Virtual Element Methodの平面要素に対する安定化パラメータについての検討

東北大学大学院工学研究科　○学生会員　藤本竜太
東北大学大学院工学研究科　　正会員　　斉木　功

1. はじめに

Virtual Element Method（VEM）は Beiráo *et al.*[1] により提案された，要素内において内挿関数を陽に定める必要がない偏微分方程式の近似解法である．この特徴により多角形や多面体の要素を容易に扱うことができるため，有限要素法を一般化した手法として注目を集め始めている．VEMで定式化された内力仕事式は整合項と安定化項の2項で書き表すことができ，そのうちの安定化項については安定化パラメータによりスケーリングを行うことが一般的である．しかし，安定化パラメータの値をどのように設定するかについては確立された方法が存在するわけではない．そこで，本研究では固有値解析を通して物理的に適切な安定化パラメータの設定方法を提案する．

2. Virtual Element Methodの構造

本章では Artioli *et al.*[2] による2次元の線形弾性問題を対象とした定式化を用いてVEMの構造を示す．

(1) 支配方程式

連続した2次元領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ において，Ω 上で物体力 $\boldsymbol{f}$ が作用する線形弾性境界値問題を考える．領域の境界 Γ は Dirichlet 境界 Γ_u と Neumann 境界 Γ_t から構成される．つり合い式，適合条件式，線形弾性体の構成式はそれぞれ

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\sigma}+\boldsymbol{f}=\boldsymbol{0} \qquad \text{in } \Omega \tag{1}$$
$$\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u})=\frac{1}{2}\left\{\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u}+(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u})^{\mathrm{T}}\right\} \qquad \text{in } \Omega \tag{2}$$
$$\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{\varepsilon} \qquad \text{in } \Omega \tag{3}$$

で与えられる．ここで，$\boldsymbol{u}$ は変位ベクトル，$\boldsymbol{\sigma}$ はCauchy応力テンソル，$\boldsymbol{\varepsilon}$ は微小ひずみテンソル，$\boldsymbol{C}$ は弾性テンソルを表す．また，境界条件は次のようになる．

$$\boldsymbol{u}=\bar{\boldsymbol{u}} \qquad \text{on } \Gamma_u \tag{4}$$
$$\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{n}=\bar{\boldsymbol{t}} \qquad \text{on } \Gamma_t \tag{5}$$

ここで，$\boldsymbol{n}$ は外向き単位法線ベクトルである．これらに仮想仕事の原理を適用することで，支配方程式は次式で表す弱形式として与えられる．

$$a(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=F(\boldsymbol{v}) \qquad \forall\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{\mathcal{V}} \tag{6}$$

ここで，$\boldsymbol{\mathcal{V}}:=\left(H_0^1(\Omega)\right)^2$ は可容変位場，a,F は

$$a(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = \int_\Omega \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}):\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}\Omega \tag{7}$$
$$F(\boldsymbol{v}) = \int_\Omega \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{f}\mathrm{d}\Omega+\int_{\Gamma_t}\boldsymbol{v}\cdot\bar{\boldsymbol{t}}\mathrm{d}\Gamma_t \tag{8}$$

である．

(2) Virtual Element Methodの定式化

まず，領域 Ω を重なりのない任意形状の多角形 E により分割する．このとき，多角形 E を要素と呼び，E の辺 e の数を m で表す．また，$\boldsymbol{\mathcal{V}}^h(E)$ は要素ごとに定義される離散化された可容変位場 $\boldsymbol{\mathcal{V}}^h\subset\boldsymbol{\mathcal{V}}$ であり，

$$\mathcal{V}^h(E)=\left\{v^h\in\mathcal{H}^1(E)\mid\Delta v^h\in\mathcal{P}_{k-2}(E),\right.$$
$$\left.v^h|_e\in\mathcal{P}_k(e)\quad\forall e\in\partial E\right\} \tag{9}$$

で定められるスカラー空間 $\mathcal{V}^h(E)$ により，$\boldsymbol{\mathcal{V}}^h(E)=\left[\mathcal{V}^h(E)\right]^2$ として定義される．ここで，Δ はラプラシアン，$\mathcal{P}_k(E)$ は要素 E 上で定義される k 次以下の多項式空間を表す．

