

骨格曲線と履歴曲線に基づく3次元構成則の開発と 多方向繰返し載荷への適用性検証

東北大学 非会員 ○豊間根 尚人
東北大学 正会員 山川 優樹

1. 序論

非線形の応力-ひずみ関係を表現するために様々な解析コードに実装されている実用的な1次元構成則として、Hardin-Drnevichモデル（HDモデル）やRamberg-Osgoodモデル（ROモデル）、一般化双曲線モデル（GHEモデル）などがある。この種の構成則を多次元問題に適用するにあたって、せん断応力-せん断ひずみ関係に着目して1次元構成則を適用する方法や、多次元構成則へ拡張されたマルチスプリングモデルを適用する方法などが挙げられる。しかし、前者の方法は構成則が満たすべき客観性の要件を満足する保証が無く、非線形解析での収束性がよくない場合があるという問題も指摘されている。後者の方法はメモリ使用量の観点で大規模3次元解析への適用が容易ではない。

よって本研究では、単調負荷過程では骨格曲線を、除荷・再負荷過程では履歴曲線を用いた3次元構成則の開発を行い、多方向繰返し載荷への適用性を検証する。計算された試行応力に基づく記憶曲面を用いた負荷判定法と、入力されたひずみに基づく負荷面を用いた負荷判定法のそれぞれを用いて繰返し載荷の解析を行い、3次元構成則及びこのアルゴリズムに基づいて作成した解析コードの多方向載荷に対する適用性を検証する。

2. 骨格曲線・履歴曲線に基づく多次元構成則

一般的な連続体力学の慣例に従い、応力、ひずみ、およびそれらの不変量は引張り・膨張を正、圧縮を負としている。

(1) 単調負荷過程における骨格曲線を用いた構成則

単調負荷過程における骨格曲線をベースとした多次元構成則の定式化を行う。応力テンソル σ を圧力成分と偏差成分に分解する。平均垂直応力 $p := \text{tr } \sigma / 3$ は偏差ひずみ $\varepsilon_s := \sqrt{2/3} \|\varepsilon_{\text{dev}}\|$ に無依存で体積ひずみ $\varepsilon_v := \text{tr } \varepsilon$ のみにより定められ、なおかつ履歴依存がないものと仮定する。偏差応力テンソル σ_{dev} は体積ひずみ ε_v に無依存であると仮定する。さらに、 σ_{dev} の方向が ε_{dev} と同じであると仮定して、 $n_{\sigma_{\text{dev}}} = n_{\varepsilon_{\text{dev}}}$ とする。以上の仮定のもとで、応力テンソルとひずみテンソルとの間には式(1)の関係が成り立つ。

$$\sigma = p\mathbf{I} + \sigma_{\text{dev}} = K\varepsilon_v\mathbf{I} + \frac{2q}{3\varepsilon_s}\varepsilon_{\text{dev}} \quad (1)$$

ここで、 K は体積弾性係数、 $q := \sqrt{2/3} \|\sigma_{\text{dev}}\|$ は偏差応力不変量である。

せん断挙動に関する式(1)の第2項へ骨格曲線の関数を導入する準備として、正規化した偏差応力不変量 η および偏差ひずみ不変量 ξ を以下のように定義する。

$$\eta := \frac{q}{q_f}, \quad \xi := \frac{3G_0}{q_f}\varepsilon_s \quad (2)$$

ここで、 $q_f (> 0)$ はせん断強度定数、 $G_0 (> 0)$ は基準せん断剛性係数であり、両者は応力の次元をもつ。単調負荷過程において、偏差応力と偏差ひずみに関する無次元パラメータ η と ξ との関係を表す骨格曲線が次式のような関数で与えられるものとする。

$$\eta = S(\xi) \quad (3)$$

式(2)、式(3)、を式(1)に適用すると、単調負荷過程における応力-ひずみ関係が次式のように得られる。 $\xi = 0$ のときは $\varepsilon_{\text{dev}} = \mathbf{0}$ である。

$$\sigma = K\varepsilon_v\mathbf{I} + 2G_0 \frac{S(\xi)}{\xi} \varepsilon_{\text{dev}} \quad (4)$$

また、構成則を三次元化する準備として、正規化した偏差応力テンソル η 、および正規化した偏差ひずみテンソル ξ を以下のように定義する。ここで、 η と ξ は $\|\eta\| = \eta$ 、 $\|\xi\| = \xi$ の条件を満たす。

$$\eta := \frac{1}{q_f} \sqrt{\frac{3}{2}} \sigma_{\text{dev}}, \quad \xi := \frac{3G_0}{q_f} \sqrt{\frac{2}{3}} \varepsilon_{\text{dev}} \quad (5)$$

