3.41v - 3.08a - 3.89d_p + 0.158k - 1.27p_w \qquad (19)$$

ここで，q は家事用1戸当り日平均需要水量（ガロン/日·戸），v は家屋の市場価格（10^3ドル），d_p は1戸当り居住人数，a は家屋の建築後年数（年），k は平均給水水圧（psi），p_w は水道料金と下水道料金の和。このように需要構造が明らかになれば，種々の需要変動を上式に基づいて論じうるので，特に弾力性分析の必要もない。せいぜい適用範囲が問題になる程度であろう。しかし，もし(19)式が得られず，(18)式を推定しえた段階では弾力性分析が効果的である。まず，v，a，p_w などの各因子の相互の関係に注目してみる。v と d_p あるいは v と a の相関は類推できても v と k，あるいは v と p_w 間などには特に相関が認められない。この場合は(15)，(16)式などに示す全体システムを弾力性分析で論ずる効果は少なく，単独因子についての分析にとどまらざるをえない。Howe らは水道料金と需要水量の関係を特に取り上げて弾力性分析しているので，結果のみを表-1に紹介しておく。

水道料金や下水道料金が上水需要量に影響を及ぼしているか否かを調べたもので，結論として，家事用はあまり影響をうけていない（非弾力的）が，撒水用は影響をうけ（弾力的），東部よりも西部諸州でその傾向が著しいとしている。弾力性表現は調査目的を端的に表現しうる一便法として利用し，弾力性値が大きければ大きい程需要水量に及ぼす影響量が大きい点を活用したものである。この他に，料金と需要水量の関係を調査し，弾力性表現したものとして，Fourt は −0.45，Seidel らは −1.0 から −0.12，Milliman は −0.3 から −0.4 を示している。一方，Wong，Sheaffer，さらに Gotaas らはほぼ0，すなわち需要水量に及ぼす料金の影響を否定している。[7]

表-1. 料金による上水需要の弾力性（Howe らによる）[7]

上水需要種別	地域特性		料金による上水需要の弾力性
	公共下水道有無	料金制	
家事用	有	従量	−0.214
	有	定額	0
	無	従量	−0.125
夏季撒水用	有	従量	(平均) −1.16
	有	従量	西部アメリカ −0.438
	有	従量	東部アメリカ −1.57

ところで，わが国における上水需要量と料金の関係については，これまでに定量的に取扱った研究は少なく，半理論的に考察した研究もあるが[3]，実績を定量的にまとめるには至っていないので，以上に示した米国の例と比較することは困難である。そこで新たに，料金と需要水量の関係が水道料金値上時に顕著に現われるものとの前提のもとに，わが国諸都市における水道料金値上げ時点前後の需要水量を分析してみた。わが国全都市から，昭和40年7月より41年12月までの期間に料金値上をした約110都市の月需要水量を分析対象とした。[8),9)] 周知のように，月水量は季節変動，気温の影響をうけるので，その影響量を補正消去する必要がある。気温と上水需要水量の関係を示したのが図-1

である。 図は料金値上げが実施されなかった都市の昭和40年度の需要実績をプロットしてある。 一般に，気温が上昇しつつある期間と下降しつつある期間での影響には差があり，図-1中に矢印で示したような傾向があるが，これら両者を平均化して図示したのが図-2である。 図より気温変動にともなう需要水量の弾力性を求めることができる。 たとえば関東以南の諸都市において，気温が年間平均を越える春，夏，秋などの期間では図中破線にも示す直線関係が得られよう。 このとき，弾力性は次式で表わされる。 $\eta \cong 0.5-0.2/(\Delta T/T_m)$ ——(20)

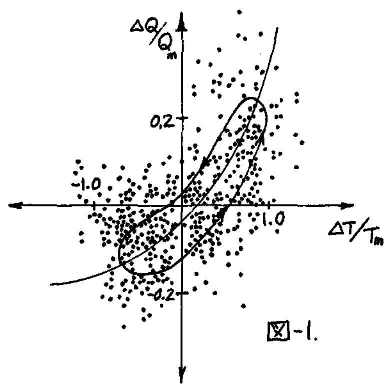


図-1.

