水系水質の変化とその予報に関する研究

京都大学工学部　正員　合田　健
京都大学工学部　正員　宗宮　功
京都大学工学部　学生員　○西沢　稔

1　概説

河川における任意地点での水質状況を問題にする場合　関与する要因として　少なくともつぎの2項をどう取り扱うかを考えねばならぬ。

(1)　問題とする地点より上流における汚濁物質の流入，すなわち入力に関しての質的，量的および時間的変化の取り扱いの問題。

(2)　河川自浄能力の取り扱い。

(1)の入力，つまり汚濁物の問題については，「水質予知」を目標にすることから，これを「時系列」的に取り扱うやり方と，一方決定論的な方法でよく行なわれるように，その入力の位置的，時間的変化を関数表示して，自浄作用の行なわれる河道，あるいは水系での，それに対するレスポンスを計算するやり方とがある。特に時系列的に予知を考える場合は，この入力をどのように取り扱うかが問題処理の一つのキーポイントであり，十分な検討，研究が必要である。つぎに(2)の問題について，入力があった場合，河川という媒体によって水質がどのように変化するか，とくにこの媒体は長い水路であるから時間的のみならず位置的ないみでの水質予知もきわめて重要である。以上の二つの取り扱いについてさらに考えてみる。ある入力，すなわち上流で河川に加えられた汚濁負荷に対し下流でそれがどのようなものに変化するかを知ることが必要なのは当然であるがさらに進んで　ある利水地点に要求される環境基準を出力とみなしその出力を，すなわち水質評価値を与えられた条件を満足するようにするには上流側の入力条件がどうであればよいかを知りたい。それは必ずしも容易なことではないがそれにアプローチしやすい方法を考えるべきである。このように考えてくるとある入力があり，その入力をある出力に変化させる河川の自浄能力が当然問題になってくる。つまり各河川には個有の自浄能力があってその能力は固定的なものではあるが水文，気象条件に依存して変化するものでありそれについての評価が正しくなされねばならぬ。つぎに河川自浄能力を問題の対象とする場合，いかなる態度でもってこの問題を考えるかが重要になってくる。その一つに，ある水質が生起する頻度という面からアプローチすることが以下に述べる二つの理由から考えられる。つまり

①　河川問題に限らず，いわゆる公害問題といわれる事象については，もしもその問題を解決する——問題を研究するということと少し異ると思う——という立場に立つならば，ある汚濁濃度が何ppmまで許容されるというのではなく何ppmがどのような頻度で出現するかを把握することが必要である。それは汚濁物質の任意の濃度が一回の出現では大きな問題にはならないが　それがどのような頻度で生起するかが水利用側にとって，また環境評価上においても重要だからである。

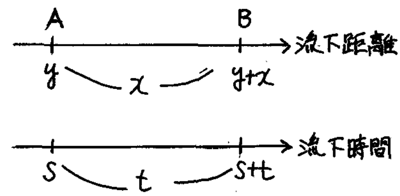
②　自浄作用自体の問題だが，必ずしも一意的に定まる性質のものでもないので　ここに変動を考慮したアプローチが考えられる。

2　頻度から見た河川水質の変化

2—1

河川水質の表示は，ふつう物理量，化学量，または生物化学指標についてなされるが河川水質の確率的取り扱いを簡単にするためつぎのような段階的な水質量で表示する。つまり水質表示値を ある単位汚濁量δで除しその値をδごとに区切って段階的な無次元数値として表現する。たとえばδをBOD_5 10ppmとし水質濃度をBOD_5 150ppmとすればこれは $150/10=15$ となり水質汚濁段階で15であることを示している。いま河川のモデルを図2-1-1のように表示する。流路に沿って流下方向に距離をとり流下距離yの地点をA，$(y+x)$の地点をBとする。また流下時間に関しては，時間軸上で時刻Sの点をA，$(S+t)$をBとする。したがってA～B間の流下距離はx，流下時間はtである。

（図 2-1-1）



段階的表示であらわした水質値についてA点の汚濁段階をi，B点でのそれをjとする。A点での汚濁段階がiであったとすれば，Bでjになる推移確率を$P_{ij}(S,t)$と表わし，あるT年一年間にA点で汚濁段階iが生じる確率を$P_i(y,T)$とする。またA～B間を流下する流下時間については，あるT年一年間の流下時間tの確率密度関数を$f(t,T,x,y)$とする。T年においてB点で一年間に汚濁段階jが生起する確率を$P_j(T,x,y)$とすると，次式が成立する。

$$P_j(T,x,y)=\int_0^\infty \sum_i P_i(y,T)\cdot P_{ij}(S,t)\cdot f(t,T,x,y)\,dt \quad \text{--------}\ (2\text{-}1\text{-}1)$$

つまり2-1-1式のように考えることにより，水質変化は水文量でいう確率洪水などの概念と同様，確率水質なる概念で扱うことができる。

式2-1-1の$f(t,T,x,y)$はあるT年一年間の流下時間tの密度関数である。これは固定された点A～B間の河川流速を知ることにより求めることができる。また$P_i(y,T)$は A点で汚濁段階iがある年T年一年間に生じる確率であるがこれは前述した方針によりいまここでは直接取り扱わない。

また$P_{ij}(S,t)$はA点で汚濁段階iであったものがB点でjになる確率であるが，言い換えれば河川流水中での自浄効果を表わす式であると考えられよう。この$P_{ij}(S,t)$の具体的なアプローチの仕方につぎのふた通りが考えられる。