要素 E は，各頂点において変位 $\boldsymbol{v}^h$ に関する2個の自由度，頂点を除く各辺上の点において変位 $\boldsymbol{v}^h$ に関する $2(k-1)$ 個の自由度，さらに要素内においてモーメント $\frac{1}{|E|}\int_{\Omega_E}\boldsymbol{v}^h\phi_i\mathrm{d}\Omega_E$ $(i=1,2,\cdots\frac{k(k-1)}{2})$ に関する $2\frac{k(k-1)}{2}$ 個の自由度を有する．ここで，$|E|$ は要素 E の面積，ϕ_i は $\mathcal{P}_{k-2}(E)$ の基底 $\left\{x^\alpha y^\beta \text{ with } \alpha,\beta\in\mathbb{N},\ \alpha+\beta\le k-2\right\}$ の元を示す．したがって，m 角形要素 E における空間 $\boldsymbol{\mathcal{V}}^h(E)$ の次元 d は

$$d=\dim\left(\boldsymbol{\mathcal{V}}^h(E)\right)=2mk+k(k-1) \tag{10}$$

となる．

次に，

$$\Pi^\varepsilon:\quad\boldsymbol{\mathcal{V}}^h(E)\to\mathcal{P}_{k-1}(E)^{2\times2}_{sym} \tag{11}$$

で定義される射影作用素 Π^ε を導入する．Π^ε は直交条件

$$\int_{\Omega_E}\left(\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}^h)-\Pi^\varepsilon(\boldsymbol{u}^h)\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varepsilon}^P\mathrm{d}\Omega_E=0,\ \forall\boldsymbol{\varepsilon}^P\in\boldsymbol{\mathcal{P}}_{k-1}(E)^{2\times2}_{sym} \tag{12}$$

を満足する．したがって，$\Pi^\varepsilon(\boldsymbol{v}^h)$ は $\mathcal{P}_{k-1}(E)^{2\times2}_{sym}$ 上における $\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}^h)$ の最良近似を表す．Π^ε を用いることで，要

Key Words: *virtual element method, plane element, stabilization parameter*
〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉6-6-06

素 E における内部仮想仕事は

$$a_E(\boldsymbol{u}^h, \boldsymbol{v}^h) = \int_{\Omega_E} \left[\Pi^{\varepsilon}(\boldsymbol{v}^h)\right]^{\mathrm{T}} \boldsymbol{C}\Pi^{\varepsilon}(\boldsymbol{u}^h)\mathrm{d}\Omega_E + \boldsymbol{\tau}S^E\left(\boldsymbol{u}^h, \boldsymbol{v}^h\right) \tag{13}$$

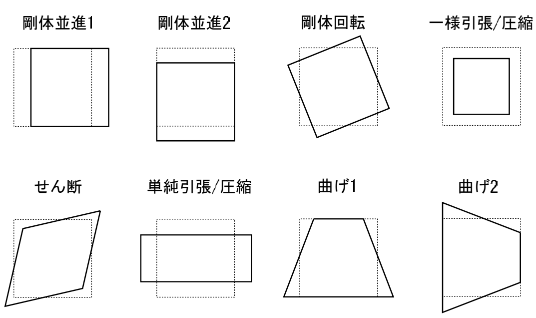
と変形できる．右辺の第 1 項は仮想仕事式から自然に得られる項で整合項と呼び，第 2 項は安定化を図るための項で安定化項と呼ぶ．