ただし，ここでT_mは年間平均気温，ΔTはT_mとの差。

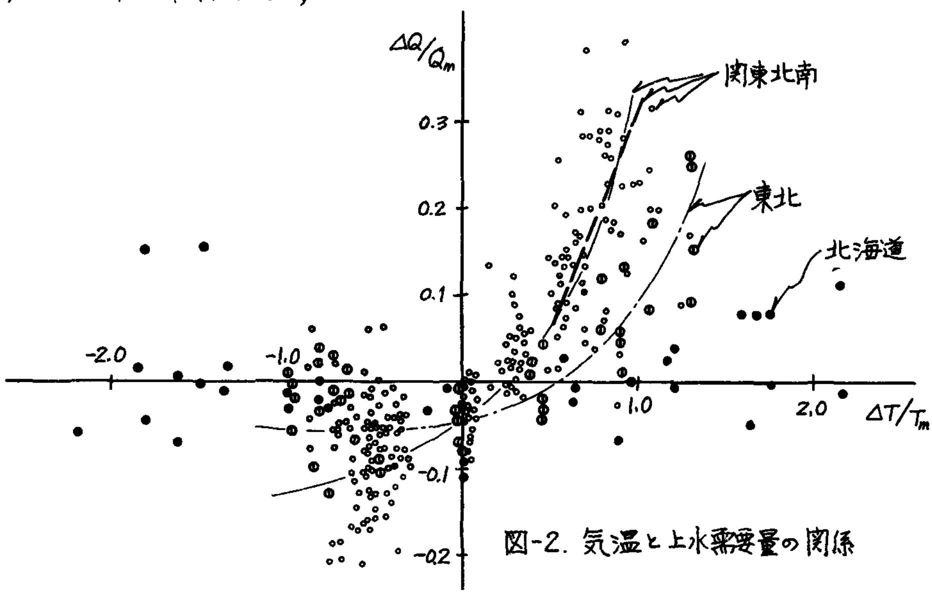


図-2. 気温と上水需要量の関係

図上，原点を通る直線関係を得がたく，気温変動に伴なう需要水量変動の弾力性は定数とはならないことがわかる。 つまり，気温によって需要水量に及ぶ影響量が異なることがわかる。 図-2より，関東以北のいわゆる雪国では気温の上水需要に及ぼす影響量がかなり他と異なることもわかる。 さらに，弾力性分析の応用として，需要水量を(18)式のように因子表現した場合に気温因子は次のように指数関数型として表現されないこともわかる。

$$q = T^{r} \cdot f(\alpha_2, \alpha_3, \cdots\cdots \alpha_m) \quad \text{——} (21)$$

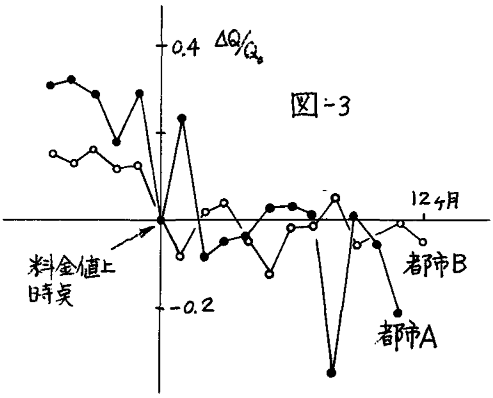
すなわち，もし(21)式のように表現できれば，他因子($\alpha_2, \alpha_3, \cdots\cdots, \alpha_m$)が一定値のとき，

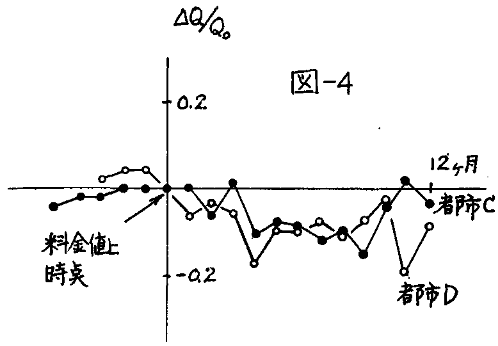
$\frac{dq}{dT} = r \cdot T^{r-1} \cdot f_0$ ，となり，弾力性値 $\eta_T = \left(\frac{dq}{dT}\right)\frac{T}{q} = r =$ 一定