① 実験および実際のデータから水質段階がiからjになる頻度を求め$P_{ij}(S,t)$を求める。

② 実測値によらず他の何らかの合理的推論から水質段階がiからjになる確率を式化して求める。

①，②は各々その特長を持っている。①は一般性に欠けるが，地形，水文，経済状態といった地域特性を加味して定めうるため実験的に解析しうる地域については有効な方法である。②の方法は，結果現象を一般化したモデルで扱うことになるので おそらく精度の点に問題が残るが普遍性をもたせることができる。以下②の方法についてさらに検討を加える。

2—2　自浄能のバラツキについて

河川での自浄作用は，汚濁性物質の微生物による酸化分解，沈殿堆積，拡散，希釈といった作用の

総合によって進められるものであるが自重により沈降しずたい汚濁性有機物質の減少を大きく支配するものは生物化学的な酸化である。この生物化学的酸化についての環境条件を考えると，それは河川流水中のどこでも均一であるわけではなくまた生物を媒介として行なわれる酸化作用自体ミクロに考えればその速度なり生成される中間産物なりが一定してあるず種々のバラエティに富む化学変化をオーバオール的にみて「酸化」の進行と評価しているにすぎない。よって BOD_5 のような指標を尺度にするならばある時間，ある場所での BOD 値が一定時間後にとりうる値というものは当然ある巾を持って予測されるべきものであろう。この巾はたとえば実測面で言うならばある河川断面で同時刻に採取したサンプルが示す指標値のバラツキということにつながるがそれは定量的にどのように扱うべきであるか。微視的にはきわめて面倒な問題であるが定量的に扱っていく上でそうしたバラツキに帰結するような因果関係のモデルを導入することは許されるであろう。この問題に対するアプローチの方法を展開してみる。二つのアプローチの方法が考えられる。一つは決定論的立場でありもう一つは確率論的立場である。ここでは確率論的立場に立って考えてみたい。この種の方法は既に米国の Richard らによってなされてきたが　ここでは推移確率という概念から見てみたい。まず簡単な方法から述べその後一般的方法をのべる。

2—3　定量的考察

a；水質変化のうち汚濁物質減少効果のみを考慮した場合

いま　水質指標は前述したような段階表示した無次元量を取り扱うことにする。dt 時間に dC だけ濃度が減少すると考え，減少方向に正符号を用いると，減少過程は次式で示されるとする。

$$dC = k \cdot C \cdot dt \quad \text{----------} \quad (a-1)$$

（$a-1$）式の両辺を単位汚濁量 δ で除することにより（$a-2$）式を得る。

$$dC/\delta = kC\,dt/\delta \quad \text{-------} \quad (a-2)$$

（$a-2$）式の左辺は，dt 時間に汚濁段階一単位を減少せしめる確率を示す。ここで水質変化は水質が一単位増加するか，また減少することにより生ずるものと仮定する。時刻 t と $t+dt$ の間における水質の変化に関係する事象についてそれぞれつぎのように決める。

　　I 事象　$t=t+dt$ において汚濁段階は j である。

　　I_1 事象　$t=t$ で汚濁段階が j で dt 時間後に何もおこらない。

　　I_2 事象　$t=t$ で汚濁段階が $(j+1)$ で dt 時間後に一段階減少する。

　　A 事象　dt 時間に汚濁段階を一単位減少させる。

このとき　I 事象と，I_1，I_2 事象の間には

$$I = I_1 \cup I_2 \quad \text{---------} \quad (a-3)$$

なる関係があり　両辺の確率をとると，

$$P(I) = P(I_1) + P(I_2) \quad \text{-----} \quad (a-4)$$　　（ここで $P(I)$ は I の生起する確率）

つぎに上述の各事象の確率について考えてみる。まず A 事象について考えてみると　式（$a-2$）より

$$P(A) = k(C/\delta)\,dt = kj \cdot dt \quad (\text{ただし } j = C/\delta) \quad \text{------} \quad (a-5)$$

が得られ　さらに I_1 事象は

$$I_1 = (t=t \text{ で汚濁段階が } j) \cap (dt \text{ 時間後に減少しない})$$

$= (t = t$で汚染段階が$j) \cap (A^c)$,　（ここでA^cは事象Aの余事象）

と書き表わせるので　$P_j(t)$で時刻tにおいて汚染段階がjとなる確率を表わすと　I_1事象の起る確率は

$$P(I) = P_j(t) \cdot P(A^c) = P_j(t)\{1 - P(A)\} = P_j(t) \cdot \{1 - k j \cdot dt\} \text{ ------ } (a-6)$$

と表示しうる。　同様にI_2事象については，

$$I_2 = (t = t \text{で汚染段階}(j+1)) \cap (dt \text{時間後に一汚染段階減少する})$$

より　I_2事象の生起する確率を$P(I_2)$として

$$P(I_2) = P_{j+1}(t) \cdot k \cdot (j+1)\, dt \text{ ------- } (a-7)$$

をうる。　一方事象Iの生起確率は　$P(I) = P_j(t + dt)$ ------ $(a-8)$

であり　式$(a-4)$, $(a-6)$, $(a-7)$, $(a-8)$を用いて　つぎのように表わしうる。

$$P_j(t+dt) = P_j(t)\{1 - kj\,dt\} + P_{j+1}(t) \cdot \{k(j+1)\,dt\} \text{ -------- } (a-9)$$