3. 安定化パラメータに関する検討

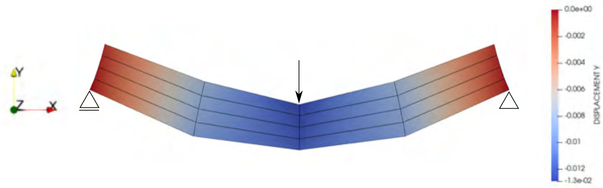
式 (13) における安定化項は，スカラーで与えられる安定化パラメータ τ でスケーリングすることが一般的である[3]．しかし，この τ をどのように定めるかについては確立された方法が存在せず，使用者の選択に委ねられている．例えば，Artioli *et al.*[2] は単純なモデルによるパラメトリックスタディの結果から，整合項の剛性行列 $\boldsymbol{K}_C$ を用いた $\tau = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\,(\boldsymbol{K}_C)$ という値を採用しているが，この値は比較的分割数の多い数値試験の結果から導かれたものであり，粗い分割でも十分良い精度の解が得られるかは試されていない．そこで，本項では物理的な観点から安定化パラメータの役割についての考察を行い，要素分割の仕方によらず精度の良い解を与えることができる安定化パラメータを提案する．

まずは，1 次正方形要素の整合項および安定化項それぞれの剛性行列に対して固有値解析を実行した．その結果，整合項は図-1 に示す基本変形モードのうち等方引張/圧縮・せん断および一軸引張/圧縮のモードを持ち，安定化項は曲げの 2 つのモードを持つことがわかった．また，安定化パラメータの値は曲げモードに関する固有値と対応することがわかった．固有値は対応する変形モードを生じさせるために必要なひずみエネルギーの 2 倍の大きさに相当することから，曲げに対応するひずみエネルギーの理論値の 2 倍の値を安定化パラメータに与えることができれば，1 次要素でも十分良い精度の解が得られることになる．

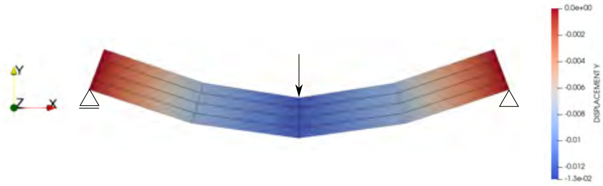
次に，長方形要素について考える．Bernoulli-Euler の梁理論により支間中央のたわみが 0.0125 となる単純



図–1 1 次四辺形要素の基本変形モード



図–2 安定化パラメータをスカラーで与えたときの解析結果



図–3 提案手法による解析結果

支持の問題について，安定化パラメータをスカラーで与えて解いた結果を図-2 に示す．図から支間中央のたわみは理論解に近い値が得られているが，一方で曲げモードのエネルギーが小さいときに生じるアワーグラスモードが生じていることがわかる．これは，長方形要素の場合，図-1 における曲げ 1 および曲げ 2 のそれぞれのモードを生じさせるために必要なひずみエネルギーの大きさが異なるにも関わらず，安定化パラメータをスカラーで与えたことで，大きさの異なる 2 つのエネルギーを単一の値でコントロールする形となったために生じた現象だと考えられる．そこで，アスペクト比の大きな要素でも精度の良い結果を得ることを目的として，式 (14) に示す τ_1 を奇数行，τ_2 を偶数行目の対角成分にもつ $d \times d$ の対角行列を安定化パラメータ $\boldsymbol{\tau}$ として用いる方法を提案する．

$$\tau_1 = \frac{E}{3}\frac{h_y}{h_x}, \quad \tau_2 = \frac{E}{3}\frac{h_x}{h_y} \tag{14}$$

ここで，h_x, h_y はそれぞれ x 軸，y 軸方向の要素の代表長さを表す．提案する安定化パラメータを与えたときの単純支持の解析結果は，図-3 に示すようにアワーグラスモードが生じていないことがわかる．

参考文献

1) Beirão, V.L., Brezzi, F., Cangiani, A., Manzini, G., Marini, L.D., Russo, A.: Basic principles of virtual element methods, *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 23(01), pp.199-214, 2013.
2) Artioli, E., Beirão, V.L., Lovadina, C., Sacco, E.: Arbitrary order 2D virtual elements for polygonal meshes: part I, elastic problem, *Comput. Mech.*, 60(3), pp.355-377, 2017.
3) Mengolini, M., Benedetto, M.F., Aragón, A.M.: An engineering perspective to the virtual element method and its interplay with the standard finite element method, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 350, pp.995-1023, 2019