

地盤材料を対象とした超弾性モデルの応答と材料不安定性の検討

東北大学 ○上田 晃義
東北大学 正会員 山川 優樹

1. はじめに

超弾性は、有限変形理論に基づく弾性構成則において、合理的な表現や数値計算の簡便性といった観点で有用な構成則である。地盤材料の弾性特性では体積弾性係数やせん断弾性係数が圧力依存性を有することが知られており、それを考慮した超弾性モデルが既往研究で提案されている^{1),2),3)}。このうち代表的ないくつかのモデルを有限変形および引張応力に対応するように再定式化した⁴⁾上で、弾性接線係数の圧力依存性に注目した体系的なパラメトリックスタディを行い、超弾性モデルの応答を網羅的に比較した。この結果、モデルの種類によって応答が大きく異なることがわかった。特に一部のモデルでは、側圧一定三軸圧縮の過程で軸方向圧縮応力が減少する不合理な応答が確認された。その原因を材料不安定性の観点から明らかにするべく、変形過程における超弾性接線係数テンソルの固有値の挙動を調べた。

2. 応力および変形変数の定義

変形勾配テンソル F の乗算分解を仮定する⁵⁾。 F^e は F の弾性部分を、 F^p は塑性部分を示す。

$$F = F^e F^p \quad (1)$$

弾性変形の尺度として、中間配置 \bar{K} で定義される弾性右 Cauchy–Green 変形テンソルを使用する。

$$\bar{C}^e := F^{eT} F^e \quad (2)$$

超弾性モデルは、一般的に弾性変形と適切な応力との仕事共役性に基づいて定式化される。弾性 Green–Lagrange ひずみテンソル \bar{E}^e と仕事共役な応力の測度として、 \bar{K} で定義される第 2 Piola–Kirchhoff 応力テンソル \bar{S} を用いて超弾性構成則を導出する。

3. 地盤材料の超弾性モデル

以下に示すモデルは地盤材料を対象とする超弾性モデルが Yamakawa⁴⁾ によって有限変形および引張応力に対応するように再定式化されたものである。モデル 1、モデル 2 は対数弾性ひずみテンソル $\bar{E}_{\log}^e := \log \bar{U}^e$ (\bar{U}^e は \bar{F}^e の右極分解により得られる弾性右ストレッチテンソル) の体積不変量 ε_v^e と偏差不変量 ε_s^e で表されるが、モデル 3、モデル 4 のせん断項は弾性変形テンソル \bar{C}^e で直接表される。なお、本研究は対象を等方性超弾性に限定している。

(1) モデル 1

Houlsby¹⁾ が提案した微小変形モデルを 2 つの不変量 ε_v^e , ε_s^e を用いて 3 次元の有限変形へ一般化した。せん断弾性係数 $\mu^e(\varepsilon_v^e)$ の圧力依存性は式 (6) のように考慮されている。

$$\bar{M} = \bar{C}^e \bar{S} = \bar{P} I + \frac{\bar{Q}}{3\varepsilon_s^e} (\log \bar{C}^e)_{\text{dev}} \quad (3)$$

$$\bar{P} = P_i + (P_0 - P_i) \exp\left(-\frac{\varepsilon_v^e - \varepsilon_{v0}^e}{\kappa^*}\right) \left\{ 1 + \frac{3\alpha}{2\kappa^*} (\varepsilon_s^e)^2 \right\} \quad (4)$$

$$\bar{Q} = 3\mu^e(\varepsilon_v^e) \varepsilon_s^e \quad (5)$$

$$\mu^e(\varepsilon_v^e) := \mu_i^e - \alpha(P_0 - P_i) \exp\left(-\frac{\varepsilon_v^e - \varepsilon_{v0}^e}{\kappa^*}\right) \quad (6)$$

(2) モデル 2

Houlsby et al.²⁾ が提案した微小変形非線形弾性モデルを有限変形に拡張し、式 (3) に以下のような \bar{P} , \bar{Q} を与える。

$$\bar{P} = \begin{cases} P_i + (P_0 - P_i) \left\{ 1 + (1-n) \left(-\frac{\varepsilon_v^e - \varepsilon_{v0}^e}{\kappa^*} \right) \right\} A^{n/(2-2n)} & \text{for } 0 \leq n < 1 \\ P_i + (P_0 - P_i) \exp B & \text{for } n = 1 \end{cases} \quad (7)$$

$$\bar{Q} = \begin{cases} 3\mu_0^e \varepsilon_s^e A^{n/(2-2n)} & \text{for } 0 \leq n < 1 \\ 3\mu_0^e \varepsilon_s^e \exp B = 3\mu_0^e \left(\frac{\bar{P} - P_i}{P_0 - P_i} \right) \varepsilon_s^e & \text{for } n = 1 \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{cases} A := \left\{ 1 + (1-n) \left(-\frac{\varepsilon_v^e - \varepsilon_{v0}^e}{\kappa^*} \right) \right\}^2 - \frac{3\mu_0^e(1-n)}{\kappa^*(P_0 - P_i)} (\varepsilon_s^e)^2 & \text{for } 0 \leq n < 1 \\ B := -\frac{\varepsilon_v^e - \varepsilon_{v0}^e}{\kappa^*} - \frac{3\mu_0^e}{2\kappa^*(P_0 - P_i)} (\varepsilon_s^e)^2 & \text{for } n = 1 \end{cases} \quad (9)$$

