

微小変形理論に基づく三次元粘塑性モデルの陰的応力更新法

東北大学 ○ 青木 新吾
東北大学 正会員 山川 優樹

1. 序論

金属などの固体材料は、実際の使用環境下では実質的にすべて時間あるいは変形速度に依存した挙動を示すと考えられるため、その挙動を再現するために弾塑性モデル（時間非依存モデル）を用いるのは不完全である。また、粘塑性モデル（時間依存モデル）でも載荷ひずみ速度を遅く設定することで弾塑性モデルと同等の応答を再現することができる。そのため、材料が準静的荷重から衝撃荷重まで様々な速度の変形を受けた時の非弾性挙動を、統一的に記述する定式化を行うため粘塑性モデルに関する研究が行われてきた。

本研究では、基礎的なモデルとして金属材料を想定して、微小ひずみ理論に基づいて von Mises モデルを粘塑性に拡張したモデルの定式化及び陰的応力更新法の数値実装を行い、様々な変形速度に対しての解析を行った。

2. 粘塑性構成則

本研究では von Mises 型の降伏関数に Perzyna モデルによる粘塑性流動を導入した構成則を用いた。

(1) ひずみテンソルの加算分解

時間非依存モデルと同様にひずみテンソルを弾性ひずみテンソル $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ と粘塑性ひずみテンソル $\boldsymbol{\varepsilon}^{vp}$ に加算分解する。

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^{vp} \quad (1)$$

(2) 弾性構成則

弾性構成則も速度非依存モデルと同様に線形弾性モデルを用いることとし、本モデルでは線形弾性係数テンソル \mathbf{D}^e を用いて、以下のように表される。

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}^e : \boldsymbol{\varepsilon}^e \quad (2)$$

線形弾性係数テンソルは体積弾性係数 K とせん断弾性係数 G を用いて以下のように与えられる。

$$\mathbf{D}_{ijkl}^e = \left(K - \frac{2}{3}G \right) \delta_{ij}\delta_{kl} + G(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \quad (3)$$

(3) 降伏関数

von Mises 型の降伏関数を用いる。この式も時間非依存モデルと同様のものである。

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \sigma_y) = \sqrt{\frac{3}{2}} \|\boldsymbol{\sigma}_{dev}\| - \sigma_y = q - \sigma_y \quad (4)$$

$\boldsymbol{\sigma}_{dev}$ は偏差応力テンソル $\boldsymbol{\sigma}_{dev} = \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3}\text{tr}(\boldsymbol{\sigma})$ であり、 σ_y は降伏応力、 q は応力テンソルの偏差不変量である。

(4) 粘塑性流れ則

Perzyna モデルによる粘塑性流れ則を用いる。このモデルでは、材料定数である粘性パラメータ μ 、速度感度パラメータ ϵ を用いて、降伏応力と現応力の比によって塑性ひずみ速度を決定している。粘塑性モデルでは弾塑性モデルとは異なり、降伏関数 $f > 0$ （つまり $q > \sigma_y$ ）となることが許容され、 $f > 0$ のときにのみ粘塑性流れが生じる。

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp} = \dot{\gamma} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \dot{\gamma} \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\boldsymbol{\sigma}_{dev}}{\|\boldsymbol{\sigma}_{dev}\|} \quad (5)$$

$$\dot{\gamma} = \begin{cases} \frac{1}{\mu} \left[\frac{q}{\sigma_y} - 1 \right]^{1/\epsilon} & (f(\boldsymbol{\sigma}, \sigma_y) > 0) \\ 0 & (f(\boldsymbol{\sigma}, \sigma_y) \leq 0) \end{cases} \quad (6)$$

(5) 等方硬化則

速度非依存モデルと同様の等方硬化則を用いることができる。

$$\sigma_y = \sigma_y(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp}), \quad \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp} = \int_0^t \sqrt{\frac{2}{3}} \|\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp}\| dx \quad (7)$$

内部変数である累積粘塑性ひずみ $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp}$ の発展則は、

$$\dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}^{vp} = \dot{\gamma} \quad (8)$$