式$(a-9)$を整理して両辺をdtで除し　dtを十分小さい時間にとると，微分表示として

$$\frac{dP_j(t)}{dt} = k\left\{(j+1)P_{j+1}(t) - jP_j(t)\right\} \text{ ------- } (a-10)$$

式$(a-10)$の$P_j(t)$を求めるため　つぎのようにする。

式$(a-10)$の両辺にz^jを乗じ，$j=0$から$j=\infty$まで加えると

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{dP_j(t)}{dt} z^j = k\left\{\sum_{j=0}^{\infty}(j+1)P_{j+1}(t)z^j - \sum_{j=0}^{\infty} jP_j(t)z^j\right\} \text{ ---- } (a-11)$$

ま　$\mathcal{P} = \sum_{j=0}^{\infty} P_j(t) z^j$ ------$(a-12)$とおくと　$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{dP_j(t)}{dt} z^j = \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial t}$ ---- $(a-13)$

$$\sum_{j=0}^{\infty}(j+1)P_{j+1}(t)z^j = \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial z} \text{ ----- } (a-14), \qquad \sum_{j=0}^{\infty} jP_j(t)z^j = z\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial z} \text{ ----- } (a-15)$$

式$(a-11)$に$(a-12)$, $(a-13)$, $(a-14)$を代入すると

$$\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial t} = k(1-z)\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial z} \text{ ------ } (a-16)$$

式$(a-16)$を解くにあたり　その特性方程式は$(a-17)$になる。

$\dfrac{dt}{1} = \dfrac{dz}{-k(1-z)}$ ------ $(a-17)$,　これより$\mathcal{P}$は　$\mathcal{P} = f\left[t - \dfrac{1}{k}\log(1-z)\right]$

ここで　fは任意関数

初期条件　$t=0$で　$j=i$を与えると

$$\mathcal{P} = \sum_{j=0}^{\infty} P_j(0)z^j = P_0(0) + P_1(0)z + \cdots + P_{i-1}(0)z^{i-1} + P_i(0)z^i + P_{i+1}(0)z^{i+1} + \cdots$$

$$= P_i(0)z^i = z^i \qquad \left(\because \quad P_j(0) = \begin{cases} 0 & j \neq i \\ 1 & j = i \end{cases}\right)$$

つまり$\mathcal{P}_{t=0} = z^i$,　これを用いて$f(x)$を求めると，

$f(x) = (1 - e^{-kx})^i$となり　式$(a-12)$の$\mathcal{P}$は　式$(a-18)$のようになる。

$$\mathcal{P} = \{1 + e^{-kt}(z-1)\}^i \text{ ------ } (a-18)$$

結局$P_j(t)$はつぎのようにして求まる。

$$\frac{\partial^j \mathcal{P}}{\partial z^j} = \frac{i!}{(i-j)!}\{1 + e^{-kt}(z-1)\}^{i-j} \cdot e^{-kjt} \text{ ----- } (a-19)$$

$$P_j(t) = \frac{1}{j!}\frac{\partial^j P}{\partial z^j}\Big|_{z=0} = \frac{i!}{j!(i-j)!}\left\{1-e^{-kt}\right\}^{i-j}\cdot e^{-kjt} \quad \text{-----} \ (a-20)$$

式 $(a-20)$ は 式 $(2-1-1)$ の $P_{ij}(S,t)$ において $S=0$ とおいた場合に相当する。 式 $(a-16)$ で $z=1$ とおいて $\sum_{j=0}^{\infty} jP_j = \frac{\partial P}{\partial z}\Big|_{z=1}$ ---- $(a-21)$, $\sum_{j=0}^{\infty} j^2P_j z^{j-1} = z\frac{\partial^2 P}{\partial z^2}+\frac{\partial P}{\partial z}$ ---$(a-22)$ より

$\sum_{j=0}^{\infty} j^2P_j = \left(z\frac{\partial^2 P}{\partial z^2}+\frac{\partial P}{\partial z}\right)_{z=1}$ $(a-23)$, 式 $(a-19)$, $(a-21)$, $(a-23)$ を用いて平均値 $\bar{j}$ および分散 σ^2 を求めると $\bar{j} = \sum_{j=0}^{\infty} jP_j(t) = \frac{\partial P}{\partial z}\Big|_{z=1} = ie^{-kt}$ --------$(a-24)$

$$\sigma^2 = E(j^2)-\{E(j)\}^2 = \left(\frac{\partial^2 P}{\partial z^2}+\frac{\partial P}{\partial z}\right)_{z=1} - \left(\frac{\partial P}{\partial z}\Big|_{z=1}\right)^2 = ie^{-kt}(1-e^{-kt}) \quad \text{-------} (a-25)$$

b；水質変化について 汚濁物質の減少効果のみでなく増加効果も考慮した場合

汚濁指標値を増加させる要因として

1，外部よりの汚濁物の流入。 2，底質よりの嫌気分解物の溶出

汚濁指標値を減少させる要因として

1，生物化学的分解。 2，沈殿，吸着

を考えることにする。 aの場合と同じような取り扱いで考えを進めていく。

(イ) 汚濁物増加現象を考えると

河川外部よりの流入汚濁物の濃度を α とし，dt 時間に $\alpha\cdot dt$ だけ汚濁物が流入するとする。また底部よりの汚濁物溶出濃度を β とし，dt 時間に $\beta\cdot dt$ だけ汚濁物がふえるとする。両者をあわせて dt 時間に $(\alpha+\beta)dt$ の汚濁物増加がある。ここでも dt 時間に汚濁物が一単位増加する事象を A とおくと