(2) 除荷・再負荷過程における履歴曲線を用いた構成則

除荷・再負荷過程における履歴曲線をベースとした多次元構成則の定式化を行う。 i 番目の除荷あるいは再負荷の開始点における偏差応力を $\sigma_{\text{dev}}^{R_i}$ 、偏差ひずみを $\varepsilon_{\text{dev}}^{R_i}$ とし、その点を基点として除荷過程あるいは再負荷過程にある状態を考える。除荷・再負荷開始点を基準とした偏差応力増分と偏差ひずみ増分は次式の通りである。

$$\Delta^{R_i} \sigma_{\text{dev}} := \sigma_{\text{dev}} - \sigma_{\text{dev}}^{R_i}, \quad \Delta^{R_i} \varepsilon_{\text{dev}} := \varepsilon_{\text{dev}} - \varepsilon_{\text{dev}}^{R_i} \quad (6)$$

これらの不変量を次式のように定義する。

$$q^L := \sqrt{\frac{3}{2}} \|\Delta^{R_i} \sigma_{\text{dev}}\|, \quad \varepsilon_s^L := \sqrt{\frac{2}{3}} \|\Delta^{R_i} \varepsilon_{\text{dev}}\| \quad (7)$$

式(2)と同様に正規化した相対偏差応力不変量 η^L および相対偏差ひずみ不変量 ξ^L を次式のように定義する。

$$\eta^L := \frac{q^L}{q_f}, \quad \xi^L := \frac{3G_0}{q_f} \varepsilon_s^L \quad (8)$$

除荷・再負荷過程の応力-ひずみ関係がMasing則に従うものと仮定すると、 η^L と ξ^L との関係は骨格曲線の関数(3)を用いて次式で与えられる。

$$\frac{\eta^L}{\lambda} = S\left(\frac{\xi^L}{\lambda}\right) \rightsquigarrow \eta^L = \lambda S\left(\frac{\xi^L}{\lambda}\right) \quad (9)$$

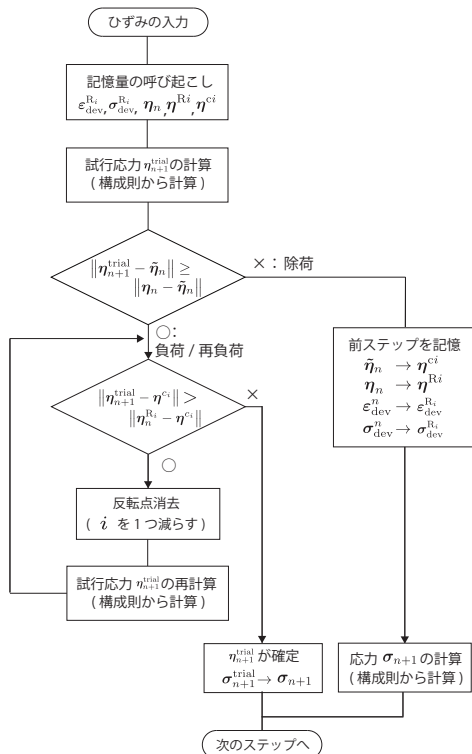


図-1 記憶曲面モデルのフローチャート

ここで λ は Masing 則のパラメータである。 $\Delta^R \sigma_{dev}$ の方向と $\Delta^R \epsilon_{dev}$ の方向が同じであると仮定すると、 $n_{\Delta^R \sigma_{dev}} = n_{\Delta^R \epsilon_{dev}}$ の関係が成り立つ。平均垂直応力 p は除荷・再負荷過程においても履歴依存がなく体積ひずみ ϵ_v のみにより式 (1) の第 1 項で与えられるものとすれば、式 (1), (8), (9) より除荷・再負荷過程における応力 - ひずみ関係が次式のように得られる。 $\xi^L = 0$ のときは $\Delta^R \epsilon_{dev} = \mathbf{0}$ である。

$$\sigma = K \epsilon_v \mathbf{I} + \sigma_{dev}^{Ri} + 2G_0 \frac{\lambda S(\xi^L/\lambda)}{\xi^L} (\epsilon_{dev} - \epsilon_{dev}^{Ri}) \quad (10)$$

3. 負荷／除荷判定

計算された試行応力を基にした記憶曲面¹⁾を用いた負荷判定と、入力されたひずみを基にした負荷面²⁾を用いた負荷判定を比較した。ここでは、それぞれを記憶曲面モデル、負荷面モデルと呼ぶ。図-1 および図-2 に簡単なフローチャートを示す。記憶曲面モデルは構成則を用いた計算が多く、負荷面モデルは反転点の消去に関する処理が多い。

4. 解析コードの多方向載荷への適用性検証

以下では $K = 500/3$ MPa, $G_0 = 150$ MPa, $q_f = 175.11$ kPa, 骨格曲線は HD モデルを用いたひずみ制御により、異なる周波数の 2 方向せん断ひずみ同時入力の解析を行う。