となり，η_Tは一定の定数となるはずである。

このように簡単な弾力性分析でも，気温因子の需要水量に及ぶ影響量を定量化しうるのみならず，(21)式にも示すように状態方程式についても論及しうる。

次に以上に求めた気温と上水需要水量の関係を用いて気温の影響を補正消去し，先に分析を試みた



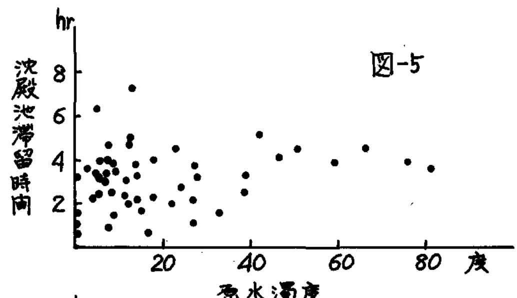


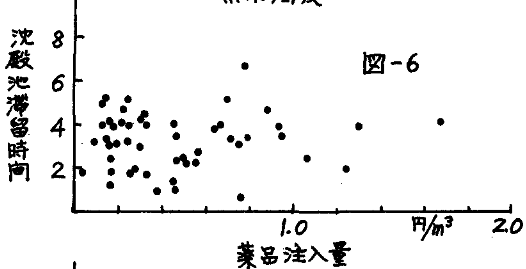
料金値上げに伴なう需要水量の変動を求めたのが図-3，図-4である。料金値上げ時点を境にして需要水量が減少していることを認めることができる。これよりわが国における水道料金による上水需要量の弾力性は都市A，B，C，Dの場合それぞれ，−0.80，−0.25，−0.13，および−0.25で，これらの平均値を約−0.4と算定できた。ただ，これらA，B，C，Dの4都市は分析した110都市のうち特に顕著な影響が表われた代表的な例であり，大部分の都市では結果的にあまり料金値上げの影響を受けていないこともわかったので，この弾力性値はわが国の場合，都市によってかなりの差があることを指摘できる。その差を定量化するためにはさらに分析を深めてゆく必要がある。

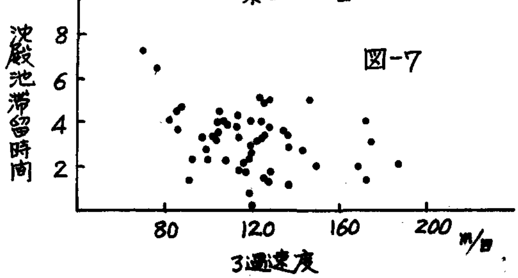
3-2. 浄水施設における弾力性

以上に示した需要水量に関する弾力性分析は主として状態方程式構成因子x_iが相互にあまり関係がない場合の例であった。つぎにx_iに相関がある場合として(2)式にも示される浄水施設各構成施設の従来の設計法を分析してみる。原水濁度，薬注量，沈殿時間，ろ過速度は本来相互に関連しながら設計されるべきもので，たとえばろ速は原水濁度から沈殿池に至るプロセスに関連して決定されるべきであろう。こういった場合に(15)，(16)式に示される全体システムにおける弾力性の配分および全体の構成を分析すれば効果的である。

わが国各都市のうち，上水給水量2万m³/日以上の給水施設を有する諸都市施設の設計実績を調べてみた。[9] 急速ろ過方式における設計実績を沈殿池の滞留時間設計値を基準に表示したのが図-5から図-7である。一般的にいって設計方式が不統一で何らかの顕著な傾向を見い出すことは困難である。しいていえば，図-7に示すように，沈殿池の滞留時間を長くとっているところではろ速を小さく，沈殿池の滞留時間が短か







いところではろ速も比較的大きい値をとっていることがわかる。技術的に考えれば，沈殿池滞留時間が長ければ，沈殿段階でかなりの浄化も期待できるのでろ速はある程度大きくてもよい。つまり，沈殿池とろ過池はある程度代替的であるはずと類推できるが，実績では逆に補完的であるかのように設計されている。その理由は施設建設経費の大小によるものと思われ，建設費の多い都市では沈殿池もろ過池もともにゆったりと設計しているようである。こういった設計条件に差のあるものは別個に考察することにして，ひとまず設計条件がほぼ同一とみなしうるものに絞って分析してみる。
そこで図より，いずれの設計条件も表-2に示す範囲内にあるものを取り上げ，各設計条件の平均値からの分散の理由を弾力性概念を用いて分析してみる。

表-2. 急速ろ過方式浄水施設設計条件分析範囲

設計条件	平均値	範囲
原水平均濁度	20度	0～40度
薬品注入費用	0.5円/m³	0～1.0円/m³
沈殿池滞留時間	3.5時間	2～5時間
ろ過速度	120m/日	100～140m/日