$$P(A) = (\alpha+\beta)dt/\delta \quad \text{---------} \ (b-1)$$

(ロ) 汚濁物減少現象を考えると

生物化学反応による減少を一次反応と考えて dt 時間の変化量を dC_1 とすると $dC_1 = k_1 C\, dC_1$（k_1 は比例定数）となる。また沈殿，吸着作用についても同じく一次反応を仮定して，dt 時間に dC_3 だけ減少すると仮定すれば $dC_3 = k_3 C\, dt$（k_3 は比例定数）となる。両者を合計して dt 時間に $(k_1+k_3)C\,dt$ だけ濃度が減少する。 dt 時間に汚濁段階が一単位減少する事象を B とすると

$$P(B) = (k_1+k_3)(C/\delta)\,dt \quad \text{------} \ (b-2)$$

となる。 いま水質の変化に関係する事象について，それぞれつぎのように決める。

I 事象 $t=t+dt$ で汚濁段階が j である。

I_1 事象 $t=t$ で汚濁段階 j で dt 時間後に何の変化も起こらない。

I_2 事象 $t=t$ で汚濁段階 $(j-1)$ で dt 時間後に一段階上る作用のみあり下る作用はない。

I_3 事象 $t=t$ で汚濁段階 $(j+1)$ で dt 時間後に一段階下る作用はあるが上る作用はない。

I_4 事象 $t=t$ で汚濁段階 j で，dt 時間後に一段階下る作用と上る作用がともにおこる。

以上のように定義すると，事象 I は $I = I_1 \cup I_2 \cup I_3 \cup I_4$ ------- $(b-3)$

となる。 この確率をとると $P(I) = P(I_1)+P(I_2)+P(I_3)+P(I_4)$ ------ $(b-4)$

まず I_1 事象について考えてみると，

$I_1 = (t=t$ で汚染段階が j である$) \cap (A^c) \cap (B^c)$

$\therefore P(I_1) = P_j(t)\cdot P(A^c)\cdot P(B^c) = P_j(t)\cdot\{1-P(A)\}\cdot\{1-P(B)\} = P_j(t)\cdot\{1-\frac{\alpha+\beta}{\gamma}dt\}\cdot\{1-(k_1+k_3)j\,dt\}$

$= P_j(t)\cdot\{1-(k_1+k_3)j\,dt - \frac{\alpha+\beta}{\gamma}dt + O(dt)\}$ ------ $(b-5)$ ここに O はランダウの記号

I_2 事象については

$I_2 = (t=t$ で汚染段階が $(j-1)$ である$) \cap (A) \cap (B^c)$

$\therefore P(I_2) = P_{j-1}(t)\cdot P(A)\cdot P(B^c) = P_{j-1}(t)\cdot P(A)\cdot\{1-P(B)\} = P_{j-1}(t)\cdot\{\frac{\alpha+\beta}{\gamma}dt\}\cdot\{1-(k_1+k_3)(j-1)dt\}$

$= P_{j-1}(t)\cdot\{(\alpha+\beta)dt/\gamma + O(dt)\}$ ----- $(b-6)$

I_3 事象については

$I_3 = (t=t$ で汚染段階 $(j+1)$ である$) \cap (B) \cap (A^c)$

$\therefore P(I_3) = P_{j+1}(t)\cdot P(B)\cdot P(A^c) = P_{j+1}(t)\cdot P(B)\cdot\{1-P(A)\} = P_{j+1}(t)\cdot\{(k_1+k_3)(j+1)dt\}\cdot\{1-\frac{\alpha+\beta}{\gamma}dt\}$

$= P_{j+1}(t)\cdot\{(k_1+k_3)(j+1)dt + O(dt)\}$ ----- $(b-7)$

I_4 事象については

$I_4 = (t=t$ で汚染段階 j である$) \cap (A) \cap (B)$

$\therefore P(I_4) = P_j(t)\cdot P(A)\cdot P(B) = P_j(t)\cdot\{\frac{\alpha+\beta}{\gamma}\}\cdot\{(k_1+k_3)c\,(dt)/j\} = O(dt)$ ----- $(b-8)$

となる。以上 式 $(b-5), (b-6), (b-7), (b-8)$ を式 $(b-4)$ に代入し，また $P(I)=P_j(t+dt)$ とすると，

$$P_j(t+dt) = P_j(t)\{1-(k_1+k_3)j(dt) - \frac{\alpha+\beta}{\gamma}(dt) + O(dt)\} + P_{j-1}(t)\{\frac{\alpha+\beta}{\gamma}dt + O(dt)\}$$
$$+ P_{j+1}(t)\{(k_1+k_3)(j+1)dt + O(dt)\} + O(dt)$$

ここで $P_j(t)$ を左辺に移項し，両辺を dt で除し dt を微分小量と考えると，

$$\frac{dP_j(t)}{dt} = -\frac{\alpha+\beta}{\gamma}P_j(t) - (k_1+k_3)jP_j(t) + \frac{\alpha+\beta}{\gamma}P_{j-1}(t) + (k_1+k_3)(j+1)P_{j+1}(t) \text{ ----- } (b-9)$$

