非古典塑性モデルに対する新しい陰的応力更新アルゴリズムの構築

○東北大学工学部　学生員　永井 兼彰
東北大学大学院工学研究科　正　員　山田 正太郎
東北大学大学院工学研究科　正　員　京谷 孝史

１．はじめに

滑らかな弾塑性遷移を表現するために，下負荷面モデルが適用されることが多い．一方で，米田ら(2022)は, 動的問題において時間積分法に応力更新法を整合させることの重要性を主張しているが，下負荷面モデルでは負荷時と除荷時で正規降伏曲面に対する下負荷面の相似比の発展則が異なることに起因して, 同様な応力更新法を築くことができない. そこで，Morena et al. (2017)を参考に，相似比の発展則を必要としない非古典塑性モデルを提案するとともに, 同モデルに対する陰的応力更新アルゴリズムを構築する.

２．下降伏面モデル

本研究では，非古典弾塑性モデルとして下降伏面モデルを導入する．このモデルでは，図-1のように正規降伏面のほかに現応力点を通る下降伏面と，材料定数R^{e}により定まる弾性限界面を用意する．ここで，R^{e}は正規降伏面に対する弾性限界面の相似比である. また, 正規降伏面に対する下降伏面の相似比をRとする. 弾性限界面内では弾性変形を生じ, それよりも外側では塑性変形が生じる．正規降伏面に対する下降伏面の相似比に応じて塑性変形の程度が決まり, 下負荷面が正規降伏面に一致した状態では, 正規の塑性変形が生じる．これらの特徴は下負荷面モデルと同じであるが，後述する通り相似比の発展則を必要としない点で下負荷面と異なる.

下降伏関数を式(1)のように定義する.

$$F_{\mathrm{sub}}(\boldsymbol{\sigma},H,R) = f(\boldsymbol{\sigma}) - R^{s} f_{y}(H) = 0 \qquad (1)$$

ここで，f_yは硬化関数であり，Hは硬化変数である. また，fは応力$\boldsymbol{\sigma}$のs次の同次関数である.

塑性流れ則および硬化変数を式(2)と(3)に示すようにそれぞれ規定する.

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}} = \dot{\gamma}\frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}},\quad \dot{\gamma} = \dot{\gamma}\big|_{R}\, r^{m},\quad r = \frac{\left\langle R - R^{\mathrm{e}}\right\rangle}{1 - R^{\mathrm{e}}} \qquad (2)$$

$$\dot{H} = \dot{\gamma} h\left(H\right) \qquad (3)$$

ここで，$\dot{\gamma}$は塑性乗数であり，$\dot{\gamma}|_R$は下降伏面を正規降伏面と仮定したときの塑性乗数である．$\dot{\gamma}|_R$にr^mを乗じることで，Rの大きさに応じて塑性変形を抑制する．mは塑性変形の抑制程度を制御するための材料定数である．このようにモデル化することにより，Rの発展則を規定することなく速度型弾塑性構成則を求めることができる.

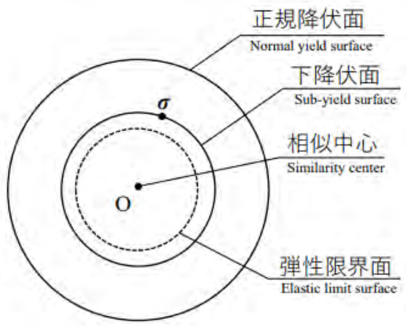


図-1　降伏面

３．陰的応力更新アルゴリズム

まず, 準静的問題に対する応力更新法を考える. 一般の弾塑性構成則と同様に応力更新方法が試行弾性計算と塑性修正計算に分けて考える．さらに塑性修正計算を二段階に分ける．一段階目ではRを一定とし，下降伏面を正規降伏面と考えて疑似的な応力更新を行うことで$\dot{\gamma}|_R$を得る．二段階目では$\dot{\gamma} = \dot{\gamma}|_R\, r^m$とするとともに，$R$を未知数として真の応力更新を行う.

次に動的問題に対する応力更新法を考える．動的解析スキーム（ここでは台形公式を用いる場合を考える）へ応力更新法を整合させるために，ある関数$A(t)$について，式(4)で表される台形公式を式(5)のように前進 Euler と後退 Euler に分解する.