たとえば原水濁度30度，薬品注入量0.7円/m³相当，沈殿時間4時間，ろ速130m/日，で設計している施設では各平均値からの変量がそれぞれ，$-(30-20)/20=-0.50$，$(0.7-0.5)/0.5=0.40$，$(4.0-3.5)/3.5=0.14$，$-(130-120)/120 \cong -0.08$。ここで，正負符号は浄化の難易の方向を考慮してそれぞれ決められる。評価因子としてろ過速度をとれば，全体システムの平均値からの偏差の弾力性は次のようになる。

$$(-0.08/-0.5)+(-0.08/0.40)+(-0.08/0.14)=0.16-0.20-0.57=-0.61$$

このような種々の分析のうち，浄水系統の均衡方程式を次のように表現した場合設計因子間に同次性を認めることができ，弾力性分析が効果的となる。

ろ過速度 ＝ f（原水平均濁度，薬品注入量，その他定数） ———— (22)

沈殿池滞留時間はろ過速度決定に考慮されていないようである。
算定した弾力性の和，つまり(15),(16)式右辺に示されるシステムの次数をろ速を基準に図示したのが図-8である。ほぼろ速が105m/日から125m/日で設計されている施設では(22)式の関係が0次の同次関係にあり，100m/日あるいは140m/日近辺で1次の同次関係にあることを類推しうる。105m/日から125m/日の範囲では原水濁度が増加しても薬品注入量をそれに応じ増加し，ろ速設計基準値を特に変化していない。ろ速は原水濁度や薬品量以外の条件によって決定していることがわかる。いいかえれば，この分析範囲の原水濁度変化ではろ速の設計値は特に原水濁度によって左右されず，運転管理で十分対処しうると考えられていることがわかる。

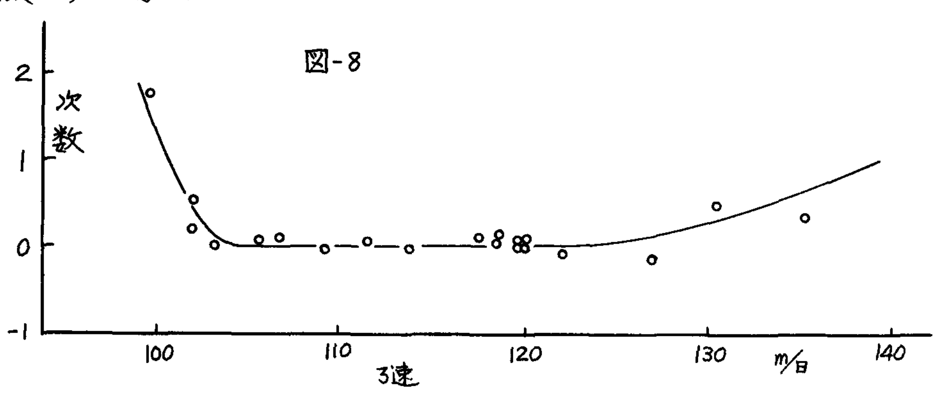


図-8

0次の同次関係下での設計あるいは運転条件を表示したもの参考のために図-9に示しておく。

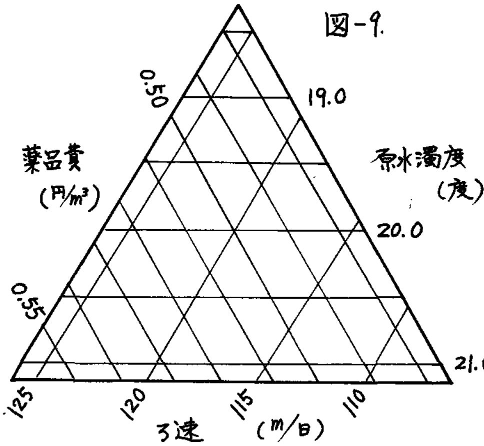


図-9

4. 用水需要と供給施設の連関制御および計画について

本来，上水道系統では水源，供給処理施設，需要水量水質が密接に関連し，一連のサイクルを形成する。以上の分析ではそのうち需要と供給処理施設を取り上げ，主として需要については需要変動誘発の可能性，およびその大きさについて考察し，施設については従来所定の給水目的を達成している諸施設における設計のゆとり，およびその配分を分析したものである。実績分析の結果，(22)式にも示されるように，各施設設計にあたって，あまり多くの影響因子を考慮せず，かなり単独に施設を設計していることがわかる。関連する需要量決定因子が施設設計因子として考慮されていそうにもない。理想的には各施設は時々刻々の需要水量を考慮して設計されるべきものであるから，施設の設計には当然需要水量決定因子が考慮されるべきであろう。たとえば，(18),(19)式の平均給水水圧 k が(22)式のろ過速度設計基準値の中に考慮されたりしておれば，k の需要水量に対する弾力性，ひいては k のろ速決定に対する弾力性が問題になってくる。つまり，ろ速を x と表わし，一つの評価因子とすれば，同次関数型を考える限り，