となる。 ここで a の場合と同様，$P = \sum_{j=0}^{\infty} P_j(t) z^j$ ------ $(b-10)$ とおいて，次式 $(b-11)$ を得る。

$$\frac{\partial P}{\partial t} - a(1-z)\frac{\partial P}{\partial z} = bP(-1+z) \text{ ----- } (b-11) \qquad \text{ただし } \frac{\alpha+\beta}{\gamma} = b,\ k_1+k_3 = a$$

この方程式の特性方程式は

$$\frac{dt}{1} = \frac{dz}{-a(1-z)} = \frac{dP}{P\{-b(1-z)\}} \text{ ------ } (b-12)$$

いま a の場合と同じように初期条件 $P_{t=0} = z^i$ ----- $(b-13)$ と $(b-12)$ より P を求めると

$$P = \exp\{\frac{b}{a}(e^{-at}-1)\}\cdot\exp\{-\frac{b}{a}(e^{-at}-1)z\}\cdot\{(1-e^{-at})+ze^{-at}\}^i \text{ ----- } (b-14)$$

となる。これより $\partial P/\partial z$, $\partial^2 P/\partial z^2$ を求めると，つぎのようになる。

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \exp\{\frac{b}{a}(e^{-at}-1)\}\Big[-\frac{b}{a}(e^{-at}-1)\exp\{\frac{b}{a}(e^{-at}-1)z\}\cdot\{(1-e^{-at})+ze^{-at}\}^i$$
$$+\exp\{-\frac{b}{a}(e^{-at}-1)z\}\cdot i\cdot\{(1-e^{-at})+ze^{-at}\}^{i-1}\cdot e^{-at}\Big] \text{ ----- } (b-15)$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = \exp\{\frac{b}{a}(e^{-at}-1)\}\Big[\Big(-\frac{b}{a}(e^{-at}-1)\exp\{-\frac{b}{a}(e^{-at}-1)z\}\Big\{-\frac{b}{a}(e^{-at}-1)$$
$$\times\{(1-e^{-at})+ze^{-at}\}^i + i\{(1-e^{-at})+ze^{-at}\}^{i-1}\cdot e^{-at}\Big\} + \exp\{-\frac{b}{a}(e^{-at}-1)z\}\Big\{-\frac{b}{a}(e^{-at}-1)i$$
$$\times\{(1-e^{-at})+ze^{-at}\}^{i-1}\cdot e^{-at} + ie^{-at}(i-1)\{(1-e^{-at})+ze^{-at}\}^{i-2}\cdot e^{-at}\Big\}\Big] \text{ ----- } (b-16)$$

$(b-15), (b-16)$ を用いて，j の平均値 $\bar{j}$，分散 $\sigma^2(j)$ を求めると，

平均値　$\bar{j}=\sum_{j=0}^{\infty} jP_j(t)=\sum_{j=0}^{\infty} jP_j(t)z^j\Big|_{z=1}=z\frac{\partial P}{\partial z}\Big|_{z=1}=ie^{-at}+\frac{b}{a}(1-e^{-at})$ ------ (b−17)

分散

$$\sigma^2(j)=E(j^2)-\{E(j)\}^2=\left(\frac{\partial^2 P}{\partial z^2}+\frac{\partial P}{\partial z}\right)\Big|_{z=1}-\left(\frac{\partial P}{\partial z}\Big|_{z=1}\right)^2=(1-e^{-at})\left(\frac{b}{a}+ie^{-at}\right) \cdots (b-18)$$

また時間の経過にともなう水質指標値の増加と減少とをともに考慮した式は，次式で表わされる。

$$P_j(t)=\frac{1}{j!}\frac{\partial^j P}{\partial z^j}\Big|_{z=0}$$

$$=\left[\exp\left\{-\frac{b}{a}(1-e^{-at})\right\}\right]\frac{1}{j!}\sum_{r=0}^{j}\binom{j}{r}\frac{i!}{(i-r)!}\left(\frac{b}{a}\right)^{j-r}(1-e^{-at})^{j+i-2r}e^{-atr}\quad ,(j\leqq i) \quad ---- (b-19)$$

$$=\left[\exp\left\{-\frac{b}{a}(1-e^{-at})\right\}\right]\frac{1}{j!}\sum_{r=0}^{i}\binom{j}{r}\frac{i!}{(i-r)!}\left(\frac{b}{a}\right)^{j-r}(1-e^{-at})^{j+i-2r}e^{-atr}\quad ,(j>i) \quad ------ (b-20)$$

aの場合と同様，この場合の $P_j(t)$ は　$S=0$ の場合の $P_{ij}(S,t)$ と同じであると考えられる。

C；一般的な出生死亡過程の応用

P_{ij} の取り扱いについて a，b で述べてきたが　ここでは一般的な出生死亡過程を用いてさらに P_{ij} を一般的に考えてみたい。Kolmogorov の前向きの方程式を基本として「時間 t で変化が起きたとき，一単位増加するか一単位減少するかのいずれかであるマルコフ過程」が出生死亡過程であるが出生死亡過程の性質より Kolmogorov の前向きの方程式は次式のようになる。

$$\frac{\partial P_{ij}(S,t)}{\partial t}=-\left[\lambda_j(t)+\mu_j(t)\right]P_{ij}(S,t)+\lambda_{j-1}(t)P_{i,j-1}(S,t)+\mu_{j+1}(t)P_{i,j+1}(t)$$

$$\frac{\partial P_{i}(S,t)}{\partial t}=-\lambda_0(t)P_{i0}(S,t)+\mu_1(t)P_{i1}(S,t) \qquad P_{ij}(S,S)=\delta_{ij} \qquad ----- (C-1)$$

