

# 繰返し負荷に対する有限変形・回転硬化下負荷面 Cam-clay モデルの適用性向上

東北大学 ○坂本 寛汰  
東北大学 正会員 山川 優樹

## 1. はじめに

地盤材料の複雑な体積圧縮／膨張と硬化／軟化を伴う繰返し変形挙動の再現を目指した構成則モデリングが多くの研究者により行われている<sup>1)</sup>。Yamakawa et al.<sup>2)</sup>は、地盤材料の構成モデルとして幅広く用いられている Cam-clay モデルに、有限ひずみの枠組みで非線形回転硬化をモデルに組み込み、さらに下負荷面の概念を導入することで、有限変形・回転硬化下負荷面 Cam-clay モデルを提案した。

本研究では、繰返し負荷における、有限変形・回転硬化下負荷面 Cam-clay モデルの基本的な特性について、特に回転硬化の挙動に着目して検討する。また、除荷過程での塑性逆負荷開始挙動の表現を目的として導入した回転硬化に伴う降伏面の扁平化の効果も調べた。

## 2. 有限変形・回転硬化下負荷面 Cam-clay モデル

### (1) 変形勾配テンソルの乗算分解

次のような変形勾配テンソル  $\mathbf{F}$  の弾性部分  $\mathbf{F}^e$  と塑性部分  $\mathbf{F}^p$  への乗算分解を導入する。 $\mathbf{F}^p$  は、さらに回転硬化に寄与する部分である  $\mathbf{F}^{ps}$  と散逸部分である  $\mathbf{F}^{pd}$  へ乗算分解を行う。

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \mathbf{F}^p, \quad \mathbf{F}^p = \mathbf{F}^{ps} \mathbf{F}^{pd} \quad (1)$$

これにより、基準配置と現在配置に加え、新たな中間配置が導入される。式(1)のうち、 $\mathbf{F}^e$  は超弾性構成則に、 $\mathbf{F}^{ps}$  は回転硬化則にそれぞれ用いられる。本モデルで用いられている超弾性構成則と回転硬化則の詳細は参考文献<sup>2)</sup>を参照されたい。

### (2) 下負荷面の概念

下負荷面は、正規降伏面と同様の形状と方向を持ち、必ず現在の応力点を通る。正規降伏面に対する下負荷面のサイズの比は、スカラー変数  $R$  ( $0 \leq R \leq 1$ ) 表され、これを正規降伏比と呼ぶ。正規降伏比  $R$  は塑性ひずみの進展によって増加し、それに伴い下負荷面は正規降伏面へ向かって拡大していき、 $R = 1$  となったとき  $R$  の進展は止まり、下負荷面は正規降伏面と一致し通常の塑性負荷時と同じような挙動を示す。弾性除荷のときは、 $R$  が減少することで下負荷面が縮小し、正規降伏面は大きさと形状を維持する。従って、下負荷面を導入し、 $R$  の進展則を決定することで弾性状態から塑性状態への移行を様々な形で表現することができる。本モデルで用いられている  $R$  の進展則の具体形は参考文献<sup>2)</sup>を参照されたい。

### (3) 降伏関数

回転硬化による Mandel 修正応力テンソル  $\bar{\mathbf{M}}^{\text{mod}}$  を次のように定義する。

$$\bar{\mathbf{M}}^{\text{mod}} := \bar{\mathbf{M}} - (-\bar{P} + P_t) \bar{\mathbf{M}}_{\text{dev}}^{\text{rot}} \quad (2)$$

