

ねじりによる断面変形を考慮した梁理論

東北大学大学院工学研究科 学生会員 ○須田 陽平
東北大学大学院工学研究科 正員 斉木 功

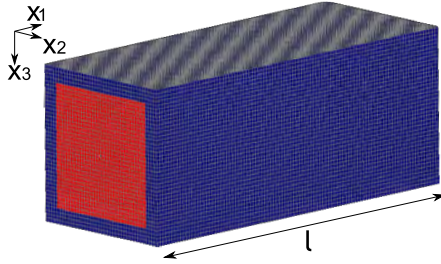


図-1 解析対象と座標・領域の設定

1. はじめに

Bernoulli-Euler による初等梁理論は、梁の変位場を仮定することで、連続体のつり合い式を軸線の運動だけで表す理論である。橋梁のような構造物の構造解析には梁理論に基づく有限要素である梁要素が広く用いられている。その理由として、梁要素が連続体有限要素と比較して自由度を大幅に削減できることや解析対象のモデル化が容易であることが挙げられる。

Saint-Venant はねじり率が一定の純ねじり問題を初等梁理論に導入し、厳密解を求めた。Vlasov は純ねじりとともに断面にそりを発生させる曲げねじりを考慮した理論を構築した¹⁾。この Vlasov 理論では、そりによるせん断変形を考慮し、薄肉断面において厚さ方向のせん断応力が一定という仮定のもと扇形面積計算を用いて St. Venant ねじりや曲げねじりに対する薄肉断面の断面剛性を解析的に求める手法を提案している。

一方、非均質断面を含む任意断面に適用可能な梁理論として有限要素離散化した代表体積要素による半解析的手法を用いた斉木・鄭によるせん断変形を考慮した梁理論²⁾が提案されている。そこで本研究では斉木・鄭²⁾に倣い代表体積要素を用いて断面のそりを変位場に組み込み、そりの大きさを自由度に持つ梁理論の構築を目的とする。

2. ねじりによる断面変形を考慮した梁理論の定式化

図-1 に示すような長さ l の長さ方向に一様な任意形状断面の梁を解析対象とする。梁軸方向を x_1 、梁軸直角水平方向を x_2 、鉛直方向を x_3 とする正規直交座標系を設定する。解析対象の梁軸方向領域を $L = \{x_1 | 0 \leq x_1 \leq l\}$ 、断面の領域を A 、せん断中心を

x_2, x_3 の原点とする。

斉木・鄭²⁾ は任意形状断面の全断面領域において、せん断遅れに起因する軸方向変位と横せん断に起因する軸方向変位の両者を統合して断面変形の変位場を $f(x_2, x_3)$ と定義することを提案している。本論文ではこの変位場を参考に、そりねじりによる断面変形に起因する梁軸方向の変位場を $f_t(x_2, x_3)$ とすることを提案する。梁のねじり角を $\varphi(x_1)$ 、断面変形 f_t に対する一般化変位を $g_t(x_1)$ とすると、梁の変位場はそれぞれ

$$u_1 = f_t(x_2, x_3)g_t(x_1) \quad (1)$$

$$u_2 = -x_3\varphi(x_1) \quad (2)$$

$$u_3 = x_2\varphi(x_1) \quad (3)$$

と表すことができる。以上の変位場から導かれるひずみを仮想仕事式

$$\int_V \{E\epsilon_{11}\delta\epsilon_{11} + G(\gamma_{12}\delta\gamma_{12} + \gamma_{13}\delta\gamma_{13})\}dV = \int_{\partial V} \{t_1\delta u_1 + t_2\delta u_2 + t_3\delta u_3\}dA \quad (4)$$

に代入することにより、 g_t, φ に関する支配方程式

$$R_{t3}g_t' + K_t\varphi'' = 0 \quad (5)$$

$$-R_{t1}g_t'' + R_{t2}g_t + R_{t3}\varphi' = 0 \quad (6)$$

を得る。ここに、 $(\cdot)'$ は x_1 に関する導関数を表す。 K_t は合成断面のねじり剛性、 R_{ti} は断面変形に関するパラメータであり、

$$\begin{aligned} K_t &:= \int_A G \{(x_2)^2 + (x_3)^2\} dA, \\ R_{t1} &:= \int_A E f_t^2 dA, \\ R_{t2} &:= \int_A G \{(f_{t,2})^2 + (f_{t,3})^2\} dA, \\ R_{t3} &:= \int_A G (f_{t,3} x_2 - f_{t,2} x_3) dA \end{aligned} \quad (7)$$

と定義した。

3. 非均質断面梁による検証

(1) 問題設定

図-2 に示す非均質断面の梁を解析対象として、提案した梁理論の精度を検証する。ともに等方弾性体の材料とし、材料 1 の Young 率とせん断弾性係数を $E_1 = 200$ GPa, $G_1 = 100$ GPa とし、材料 2 の Young 率とせん断弾性係数を $E_2 = 20$ GPa, $G_2 = 10$ GPa とした。