ここで　$P_{ij}(S,t)$；時刻 S で i をとる条件のもとで時刻 t で j をとる確率

μ_j；i から (i−1) への推移強度関数

λ_j；i から (i+1) への推移強度関数

式(C−1)は，一段階変る推移強度関数が一般形として与えられているがここで λ が汚濁を増加させるのに関係し，μ が汚濁を減少させるのに関係する。

いま一つの例を考えてみる。つまり汚濁増加がなく汚濁減少のみでしかもその減少効果は現在の状態に比例するとすると，$\lambda_i=0$，$\mu_i=\mu(t)\cdot i$ --- (C−2)　　これを (C−1) に代入して

母関数 $G_{iS}(z,t)=\sum_{j=0}^{\infty} z^j P_{ij}(S,t)$ ----(C−3) を用いて (C−1) を境界条件 $G_{iS}(z,S)=z^i$ でとくと

$$G_{iS}(z,t)=\left[1+\left\{\frac{1}{z-1}e^{T(S)-T(t)}\right\}^{-1}\right]^i=\left\{1+(z-1)e^{T(S)-T(t)}\right\}^i,\quad ここで\ T(t)=\int_0^t \mu(t)dt \quad ---- (C-4)$$

(C−4)を z で j 回微分すると

$$\frac{\partial^j}{\partial z^j}\left\{G_{iS}(z,t)\right\}=\frac{i!}{(i-j)!}\left\{1+(z-1)e^{T(S)-T(t)}\right\}^{i-j}\cdot e^{j\{T(S)-T(t)\}} \quad ------ (C-5)$$

(C−5)を用いて

$$P_{ij}(S,t)=\frac{1}{j!}\frac{\partial^j}{\partial z^j}\left\{G_{iS}(z,t)\right\}\Big|_{z=0}=\frac{i!}{j!(i-j)!}\left\{1-e^{T(S)-T(t)}\right\}^{i-j}\cdot e^{j\{T(S)-T(t)\}} \quad ---- (C-6)$$

平均 $E(j)$，分散 $\sigma^2(j)$ を求めると

$$E(j)=z\frac{\partial}{\partial z}\left\{G_{iS}(z,t)\right\}\Big|_{z=1}=ie^{\{T(S)-T(t)\}} \qquad ----- (C-7)$$

$$\sigma^2(j)=\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left\{G_{iS}(z,t)\right\}+\frac{\partial}{\partial z}\left\{G_{iS}(z,t)\right\}\right]\Big|_{z=1}=ie^{\{T(S)-T(t)\}}\left\{1-e^{\{T(S)-T(t)\}}\right\} \quad ---- (C-8)$$

d：移送，拡散効果を考慮した場合

いままで主として生物反応による作用を考えてきたが　ここで得られたk値と実測河川で減少作用をオーバオールにみて一次反応とした場合のk値（ここではK値とする）とは　当然値が異って後者の方が大きいがこれについて考えてみる。いま河川流水中での濃度Cは　拡散型方程式であらわすとx，yの2次元でたとえばつぎのようになる。

$$U\frac{\partial C}{\partial x} = D_y\frac{\partial^2 C}{\partial y^2} - kC \quad \text{-----} \ (d-1)$$

$(d-1)$の解は$x=0$で$C=f(y)$，$y=0$で$\partial C/\partial y=0$，$y=B$(河巾)で$\partial C/\partial y=0$なる境界条件に対して

$$C=\frac{1}{B}\exp\left(-\frac{kx}{U}\right)\left[\int_0^B f(y)dy+2\sum_{n=1}^{\infty}\exp\left\{-\frac{D_y}{U}\left(\frac{n\pi}{B}\right)^2 x\right\}\cdot\cos\frac{n\pi y}{B}\int_0^B f(y)\cos\frac{n\pi y}{B}dy\right] \quad \text{---} (d-2)$$

ここで

$$C^* = \frac{1}{B}\left[\int_0^B f(y)dy+2\sum_{n=1}^{\infty}\exp\left\{-\frac{D_y}{U}\left(\frac{n\pi}{B}\right)^2 x\right\}\cdot\cos\frac{n\pi y}{B}\int_0^B f(y)\cos\frac{n\pi}{B}dy\right]$$ とおくと

式$(d-2)$は

$C=C^* e^{-\frac{kx}{U}}$ -----$(d-3)$ となる。　流下時間を$T\left(=\frac{x}{U}\right)$とすると　式$(d-3)$は　$C=C^* e^{-kT}$ ------$(d-4)$

$(d-4)$を次のように変形すると

$C=C^* e^{-kT}=\frac{C^*}{L_0}L_0 e^{-kT}$，　ここで$\frac{C^*}{L_0}=C_1$（ただし$C_{t=0}=L_0$）とすれば，　$C=L_0 C_1 e^{-kT}$