ここで、 $\bar{\mathbf{M}}$  は Mandel 応力、 $\bar{P}$  は平均垂直応力、 $P_t$  は塑性引張限界応力、 $\bar{\mathbf{M}}_{\text{dev}}^{\text{rot}}$  は Mandel 背応力比テンソルの偏差部分である。式(2)の修正応力テンソル  $\bar{\mathbf{M}}^{\text{mod}}$  の3不変量  $\bar{P}^{\text{mod}}$ 、 $\bar{Q}^{\text{mod}}$ 、 $\bar{\Theta}^{\text{mod}}$  を用いて、異方性回転硬化を導入した Cam-clay モデルの下負荷面関数は次のように表される。

$$f := \frac{(\bar{Q}^{\text{mod}})^2}{\{M(\bar{\Theta}^{\text{mod}})\}^2 - \xi(\bar{\eta}^{\text{rot}})^2 + (\bar{P}^{\text{mod}} - P_t) [\bar{P}^{\text{mod}} - \{P_t + R(P_c - P_t)\}]} \quad (3)$$

ここに、 $M$  は回転硬化限界応力比、 $\xi$  は降伏面の扁平化係数、 $\bar{\eta}^{\text{rot}}$  は回転硬化量、 $P_c$  は圧密降伏応力である。降伏関数は、式(3)で  $R = 1$  とすることで得られる。

## 3. 繰返し負荷におけるモデルの挙動評価

本研究で再現対象とした実験データは、砂質土を対象として非排水条件で実施された繰返しねじりせん断試験と繰返し三軸試験 (CU 試験) によって得られたものである<sup>2)</sup>。ここでは紙面の制約上、試験方法と応力振幅が異なる3ケースの実験のうち、1ケースの繰返し三軸試験についてののみ扱うこととする。

実験に用いた試料は、土粒子密度  $\rho_s = 2.623 \text{ g/cm}^3$ 、最小乾燥密度  $\rho_{d,\min} = 1.125 \text{ g/cm}^3$ 、および最大乾燥密度  $\rho_{d,\max} = 1.564 \text{ g/cm}^3$  (対応する最大および最小間隙比はそれぞれ  $e_{\max} = 1.332$ 、 $e_{\min} = 0.677$ ) の岐阜珪砂 No.8 である。実験は相対密度  $D_r = 87.4\%$ 、初期間隙比  $e_{\text{init}} = 0.751$ 、有効拘束圧  $\sigma'_0 = 100 \text{ kN/m}^2$ 、偏差応力比の振幅  $\sigma_d/(2\sigma'_0) = 0.305$  で行われた。

回転硬化によるモデル挙動の変化を調べるため、回転硬化限界応力比  $M_{r,\text{TC}}$  と回転硬化発展係数  $b_r$  を変化させて解析を行った。解析に使用した材料定数と初期値を表1に記載した。

$b_r = 100$  に固定し、 $M_{r,\text{TC}}$  を変化させて解析を行った結果を図1に、 $M_{r,\text{TC}} = 1.0$  に固定し、 $b_r$  を変化させて解析を行った結果を図2にそれぞれ示した。図1、2より、繰返し負荷に伴って有効応力が低下し、ひずみ振幅が増大する様子や、サイクリックモビリティが解析で再現できていることがわかる。図1より、応力-ひずみ関係のグラフに着目すると、 $M_{r,\text{TC}}$  を増加させるに従って、ひずみ振幅の増大が小さくなる傾向がみられる。図2より、有効応力経路の初期の数サイクルに着目すると、 $b_r$  を増加させると有効応力の低下が遅くなる傾向がみられる。また、図1、図2の左側に示した応力-ひずみ関係に着目すると、モデルに降伏面の扁平化を導入したにも関わらず、除荷過程での塑性逆負荷において剛性低下前に応力のオーバーシュートが生じていることがわかる。

**Key Words:** Cam-clay モデル, 異方性, 有限変形, 回転硬化, 下負荷面, 繰返し負荷

〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06, Phone: 022-795-7417, E-mail: kanta.sakamoto.s1@dc.tohoku.ac.jp