(3) モデル 3

Hashiguchi³⁾ が提案した、有限変形におけるべき乗則の圧力依存性に従うせん断弾性係数を持つ超弾性モデルである。

$$\bar{M} = \left[\left\{ P_i + (P_0 - P_i) \left(\frac{J^e}{J_0^e} \right)^{-1/\kappa^*} \right\} - \frac{m}{2\kappa^*} (\mu_0^e - \mu_i^e) \left(\frac{J^e}{J_0^e} \right)^{-m/\kappa^*} (\text{tr} \bar{C}_{\text{dis}}^e - 3) \right] I + \mu^e(J^e) (\bar{C}_{\text{dis}}^e)_{\text{dev}} \quad (10)$$

$$\mu^e(J^e) := \mu_i^e + (\mu_0^e - \mu_i^e) \left(\frac{J^e}{J_0^e} \right)^{-m/\kappa^*} \quad (11)$$

(4) モデル 4

モデル 1 を Neo–Hooke 超弾性モデルの形式に準じたテンソル表示で表現したモデルである。

$$\bar{M} = \left[\left\{ P_i + (P_0 - P_i) \left(\frac{J^e}{J_0^e} \right)^{-1/\kappa^*} \right\} + \frac{\alpha}{2\kappa^*} (P_0 - P_i) \left(\frac{J^e}{J_0^e} \right)^{-1/\kappa^*} (\text{tr} \bar{C}_{\text{dis}}^e - 3) \right] I + \mu^e(J^e) (\bar{C}_{\text{dis}}^e)_{\text{dev}} \quad (12)$$

Key Words: 超弾性, 地盤材料, 有限変形, 圧力依存性接線係数, 引張応力

〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06, Phone: 022-795-7420, E-mail: akiyoshi.ueda.q8@dc.tohoku.ac.jp

4. 超弾性モデルの比較解析

4種類の超弾性モデルの基本的な特性に対するパラメトリックスタディを実行した。解析条件は単純せん断と側圧一定三軸圧縮の2つを考えた。紙面の都合上、後者のみについて述べる。三軸圧縮では、材料定数を $P_0 = -100$ kPa, $\kappa^* = 0.003$ とした。結果として、モデル1, 3, 4において図-1に示すように、軸方向圧縮応力が減少する応答が確認された。

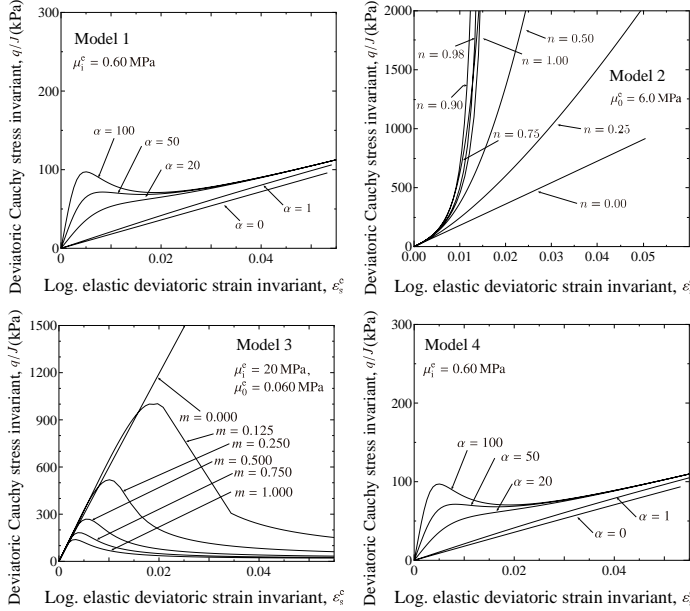


図-1 Triaxial compression analysis under constant lateral confining stress for Model1 to Model4

様々な入力変形に対する各超弾性モデルの応答を確認するため、所定の範囲でひずみ入力 ($\epsilon_v^e, \epsilon_s^e$) を網羅的に与えて解析した結果を図-2に示した。なお、図-1の三軸圧縮の結果得られたひずみ経路も併せて示した。