ところが

$$C_1 \equiv e^{\log C_1} = e^{\int \frac{1}{C_1}dC_1} = e^{\int\left(\frac{1}{C_1}\frac{dC_1}{dT}\right)dT}$$ が成立するから

$$C=L_0 C_1 e^{-kT} = L_0 e^{\int\left(\frac{1}{C_1}\frac{dC_1}{dT}\right)dT} e^{-\int k dT} = L_0 e^{-\int\left(k-\frac{1}{C_1}\frac{dC_1}{dT}\right)dT} = L_0 e^{-\int K dT}$$

ここで　$K=k-\frac{1}{C_1}\frac{dC_1}{dT}$ ----$(d-5)$

ここでKの意味について考えてみるとこれは河川での汚濁物の減少作用を$(d-1)$のように考えた場合その作用を一次反応型にしたものである。C_1はTに関して減少関数であるから$(d-5)$は，実験室のk値より$-\frac{1}{C_1}\frac{dC_1}{dT}$だけ大きいことを示している。このようにしてもとめられた$K(T)$値を$(c-6)$,$(c-7)$ $(c-8)$での$\mu(t)$値として代入すれば，移送，拡散効果を限定して考えてきたが　出生死亡過程にくみ入れられるのではないかと考える。

2－4　実験的考察

2－3で求めた式の妥当性を検証するため実験研究を進めた。　2－3のうちaの汚濁物の減少効果のみを考慮した場合についてまず実験してみた。実際河川での反応を再現できれば問題が少ないがそれはまとめに述べているような考慮を付加しないと意味がないので以下述べる方法でモデル化して実験してみた。

〔実験Ⅰ〕

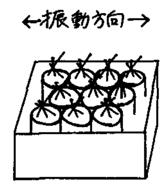
人為汚染の比較的少ないと思われる鴨川の新葵橋下流約100mで河水を採水し，これに生物化学酸化の時間的ズレが少なく平衡に早く達する基質としてブドウ糖を重量濃度で60ppmになるようにした。　このブドウ糖を図2－4－1のような2ℓ入のポリビン10本に2ℓづつ入れすべての条件が一様になるようにセットした。ポリビンは10本全部が同じ条件で攪拌されるように振盪機に入れ（図2－4－2）振動を与えるがそのとき振動による水の流出を防ぎまたDOが10％以上に保てるようにするため図2－4－1のような構造にした。振動開始後　試験水の採水は　0日，0.5日，1.5日，2.5日，3.5日

とした。この試験水のBOD_5を求めプロットしたのが図2−4−3である。図からBOD_5値の分散は反応途中で大きくなり両端で小さくなっているのがわかる。式a−25によると分散σ^2はtに対して極大値をとるがその時刻$t_{max\sigma^2}$を求めてみるとつぎのようになる。

$$\frac{d\sigma^2}{dt}=ik\,e^{-kt}(2e^{-kt}-1)=0 \qquad \therefore\ t_{max\sigma^2}=\frac{\log_e 2}{k}\fallingdotseq\frac{0.69}{k}\ \text{----}(2-4-1)$$

式(a−24)よりk値を求めるため 図2−4−3の各時間のBOD_5値の平均値をとりそれを図2−4−4にプロットしてk値を求めると$k=0.503$(1/日)となった。このk値を式(2−4−1)に代入すると$t_{max\sigma^2}=1.37$(日)となる。一方図2−4−3のデータのバラツキを見るとこの理論値とほぼ同じ所でバラツキが最大になっている。 また分散について考えてみると式(a−25)では段階値として表現しているが実際ではppm単位で測定しているので修正が必要になる。水質を段階値として取り扱いそこでの分散をσ^2，実験値(ppm)に対する分散をS^2とし 単位汚濁量をδ(ppm)とする。X(ppm)を確率変数にとると実験値に関する分散S^2は

(図2−4−1)



(図2−4−2)

$$S^2=\int\{X-E(X)\}^2 f(X)\,dX$$ ここで$f(X)$は密度関数

となるが 段階値を考えると

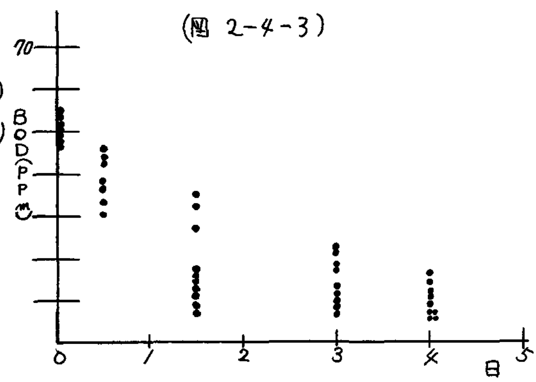
$$\sigma^2=\int\left\{\frac{X}{\delta}-E\left(\frac{X}{\delta}\right)\right\}^2 f(X)\,dX=\int\left\{\frac{X}{\delta}-\frac{1}{\delta}E(X)\right\}^2 f(X)\,dX$$
$$=\frac{1}{\delta^2}\int\{X-E(X)\}^2 f(X)\,dX$$

