

不連続き裂面を有する勾配損傷モデルの動的破壊問題への拡張

○東北大学工学部建築・社会環境工学科	学生会員	平山 大悟
東北大学大学院工学研究科土木工学専攻	学生会員	韓 霽珂
東北大学災害科学国際研究所	正会員	森口 周二
東北大学災害科学国際研究所	正会員	寺田 賢二郎

1. 序論

有限要素法を用いたき裂の発生・進展およびその分岐現象の数値解析を実現するために、様々な研究が行われてきたが、任意き裂の発生および進展・分岐現象までを記述可能な非局所連続体損傷モデルの1つである「Phase-field き裂モデル¹⁾」が注目を集めている。先行研究²⁾では、Phase-field き裂モデルに有限被覆法 (FCM) を適用することで、き裂進展経路は変分原理に基づくエネルギー最小化問題として求解し、進展した陰的き裂はFCMによって陽的に表現することを実現した。本研究では、材料における亀裂の発生から分離後の運動までを一貫して解析を行うため、先行研究に対してNewmark β 法を適用し時間離散化を行うことで、動的破壊問題へと拡張を行う。

2. 解析手法

2.1 Phase-field き裂モデル

Phase-field き裂モデルでは、Phase-field 近似を用いて拡散き裂を表す汎関数を定義することで、連続体内部における離散的なき裂面を近似的に表すことが可能となる。スカラー変数であるPhase-field 変数 d が材料の損傷状態を表す損傷変数として用いられ、 $d = 0$ において非損傷状態、 $d = 1$ において完全損傷状態とし、 $0 < d < 1$ はそれらの状態をつなぐ遷移領域とする。本研究で用いるAT2モデルの場合、拡散き裂は以下のような指数関数形で与えられる。

$$d(x) = \exp\left(\frac{-|x|}{l_f}\right) \quad (1)$$

ここで、 l_f は拡散き裂の幅を表す正規化パラメータである。

弾性ひずみエネルギー密度と損傷エネルギー密度をそれぞれ Ψ^e , Ψ^f とし、エネルギー密度関数を次式のように定義する。

$$\Psi = \Psi^e(\mathbf{F}, d) + \Psi^f(d, \nabla d) \quad (2)$$

ここで、 \mathbf{F} は変形勾配であり、初期および現在配置の位置ベクトル \mathbf{X} および \mathbf{x} を用いて、 $\mathbf{F} := \partial\mathbf{x}/\partial\mathbf{X}$ と定義する。変形及び損傷の支配方程式は、適当な外力エネルギー項および運動エネルギー項を考慮した次のエネルギー変化率のつり合い式から得られる。

$$\int_{\mathcal{B}_0} \dot{\Psi} dV + \int_{\mathcal{B}_0} \rho_0 \dot{\mathbf{u}} \cdot \dot{\mathbf{u}} dV = \int_{\mathcal{B}_0} \mathbf{B} \cdot \dot{\mathbf{u}} dV + \int_{\partial\mathcal{B}_0} \mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{u}} dA \quad (3)$$

ここで、 \mathbf{B} および \mathbf{T} は連続体に作用する物体力と平面力ベクトルである。

2.2 有限被覆法による空間離散化

有限被覆法 (FCM)³⁾ では、計算の対象領域の補間関数を定義する数学的領域 (数学被覆) と物理量を定義する物理領域 (物理被覆) の2つに分けて考える。これにより、有限要素の形状とは無関係に、き裂や異種材料の任意の不連続性を表現することが可能となる。

有限被覆法における空間離散化は、形式的には一般的な有限要素法と同様であり、式(3)から変位場および損傷場の残差力ベクトル \mathcal{R}_u^I , \mathcal{R}_d^I は次式のように与えられる。

$$\mathcal{R}_u^I = - \int_{\mathcal{B}_0^e} \left(P_{ia}^h \frac{\partial N^I}{\partial X_a} - B_i^h N^I + \rho \ddot{u}_i^h N^I \right) dV \quad (4)$$

$$\mathcal{R}_d^I = - \int_{\mathcal{B}_0^e} \left(- \frac{\partial g(d^h)}{\partial d} \Psi_0^{e+h} N^I - \frac{G_c}{l_f} \left(d^h N^I + l_f^2 \frac{\partial d^h}{\partial X_a} \frac{\partial N^I}{\partial X_a} \right) \right) dV \quad (5)$$