3. 粘塑性モデルの計算アルゴリズム

上で提示したモデルの実装のため弾性予測子と粘塑性リターンマッピングから構成されるアルゴリズムを用いた。

(1) 弾性予測子

材料が時間間隔 $[t_n, t_{n+1}]$ でひずみが $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}$ だけ変化したときに純粋に弾性的であると仮定し、弾性試行状態を以下のように計算する。

$$\begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon}^{e \text{ trial}} = \boldsymbol{\varepsilon}_n^e + \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \\ \boldsymbol{\varepsilon}^{vp \text{ trial}} = \boldsymbol{\varepsilon}_n^{vp} \\ \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp \text{ trial}} = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^{vp} \\ \boldsymbol{\sigma}^{\text{trial}} = \mathbf{D}^e : \boldsymbol{\varepsilon}^{e \text{ trial}} \end{cases} \quad (9)$$

降伏関数 $f(\boldsymbol{\sigma}^{\text{trial}}, \sigma_y^{\text{trial}}) \leq 0$ ならば、この時間内では弾性であり、粘塑性流動は生じず t_{n+1} における変数には試行時の値が割り当てられる。

そうでない場合は粘塑性流動が生じるため粘塑性リターンマッピングを適用する。

(2) 粘塑性リターンマッピング

構成則を考慮して得られる離散化方程式は、

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}^{\text{trial}} - \Delta \gamma \mathbf{D}^e : \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \Big|_{n+1} \\ \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^{vp} = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^{vp} + \Delta \gamma \end{cases} \quad (10)$$

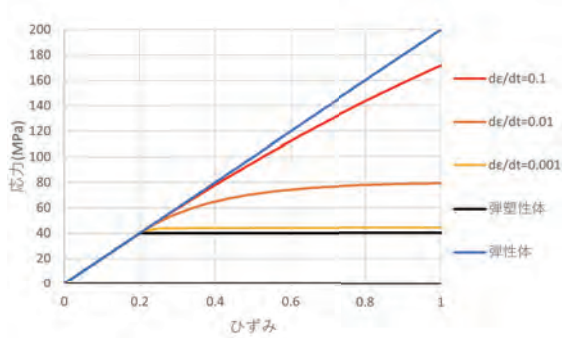


図-1 荷重ひずみ速度を変えた粘塑性体と弾塑性体、弾塑性体の応力ひずみ曲線

となり乗数の増分は,

$$\Delta\gamma = \frac{\Delta t}{\mu} \left[\frac{q_{n+1}}{\sigma_y(\bar{\epsilon}_{n+1}^{vp})} - 1 \right]^{1/\epsilon} \quad (11)$$

$\Delta\gamma$ を用いて応力を更新すると、粘塑性流れベクトル $\partial f/\partial\sigma$ は偏差的であるので平均垂直応力 $p = \frac{1}{3}\text{tr}(\sigma)$ は粘塑性流動に独立である。

したがって、応力の更新式は

$$\begin{cases} \sigma_{\text{dev } n+1} = \sigma_{n+1}^{\text{trial}} - \Delta\gamma 2G \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\sigma_{\text{dev}}}{\|\sigma_{\text{dev}}\|} \\ p_{n+1} = p^{\text{trial}} \end{cases} \quad (12)$$

偏差応力の式について整理すると,

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{dev } n+1} &= \sigma_{n+1}^{\text{trial}} - \Delta\gamma 2G \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\sigma_{\text{dev}}}{\|\sigma_{\text{dev}}\|} \\ &= \sigma_{n+1}^{\text{trial}} - \Delta\gamma 2G \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\sigma_{\text{dev}}^{\text{trial}}}{\|\sigma_{\text{dev}}^{\text{trial}}\|} \\ &= \left(1 - \frac{3G\Delta\gamma}{q^{\text{trial}}} \right) \sigma_{\text{dev}}^{\text{trial}} \end{aligned} \quad (13)$$

式(13)から q の更新式は,

$$q_{n+1} = q^{\text{trial}} - 3G\Delta\gamma \quad (14)$$

式(11)に式(14)と式(10)の2番目の式を代入して

$$\Delta\gamma = \frac{\Delta t}{\mu} \left[\frac{q^{\text{trial}} - 3G\Delta\gamma}{\sigma_y(\bar{\epsilon}_n^{vp} + \Delta\gamma)} - 1 \right]^{1/\epsilon} \quad (15)$$

式(15)を整理して $\Delta\gamma$ に対するリターンマッピングの式が得られる。

$$q^{\text{trial}} - 3G\Delta\gamma - \left[1 + \left(\frac{\mu\Delta\gamma}{\Delta t} \right)^\epsilon \right] \sigma_y(\bar{\epsilon}_n^{vp} + \Delta\gamma) = 0 \quad (16)$$