つまり $S^2=\delta^2\sigma^2$，ところが $\sigma^2=ie^{-kt}(1-e^{-kt})$

より $S^2=\delta^2 i e^{-kt}(1-e^{-kt})=L_0\delta e^{-kt}(1-e^{-kt})$

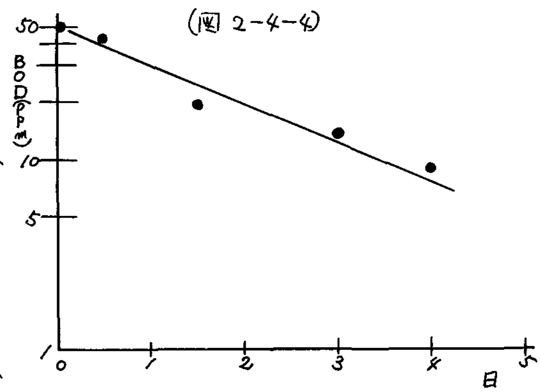
ここで $\delta i=L_0$，つまり初期濃度

----(2−4−2)



(図 2−4−3)

である。式(2−4−2)において単位汚濁量δをきめるために実験値より出した分散と，理論上の分散がもっともよくあてはまると考えられるδを最小自乗法でもとめてみると，$\delta=4.2$(ppm)となった。このδを用いて式(2−4−2)により理論上のppm単位の分散σ^2と，実験値より求めた分散とを図示したのが図2−4−5である。 とくに完全に一致しているとはいえないがその傾向はよく似ている。



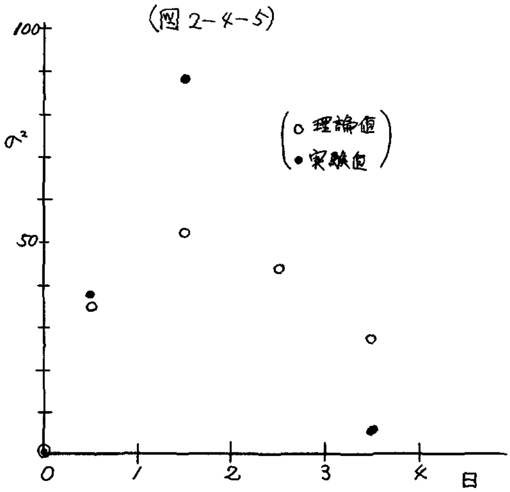
(図 2−4−4)

〔実験Ⅱ〕

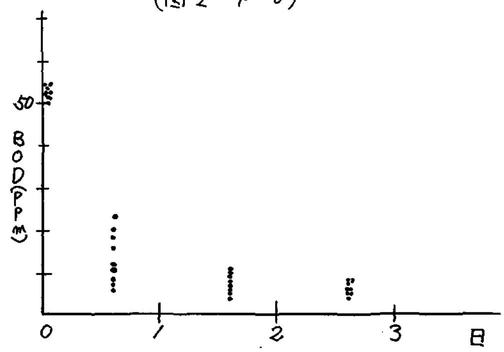
実験Ⅰでは試料を分注して行った。この分注して行う方法では分注した液が途中で混ざることなく独立して反応が行なわれるので減少していく汚水の性質が各々異ると考えられる。ここで実験した

のは分注せずに行う方法で重量で60ppmのブドウ糖を基質としこれを20ℓのポリビンに入れこれには図2-4-1と同じふたをし振盪機で振動を与えた。この方法であると汚水が途中で混合されていることが実験Iと異っている。実験Iと同様にしてデータをプロットしたのが図2-4-6である。kを求め $t_{max\sigma^2}$ を求めると，$t_{max\sigma^2}=0.33$ (日) これは大体実験値と一致している。$\delta=1.36$ppm が求められこれを図示したのが図2-4-7である。

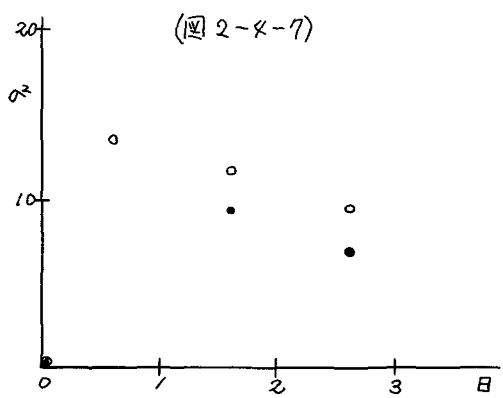
(図2-4-5)



(図2-4-6)



(図2-4-7)



3 まとめ

河川水質の予知の第一段階として生物学的酸化作用を統計的に扱うアプローチを述べてきた。式(2-1-1)がその基本となっている。ただしこの式にはまだ，たとえば乱流においてみられるような速度分布による下流断面諸点の水質値の分布などは考慮に入れていない。$P_{ij}(S,t)$の扱い方について考えてみると，水質を段階的なものとして扱っているが，本来連続的なものであるのでこの点のアプローチも必要と思われる。またaの場合に対する実験考察ではやはりδ値の問題が残る。bの場合に対する実験的検討は現在進行中である。$P_{ij}(S,t)$を求めるとき(c-1)式より任意のμ_j, λ_jについて式(c-1)がとけることが望ましいが その特殊な例を2-3 a, bで扱ってきた。この場合λ_j, μ_jは河川の汚濁機構をもっともよく表現するものでなければならぬ。式(2-1-1)の考え方にさらに上述したような乱流効果や拡散効果を水質値の分散度にあわせ考えることにより確率水質なる考え方が現実に河川水質の予知や水質規制にあてはめられると思う。

参考文献

- Pro. of the Fifth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, Volume IV: Biology and Problems of Health.
- 北川敏男；マルコフ過程
- 水理公式集
- Richard P. Thayer 他 "Stochastic Model For BOD and DO in Streams" Proc. ASCE. SA. 1967