

隠れ損傷理論の提案

○東北大学工学部 学生会員 工藤 大介
 東北大学大学院工学研究科 正会員 山田 正太郎
 東北大学大学院工学研究科 正会員 京谷 孝史

1. はじめに

ゴムなどの高分子材料に繰り返し負荷を与えると Mullins 効果¹⁾と称される材料の損傷に起因する応力や剛性の低下が生じる。既存の損傷モデルでは、除荷・再載荷時の応答を調整すると、処女載荷時の応答が変化するために、パラメータの決定が難しいという課題がある。本研究では、パラメータ決定を容易にするために、処女載荷時の応答に影響を与えることなく、除荷・再載荷時の応答を調整可能な新たな損傷モデルを提案する。また、同モデルを組み込んだ有限変形理論に基づく有限要素解析コードを用いて行った、ゴムの損傷に関する数値解析例を提示する。

2. 材料モデル

ゴム材料は、変形する際に体積変化をほぼ生じないことが知られている。そこで、非圧縮性を近似するために、ひずみエネルギー関数 $\Psi(\mathbf{C})$ を等容変形成分 $\hat{\Psi}(\hat{\mathbf{C}})$ と体積変化成分 $U(J)$ の和に分解する。

$$\Psi(\mathbf{C}) = \hat{\Psi}(\hat{\mathbf{C}}) + U(J); \quad \hat{\mathbf{C}} = J^{-2/3} \mathbf{C} \quad (1)$$

ここで、変形勾配テンソルを \mathbf{F} として、 $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$ 、 $J = \det \mathbf{F}$ である。

本研究では損傷を考慮するために、 $\hat{\Psi}(\hat{\mathbf{C}})$ に履歴変数 α を加えた次式の関数を定義する。

$$\hat{\Psi}(\hat{\mathbf{C}}, \alpha) = (1-e)\hat{\Psi}_0(\hat{\mathbf{C}}) + e \frac{(\hat{\Psi}_0(\hat{\mathbf{C}}))^{s+1}}{(s+1)\alpha^s} \quad (2)$$

ここで、 $\hat{\Psi}_0(\hat{\mathbf{C}})$ は損傷を考慮しない基本モデルのひずみエネルギー関数、 s と e は材料定数である。 α は現在までの $\hat{\Psi}_0(\hat{\mathbf{C}})$ の最大値であり、 $\hat{\mathbf{C}}$ 空間に描かれる損傷曲面の大きさを表す。なお、損傷は等容変形成分のみに影響を与えると仮定する。

等容変形に起因する Second Piola-Kirchhoff 応力 \mathbf{S}' と接線係数 $\hat{\mathbf{C}}$ は以下のように表される。

$$\mathbf{S}' = \gamma_1 \mathbf{S}'_0; \quad \mathbf{S}'_0 = 2 \frac{\partial \Psi_0(\hat{\mathbf{C}})}{\partial \mathbf{C}} \quad (3)$$

$$\hat{\mathbf{C}} = \begin{cases} \gamma_1 \hat{\mathbf{C}}_0 + \gamma_2 \mathbf{S}'_0 \otimes \mathbf{S}' & (\dot{\alpha} > 0) \\ \gamma_1 \hat{\mathbf{C}}_0 & (\dot{\alpha} = 0) \end{cases}; \quad \hat{\mathbf{C}}_0 = 4 \frac{\partial^2 \hat{\Psi}_0}{\partial \mathbf{C} \partial \mathbf{C}} \quad (4)$$

ここで、 $\dot{\alpha} > 0$ は損傷進展時を表す。また、

$$\gamma_1 = 1 - e \left[1 - \frac{(\hat{\Psi}_0)^s}{\alpha^s} \right]; \quad \gamma_2 = e s \frac{(\hat{\Psi}_0)^{s-1}}{\alpha^s} \quad (5)$$

である。

損傷進展時は $\alpha = \Psi_0$ より、 $\mathbf{S}' = \mathbf{S}'_0$ である。つまり処女載荷中は損傷が進展しつつも応答は基本モデルと同じである。一方、損傷非進展時は $\alpha \leq \Psi_0$ より、 $\mathbf{S}' \leq \mathbf{S}'_0$ である。つまり、除荷・再載荷中はそれまでに受けた損傷の影響により、応力は基本モデルよりも低下する。このような性質から、処女載荷曲線を元に基本モデルの材料定数を決定した後に、除荷・再載荷曲線を元に損傷に関する材料定数 s と e を決定することができる。このように、式(2)で示すようにひずみエネルギー関数を定義すると、処女載荷曲線に陽には損傷の影響が現れないことから、このモデルを隠れ損傷モデルと称することにする。

3. 数値解析例

基本モデルとして以下に示す3次の微圧縮性 Neo-Hookean モデルを用いた。

$$\hat{\Psi}(\hat{\mathbf{C}}) = \frac{1}{2} \mu (\text{tr}(\hat{\mathbf{C}}) - 3); \quad U(J) = \kappa (J - 1)^2 / 2 \quad (6)$$