Key words: 弾塑性，非古典塑性論，有限要素法
〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06, TEL 022-795-7489

$$A_{n+1} = A_n + \frac{\Delta t}{2}\left(\dot{A}_n + \dot{A}_{n+1}\right) \tag{4}$$

$$\begin{cases} A_{n+1/2} = A_n + \dfrac{\Delta t}{2}\dot{A}_n \\ A_{n+1} = A_{n+1/2} + \dfrac{\Delta t}{2}\dot{A}_{n+1} \end{cases} \tag{5}$$

式(5)に従い $n+1/2$ ステップにおける履歴変数の値を陽的に計算した上で，残り1/2ステップを準静的問題と同様な方法で陰的に応力更新を行う．この際，下負荷面モデルでは，R が上記更新の対象となり，負荷時と除荷時で R の発展則が異なるために数値的な困難が生じ得るが，下降伏面モデルでは R を履歴変数として扱う必要がないため，この課題を克服することができる．

４．解析手法

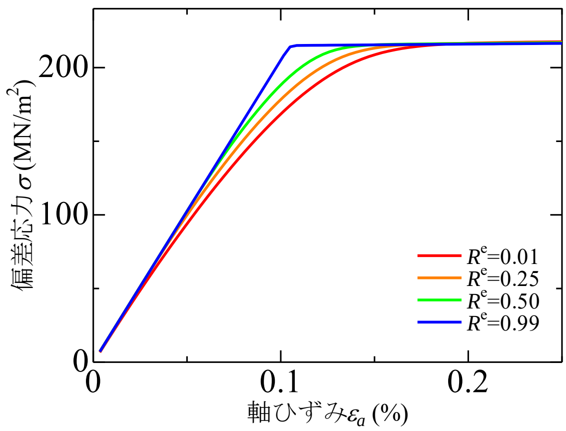
提案モデルを準静的な有限要素解析コードに実装し，1 要素での解析を行い，提案モデルの妥当性を検証する．Mises の降伏基準に，線形硬化と関連流れ測を適用した．弾性成分には Hooke 則を用いた．モデルに一軸引張り状態になるように一方向に強制変位を与え，一様変形させた際の応力-ひずみ関係を確認する．表-1 に示す値を基本の材料定数とした．モデルの性能を確認するために，R^e を 4 通りに変化させた場合を Case 1，を 4 通りに変化させた場合を Case 2 とする．

表-1　材料定数（基本）

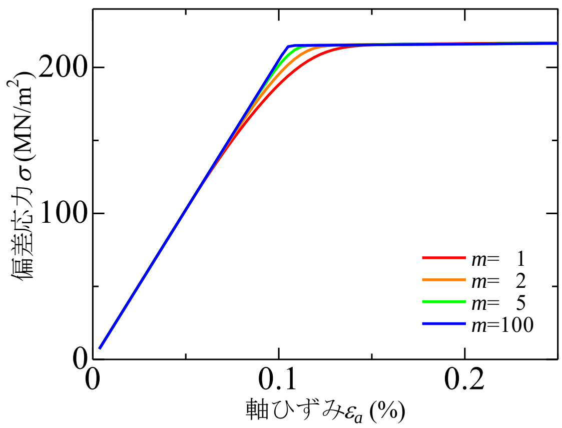
ラメ定数　λ [GPa]	118
ラメ定数　κ [GPa]	79
初期降伏応力　q_{y0} [MPa]	215
硬化係数　η [GPa]	1
弾性限界定数　R^e	0.5
塑性遷移指数　m	1

５．数値解析結果

図- 2 に応力-ひずみ関係を示す．応力-ひずみ関係が滑らかに表現できていることが確認できる．前述の通り，R^e は正規降伏面に対する弾性限界面の相似比であり，Case 1 の結果より R^e が大きいほど塑性変形が生じ始める応力が大きくなることが分かる．また，m は塑性変形の抑制程度を制御するための材料定数であり，Case 2 の結果より m が大きいほど緩やかに正規降伏状態に漸近してゆくことが分かる．



Case 1 (R^e の効果)



Case 2 (m の効果)

図- 2　応力-ひずみ関係

６．結論

本研究では，正規降伏曲面に対する下負荷面の相似比の発展則を必要としない非古典塑性モデルの開発および同モデルに対する陰的応力更新アルゴリズムの構築をした．また，それらを有限要素解析コードに実装し解析を行った．動的解析の結果については，発表の際に口頭で述べる．

参考文献

米田　玄徳，山田正太郎，京谷孝史 (2022): 動的問題における陰的 Runge-Kutta 法による時間積分法の構築および検証，計算工学講演会概要集, B-07-03.

Morena, G.D.L., Asensio, L., Yustres, Á., Navarro V. (2017): A simple procedure to simulate a smooth elastic-plastic transition in Cam-Clay models, Computers and Geotechnics, 90, 27-33.