また、各モデルを材料不安定性の観点で調べることを目的として、弾性接線係数テンソルの正定値性の喪失に着目して固有値の変化を調べた。

$$\dot{\bar{S}} = \bar{C}^e : \frac{1}{2} \dot{\bar{C}}^e \quad (13)$$

ここで、式(13)に超弾性構成則の速度形 \bar{S} を示す。 \bar{C}^e は超弾性接線係数テンソル、 $\dot{\bar{C}}^e$ は弾性右 Cauchy-Green 変形テンソルの物質時間微分である。 \bar{C}^e は4階テンソルであり、対称性を利用して縮約することで 6×6 の行列表現が可能となる。超弾性接線係数テンソルの正定値性は固有値の正負から判定できる。図-2と同様の入力ひずみに対する \bar{C}^e の最小固有値の正負および対応する図-1における三軸圧縮のひずみ経路との比較を図-3に示した。図-2と図-3を比較すると、弾性接線係数テンソルの最小固有値の負になる範囲において応力低下が生じていることが確認できる。

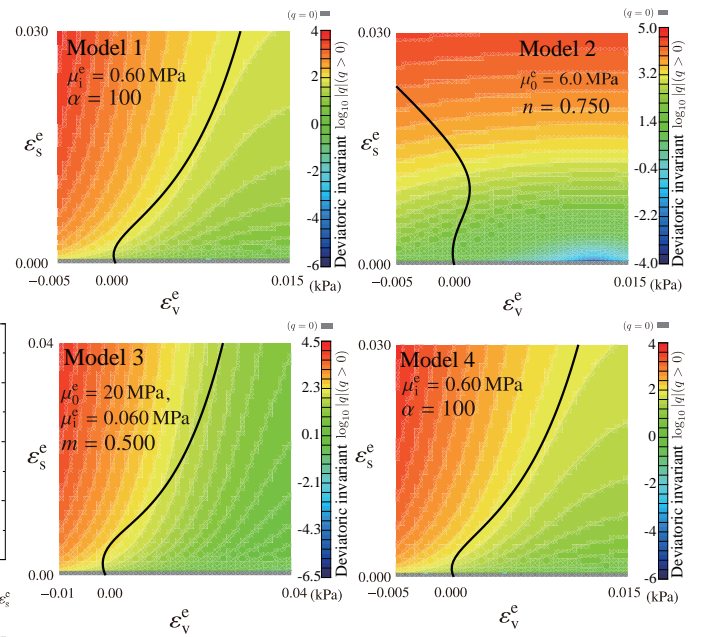


図-2 Contour of deviatoric invariant and strain path

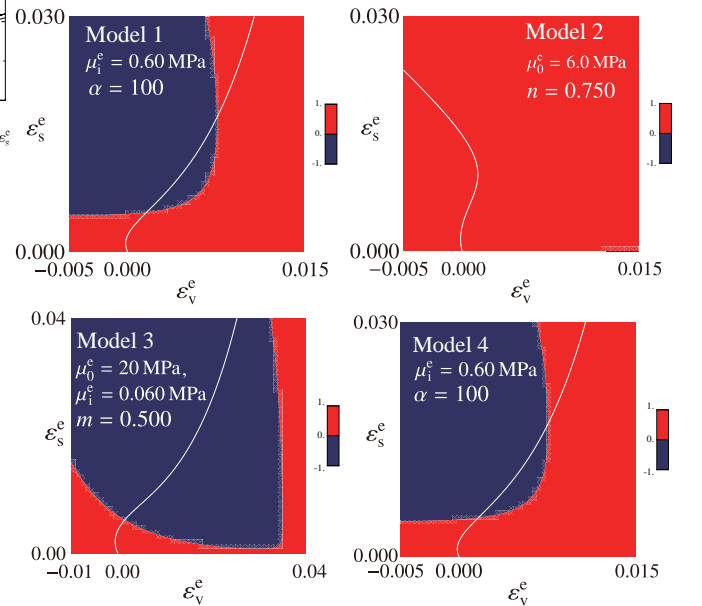


図-3 Minimum eigenvalue of elastic tangent moduli tensor and strain path

参考文献

- 1) Houlsby, G.T., 1985. The use of variable shear modulus in elastoplastic model for clays. *Comput. Geotech.* 1 (1), 3–13.
- 2) Houlsby, G.T., Amorosi, A., Rojas, E., 2005. Elastic moduli of soils dependent on pressure: a hyperelastic formulation. *Géotechnique* 55 (5), 383–392.
- 3) Hashiguchi, K., 2018. Hypo-elastic and hyper-elastic equations of soils. *Int. J. Numer. Anal. Methods Geomech.* 42 (13), 1554–1564.
- 4) Yamakawa, Y., 2022. Hyperelastic constitutive models for geomaterials: Extension of existing models to include finite strains and their comparison. *Comput. Geotech.* 143, 104600.
- 5) Lee, E.H., 1969. Elastic-plastic decomposition at finite strains. *J. Appl. Mech.* (ASME) 36 (1), 1–6.