式(16)を Newton-Raphson 法で解くことで $\Delta\gamma$ を求めることができ、求めた $\Delta\gamma$ で他の変数を更新し計算を進めることができる。

4. 解析例

ここでは Perzyna モデルを用いた一次元粘塑性モデルによる解析結果を紹介する。リターンマッピングの式は以下のように一次元化される。

$$\sigma^{\text{trial}} - E\Delta\gamma - \left[1 + \left(\frac{\mu\Delta\gamma}{\Delta t} \right)^\epsilon \right] \sigma_y(\bar{\epsilon}_n^{vp} + \Delta\gamma) = 0 \quad (17)$$

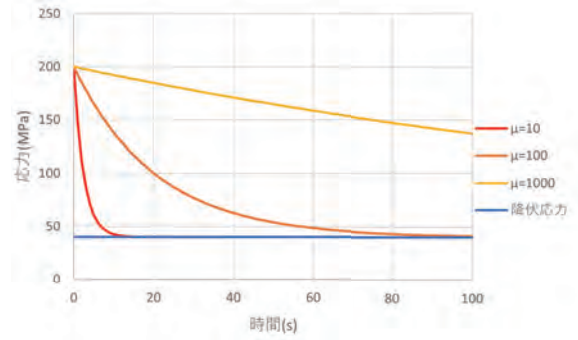


図-2 衝撃荷重を加えた時の応力の時間変化

簡単のため、硬化則は導入せず完全粘塑性とした。材料定数をヤング率 $E = 200(\text{MPa})$ 、降伏応力 $\sigma_y = 40(\text{Mpa})$ 、粘性パラメータ $\mu = 100(\text{s})$ 、速度感度パラメータ $\epsilon = 1$ と設定して、粘塑性モデルで3通りのひずみ速度 $\Delta\epsilon/\Delta t = 0.001, 0.01, 0.1$ で荷重した場合、弾塑性体、弾塑性体として $\epsilon = 1.0$ まで一軸引張を行った時の応力ひずみ曲線を図1に示す。また、材料定数のうち μ のみを 10, 100, 1000 と変化させて衝撃荷重として最初に $\epsilon = 1.0$ を加え、そのままひずみ一定で保った時の応力の時間変化を図2に示す。

図1の結果から、ひずみ速度が大きいときには弾塑性体に近い挙動を、小さいときには弾塑性体に近い挙動を示すという粘塑性体の特徴を表すことができていることが確認できた。また、ひずみ速度をさらに遅くすることで弾塑性モデルで得られた準静的な解析結果とほぼ一致する結果が得られることも確認できた。

図2の結果からは、ひずみを一定にしても応力がある値へ向かって低下するという粘塑性体の応力緩和の性質を表せることが確認できた。また粘性パラメータの値によって応力緩和の時間に対する度合いを変化させることができることも確認できた。

5. まとめ

本研究では、様々なひずみ速度に対して統一的に記述できる粘塑性モデルの定式化に関する基礎的な研究として、von Mises モデルを粘塑性に拡張したモデルの定式化及び陰的応力更新法の数値実装を行い、様々な変形速度に対する解析を行った。結果として、ひずみ速度に依存して非弾性挙動が変化するという点や、応力緩和に関する点において粘塑性体の特徴を表すことのできるモデルを定式化することができた。また、荷重ひずみ速度を遅くすることで弾塑性モデルでの解析結果とほぼ一致することが確認でき、同じモデルで時間依存/非依存な解析できることを確認できた。

今後の研究として、弾塑性モデルに下負荷面モデルを導入し、繰り返し荷重時における様々なひずみ速度に対する非弾性挙動を正確に示せるようなモデルの定式化や有限変形への拡張を行いたいと考えている。

参考文献

- 1) Simo, J.C. and Hughes, T.J.R., Computational Inelasticity, Springer (1998)
- 2) de Souza Neto, E. A., Peric, D. and Owen, D. R. J., Computational Methods for plasticity: Theory and Applications, John Wiley and Sons Ltd. (2008). (寺田賢二郎監訳, 非線形有限要素法 - 弾塑性解析の理論と実践 -, 森北出版 (2012).)