表-1 数値解析に用いて材料定数と初期値

材料定数	値
<b>超弾性</b>	
弾性圧縮指数 $\kappa^*$	0.00189
せん断弾性係数の基準値 $\mu_0^*$	20.3 MPa
せん断弾性係数の圧力依存性指数 $\alpha$	0.60
弾性引張限界応力 $P_1$	0.0010 kPa
<b>回転硬化則</b>	
回転硬化限界応力比 $M_{r,TC}$	0.6~1.4
回転硬化発展係数 $b_r$	10~500
非線形性を表す指数 $\beta$	$1.0 \times 10^{-6}$
<b>等方硬化則</b>	
塑性圧縮指数 $\gamma^*$	0.02671
圧密降伏応力の最小絶対値 $P_{c+}$	0 kPa
偏差硬化/軟化境界応力比 $M_{d,TC}$	0.60
偏差硬化/軟化の基準となる無次元係数 $h_{s1}$	4.0
偏差硬化/軟化の応力依存性を表す無次元指数 $a$	10
偏差硬化/軟化の下限値に関する無次元指数 $b$	10
偏差硬化/軟化の圧力依存性を表す無次元指数 $c$	0
偏差硬化/軟化係数の低下を表す無次元指数 $s$	0
<b>正規降伏面, 下負荷面, 塑性ポテンシャル面</b>	
限界応力比 $M_{TC}$	1.431
塑性ポテンシャル面の形状比 $N_{TC}$	1.431
塑性引張限界応力 $P_1$	0.0010 kPa
降伏面の扁平化係数 $\xi$	0 or 1
<b>正規降伏比の発展則</b>	
弾性限界正規降伏比 $R_c$	$1.0 \times 10^{-6}$
下負荷面発展係数の基準値 $u_0$	10
下負荷面発展係数の最小値 $u_\infty$	0
下負荷面発展係数の圧力依存性を表す無次元指数 $m$	0
下負荷面発展係数の Lode 角依存性を表す無次元指数 $\nu$	0
下負荷面発展係数の低下を表す無次元指数 $\varsigma$	0
<b>初期値</b>	
平均垂直応力の基準値 $P_0$	-100 kPa
圧密降伏応力の初期値 $P_{c0}$	-600 kPa
正規降伏比の初期値 $R_0$	0.167