代表体積要素は縦横 40 分割し、断面当たり、1,600 要

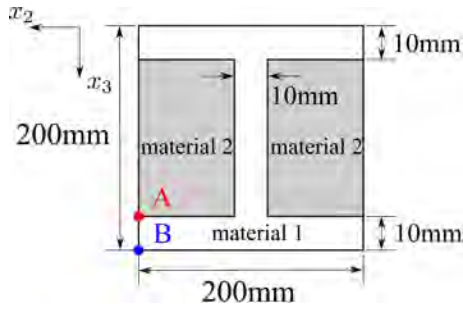


図-2 非均質断面

素の立方体形状の6面体1次アイソパラメトリック要素を用いてモデル化した。式(1)で定義される本提案梁理論で採用する変位場に必要断面変形モード f_i は、有限要素離散化した代表体積要素に単位の純ねじり変形を与えることで求める。このとき解析結果として得られる x_2, x_3 各点の軸方向変位が f_i である。式(7)に示すパラメタはこの f_i を用いて求める。なお、パラメタに含まれる f_i の偏導関数は、有限要素におけるひずみと同様の手順により要素内の物性評価点 (Gauss 点) で評価可能であり、面積分も Gauss 積分によって行った。

片持ち梁の境界値問題を考え、通常連続体ソリッド要素による数値解析結果を参照解とする。本提案手法による数値解を参照解と比較してその精度・妥当性を評価する。長さ $L = 1,000$ mm とし、自由端に強制ねじり角 $\varphi = 1.0$ rad を与えた。

比較対象としたソリッド要素によるモデルについて説明する。要素寸法は代表体積要素と同じく、縦横40分割し断面当たり1,600要素の立方体とした。固定端は断面内全ての節点を完全拘束し、ねじり角は u_1 を拘束せず、断面内全ての節点に断面のねじり角が1となるような x_2, x_3 方向の強制変位を与えた。

(2) 軸方向変位

図-2に示す点A(断面の端点)と点B(材料の変化点)における軸方向変位分布を図-3に示す。縦軸の軸方向変位は図-2に示す点Bにおける参照解の最大軸変位で無次元化している。横軸は x_1 座標である。固定端では断面のそりが拘束されているため軸方向変位は0だが、 $x_1 = 0$ から $x_1 = 250$ にかけて急激に軸方向変位が生じ、それ以降では一定の分布を示している。本手法の軸方向変位分布は参照解とほぼ一致している。また最大変位と相対差を表-1に示す。ここで L^2 ノルム相対差は、本手法による解 β_p と参照解 β_s との差の L^2

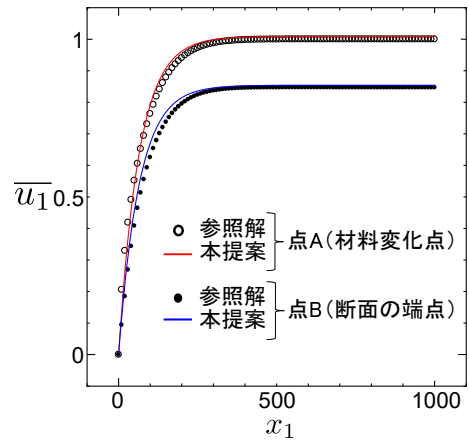


図-3 軸方向変位分布

表-1 軸方向変位の比較

	点 A	点 B
参照解の最大変位 (mm)	5.87	4.97
本手法の最大変位 (mm)	5.92	5.01
最大変位の相対差	8.50×10^{-3}	8.45×10^{-3}
L^2 ノルム相対差	1.76×10^{-2}	2.39×10^{-2}

ノルムを参照解の L^2 ノルムで無次元化し

$$\sqrt{\frac{\int_L (\beta_p - \beta_s)^2 dx_1}{\int_L (\beta_s)^2 dx_1}} \tag{8}$$

と定義した。最大変位の相対差は0.8%、 L^2 ノルム相対差は2%程度と定量的にも一致している。

4. おわりに

任意断面に適用可能なねじりによる断面変形を考慮可能な梁理論を構築した。提案した梁理論にはそりねじりによる断面変形モードを含む3つのパラメタが必要となるが、齊木・鄭²⁾の手法に基づき、均質化法を梁に適用した代表体積要素の数値解析によりこれらのパラメタを数値的に得る方法を具体的に示した。この方法により提案手法は任意断面に適用可能である。

非均質断面梁に対して本理論を適用し、連続体要素による数値解析結果を参照解とし、結果を比較した。その結果、軸方向変位が連続体要素による参照解と2%程度の差で一致することが確認できた。

参考文献

1) V.Z. ウラソフ, 奥村敏恵 (訳): 薄肉弾性ばりの理論, 技報堂, 1967.
 2) 齊木功, 鄭勲: せん断遅れと横せん断による断面変形を統一的に考慮した梁理論, 土木学会論文集 A2, Vol.77, No.1, pp.1-11, 2021.