ただし、 μ は材料定数であり、 κ はペナルティ係数である。

有限要素解析を行うにあたり、一次のアイソパラメトリック要素を用いた。この時、非圧縮に近い条件で解析を行うと体積ロッキングが生じることが知られている。これを回避するために Hu-Washizu の変分原理に基づく平均体積ひずみ法を用いた。

次に、解析対象とするモデルと境界条件を図1に示す。立方体要素を用い、供試体を単軸で引っ張る場合を想定して境界条件を与えた。

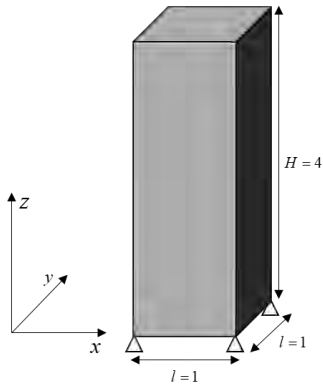


図1 解析モデル

解析対象を1つの要素とみなし、軸公称応力 P と軸ストレッチ λ を次式により算出した。

$$P = F/A \quad (7)$$

$$\lambda = h/H \quad (8)$$

ここで、 F は解析モデル上面における z 方向の節点反力の和、 A は上面の初期断面積、 H と h はそれぞれ供試体の初期と現在の高さである。

ゴム材料を想定して、材料定数を表1に示すように与えた。

表1 材料定数（基本）

材料定数	値
せん断弾性係数 μ	$1.5 \times 10^3 \text{ kN/m}^2$
非圧縮性パラメータ κ	10^4 N/m^2
履歴曲線制御係数 e	0.8
履歴曲線制御指数 s	10

$\lambda=1.5$ まで強制変位を与えた後に一旦除荷し、その後 $\lambda=1.75$ まで変位させた後に再び除荷した。図2に载荷を行った際の挙動を示す。図中には基本モデルの载荷曲線も破線で示した。除荷・再载荷曲線の応力は処女载荷曲線の応力を下回っており、Mullins 効果が再現できている。また、処女载荷時は基本モデルと同じ応答をしていることが確認できる。

次に、 $\lambda=1.75$ まで強制変位を与えた後に一旦除荷する計算を損傷に関する材料定数 s と e を変化させて行った。図3に履歴曲線制御係数 e のみを変えた载荷曲線、図4に履歴制御指数 s のみを変えた载荷曲線を示す。パラメータを変えることで、処女载荷曲線は変えずに除荷・再载荷曲線のみを動かせること

が分かる。この性質より、処女载荷曲線を元に基本モデルの材料定数を決めてから、除荷・再载荷曲線を元に損傷に関する材料定数を定めることが可能である。

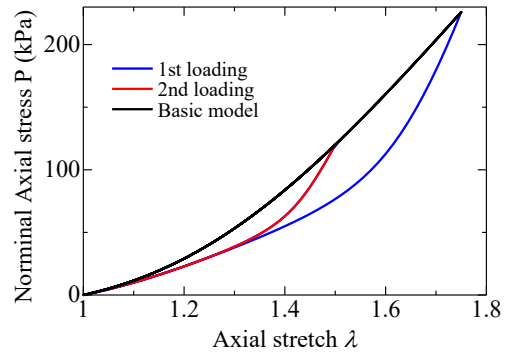


図2 解析結果

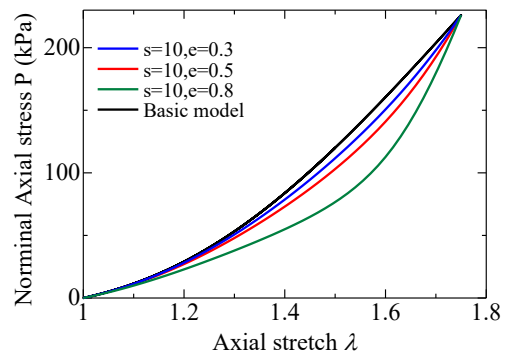


図3 eのみを変えた载荷曲線

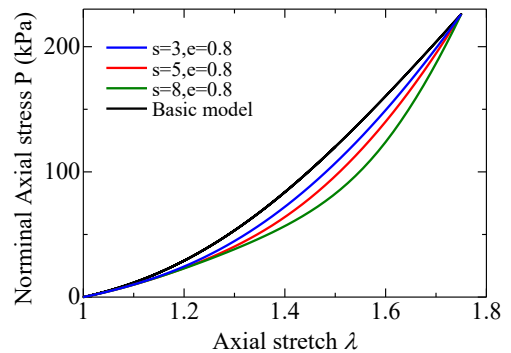


図4 sのみを変えた载荷曲線

5. 結論

本研究では、パラメータを容易に決定することができる損傷モデルを新たに提案した。そのモデルを使った数値解析により、処女载荷時は基本モデルと同じ応答をすることが確認できた。今後は、実際のゴムで試験を行いパラメータの決定を行いたい。

参考文献

- 1) Mullins, L (1947): Effect of stretching on the properties of rubber, *Journal of Rubber Research*, 16,275-289.