$$\frac{\partial x}{\partial \alpha_1}\cdot\frac{\alpha_1}{x}+\frac{\partial x}{\partial \alpha_2}\cdot\frac{\alpha_2}{x}+\cdots\cdots+\frac{\partial x}{\partial \alpha_m}\cdot\frac{\alpha_m}{x}+\frac{\partial x}{\partial k}\cdot\frac{k}{x}=E \qquad \text{———}(23)$$

(23)式のE値の問題となる。一般に $\frac{\partial x}{\partial \alpha_j}$ 値は正負両値をとりうるので，たとえ $\frac{\partial x}{\partial k}\cdot\frac{k}{x}$ が存在しても，適当な $\frac{\partial x}{\partial \alpha_j}\cdot\frac{\alpha_j}{x}$ を考慮すれば $\frac{\partial x}{\partial k}\frac{k}{x}$ のE値への影響を相殺することが可能になる。すなわち，上水道系統合理化の一つの方向として，各種設計にあたって積極的にできるだけ多くの影響因子を考慮し，0次の同次化をはかる方法を指摘できる。各種設計因子の代替性，補完性をさらに詳しく定量化できれば，さらに効果的である。0次の同次化制御，計画が進展すれば，次の(24)式の制約のもとに(25)式の最大化をはかることによって大巾な経費節減も期待できよう。

$$\sum \eta_{xi} = 0 \qquad \text{———}(24)$$

$$\text{目標関数} = \sum|-\eta_{xi}| \qquad \text{———}(25)$$

5. おわりに

本文では，弾力性概念の上下水道分野への応用について述べ，単に表現法としての活用にとどまらず，微少変量分析の一環として現在筆者らの研究しつつある上下水道系統合理化に種々の活用法があることを示唆した。ただ，現在利用可能な資料の制約とか，従来の設計法が各設計ごとに単独に行なわれてきた傾向が強いなどの理由から，第3章に示した分析例など比較的分析が断片的にならざるをえなかった。特に需要水量にみられる種々の弾力性と浄水施設における供給処理能の弾力性を直結することによって上下水道系統の大巾な合理化を期待していたが，今後の分析を待たざるをえない。

浄水実験を含めて，今後研究を深めてゆく予定である。

ただ最後に，弾力性分析がより効果的であるための一つの条件，"状態方程式が同次関数型であること"という点については，既存上下水道系統において何が同次関数関係にあるかを探すという立場でなく，今後何を同次関数型に制御，計画してゆくべきかを考えてゆくべきであろうと強調しておきたい。

参考文献

1. 末石冨太郎，住友恒，"水量水質配分計画における限界費用について"，第21回土木学会年次学術講演会概要集，昭.41.5.
2. 末石冨太郎，住友恒，和田安彦，"水処理効率の経済的評価について"，"浄水施設の限界効用の研究"，第22回土木学会年次学術講演会概要集，昭42.5，および土木学会関西支部講演会概要集，昭43.
3. 住友恒，"都市における上水需要量の変動特性について"，土木学会論文集，第158号，昭43.10.
4. 末石冨太郎，住友恒，"工業用水の需給分析と水量水質配分の考察" 工業用水，投稿中
5. T. Sueishi and R.L. Murphy, "Experimental Study on the Relation between Air and Diffusion Rate and Longitudinal Mixing in a Spiral Flow Aerator", (unpublished)
6. Paul A. Samuelson, "Foundations of Economic Analysis", Cambridge Harvard University Press, 1966
7. C.W. Howe and F.P. Linaweaver, Jr., "The Impact of Price on Residential Water Demand and Its Relation to System Design and Price Structure," Water Resources Research, Vol. 3, No. 1, 1967
8. 厚生省，日本水道協会，"上水道統計，" 昭40年度
9. 同上，昭41年度