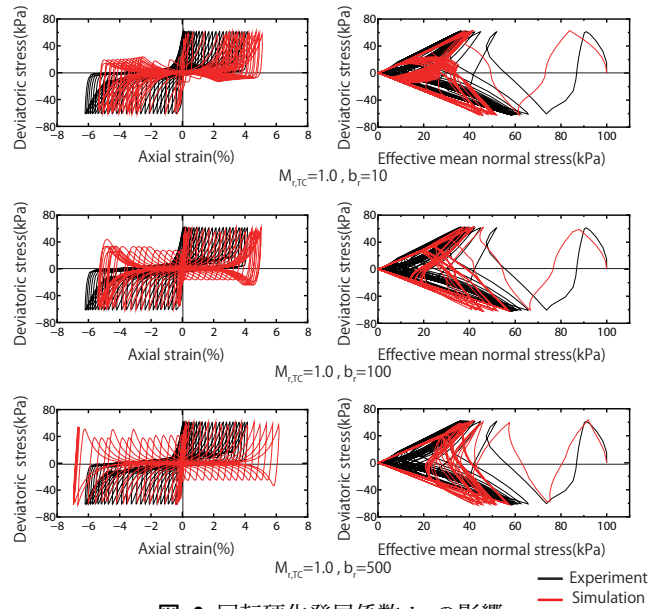


図-2 回転硬化発展係数  $b_r$  の影響

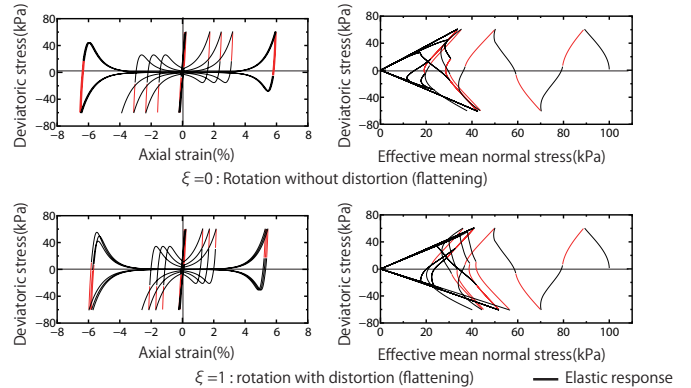


図-3 降伏面の扁平化の影響

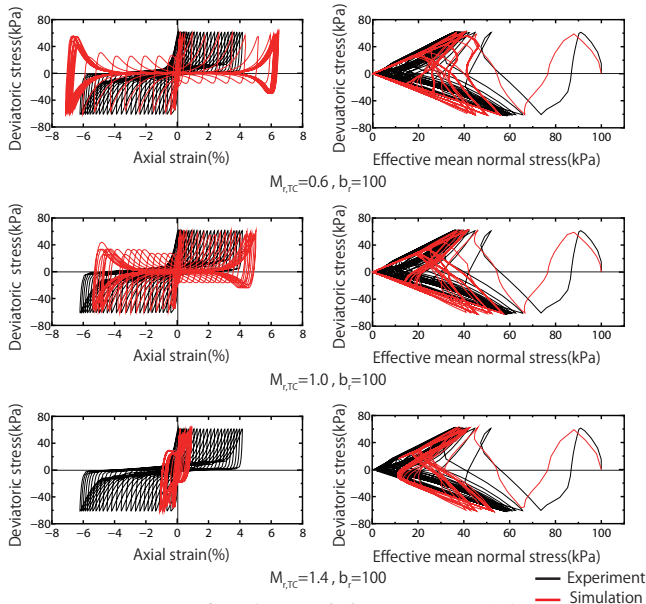


図-1 回転硬化限界応力比  $M_{r,TC}$  の影響

次に、降伏面の扁平化の影響を調べるため、降伏面の扁平化があるとき ( $\xi = 1$ ) と無いとき ( $\xi = 0$ ) で解析を行い、弾性応答を示す範囲を調べ比較した。解析結果を弾性応答を赤色で、塑性応答を黒色で図3に示した。なお、図を見やすくするため全25サイクルある繰返し載荷からサイクルを抽出して示している。図3より、応力-ひずみ関係に着目

すると扁平化があるとき降伏面の扁平化によって除荷過程での塑性逆負荷開始が早まっていることがわかる。

#### 4. 結論

本研究では、繰返し負荷における有限変形・回転硬化下負荷面 Cam-clay モデルの基本的な特性について、とくに回転硬化の挙動に着目して検討するとともに、既往の実験結果の再現を試み、モデルの表現性能を検証した。

回転硬化限界応力比  $M_{r,TC}$  と回転硬化発展係数  $b_r$  を変化させて解析を行った結果、サイクリックモビリティがある程度再現できることがわかった。 $M_{r,TC}$  を増加させるとひずみ振幅の増大が小さくなる傾向が、 $b_r$  を増加させると有効応力の低下が遅くなる傾向がみられた。降伏面の扁平化を導入した場合、除荷過程での塑性逆負荷開始が早まったが、剛性低下前の応力のオーバーシュートがみられた。今後は、この点を改善し、モデルの表現性能を向上させる必要がある。

#### 参考文献

- 1) Zhang F, Ye B, Noda T, Nakano M, Nakai K. Explanation of cyclic mobility of soils: Approach by stress-induced anisotropy. *Soils Found.* 2007;47(4):635-648.
- 2) Yamakawa Y, Hashiguchi K, Sasaki T, Higuchi M, Sato K, Kawai T, Machishima T, Iguchi T. Anisotropic subloading surface Cam-clay plasticity model with rotational hardening: Deformation gradient-based formulation for finite strain. *Int. J. Numer. Anal. Methods Geomech.* 2021;45(16):2321-2370.