入力するひずみの式は $\gamma_{xz}(t) = A_1 t \sin(2\pi f_1 t)$, $\gamma_{yz}(t) = A_2 t \sin(2\pi f_2 t)$ の増幅波とし、そのほかのひずみ成分は 0 とした。時間区間 t は 0s から 10s までとし、 $A_1 = 0.001$, $A_2 = 0.002$, 周波数は $f_1 = 1$ Hz, $f_2 = 2$ Hz とした。解析ステップ数は 12000 ステップとした。結果を図-3 および図-4 に示す。

周波数が異なる 2 方向のひずみを同時に入力した際、記憶曲面モデルでは骨格曲線と履歴曲線から大きく逸脱した解析結果が得られた。また、10 サイクルの増幅ひずみ繰返し載荷に対して、規則性のない不自然なモデル応答が得られ

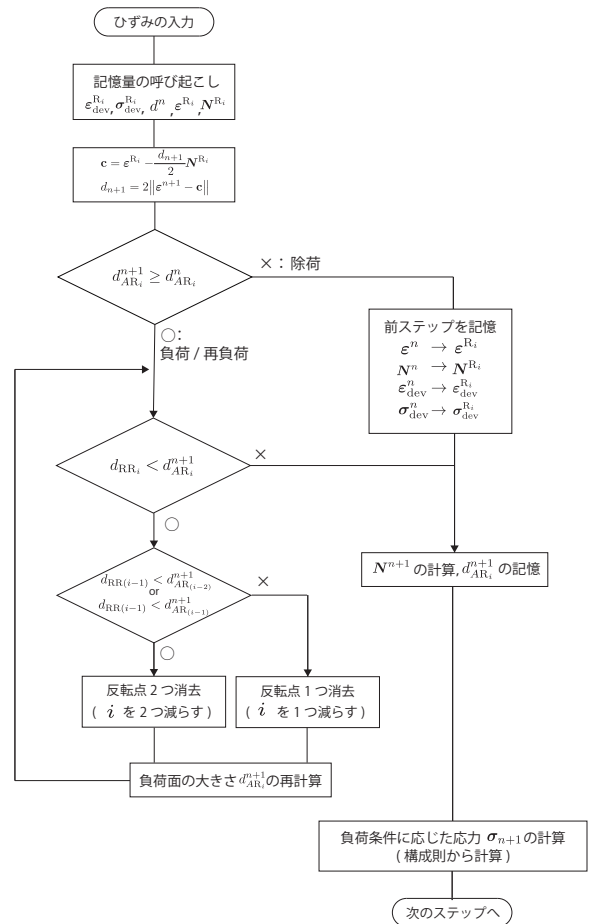


図-2 負荷面モデルのフローチャート

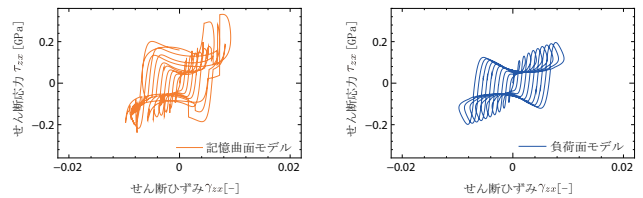


図-3-a 記憶曲面モデル (xz) 図-3-b 負荷面モデル (xz)
図-3 $\gamma_{xz} - \tau_{xz}$

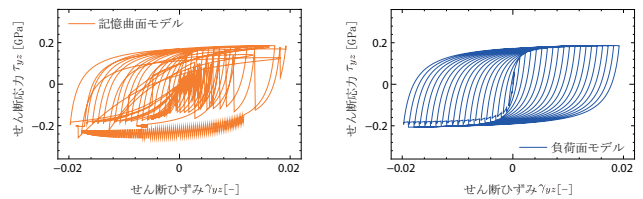


図-4-a 記憶曲面モデル (yz) 図-4-b 負荷面モデル (yz)
図-4 $\gamma_{yz} - \tau_{yz}$

た。負荷面モデルの解析では、不自然な解析結果は確認されなかった。これらのことから、負荷除荷判定法を試行応力に基づく記憶曲面モデルから入力ひずみに基づく負荷面モデルに切り替えることで、応力計算アルゴリズムの改善にある程度成功したと言える。

参考文献

- 1) Shimbo, T.: On an implicit stress-calculation algorithm for a multidimensional constitutive law using a skeleton curve. Soils and Foundations, Vol. 58, pp. 481-490, 2018.
- 2) Niemunis, A., Prada-Sarmientoand, L.F., Grandas-Tavera, C.G.: Paraelasticity. Acta Geotechnica, Vol. 6, pp. 67-80, 2011.