ここで、 N^I は形状関数であり、 ρ , $g(d)$, G_c は連続体の質量密度、強度低減関数、破壊エネルギーである。なお、本研究では表面力は考慮しない。

2.3 Newmark β 法を用いた時間離散化

Newmark β 法は線形加速度法の拡張手法であり、変位の2次、3次のTaylor展開により得られた式を任意の2つのパラメータ β, γ により近似した式を用いて、動的問題として取り扱う手法である。時間離散化された変位 \mathbf{u} , 速度 $\dot{\mathbf{u}}$, 加速度 $\ddot{\mathbf{u}}$ の関係は次式のように与えられ、式(4)の加速度が時間離散化される。

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \Delta t \dot{\mathbf{u}}_n + \frac{\Delta t^2}{2} [(1 - 2\beta) \ddot{\mathbf{u}}_n + 2\beta \ddot{\mathbf{u}}_{n+1}] \quad (6)$$

$$\dot{\mathbf{u}}_{n+1} = \dot{\mathbf{u}}_n + \Delta t [(1 - \gamma) \ddot{\mathbf{u}}_n + \gamma \ddot{\mathbf{u}}_{n+1}]$$

3. 数値計算例

本研究ではPhase-field き裂モデルによる損傷を考慮し、き裂の予測経路に沿って離散き裂を生成させるが、本稿においては動的問題における有用性の検証のため、有限被覆法により予め設定した面で部材を分離し、それに伴うエネルギー保存を検証する。

文献⁴⁾と同じ形状・材料定数を使用し、図-1に示す96要素二次元モデルを対象として動的解析を行う。ここで、全節点に対して初速 $\dot{\mathbf{u}}(x_1, x_2)|_{t=0} = \left[v_0 \frac{x_2}{h}, 0 \right] \text{m/s}$, $v_0 = 0.2 \text{m/s}$ を与える。また、時間 $t = 100 \text{s}$ において $x_2 = 3.125 \text{m}$, $t = 200 \text{s}$ において $x_2 = 4.625 \text{m}$, $t = 300 \text{s}$ において $x_2 = 1.125 \text{m}$

Key Words: 連続体損傷モデル, 有限被覆法, 動的破壊問題, き裂進展問題

〒980-8572 仙台市青葉区荒巻字青葉 468-1 災害科学国際研究所 4F S403-S404, TEL 022-752-2132, FAX 022-752-2133

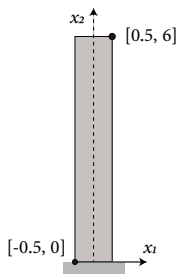


図-1 形状・境界条件とメッシュ

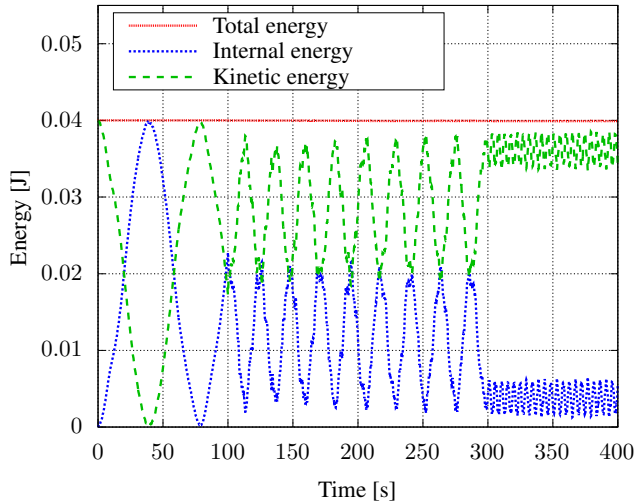


図-2 各エネルギーの時間変化

の地点で水平にき裂を発生させ、物体を分離させる。したがって物体は運動の過程で2つおよび3つの部材として運動することとなる。なお、物体力および空気抵抗・損傷は考慮しないものとする。

時間と内部エネルギー、運動エネルギー、エネルギーの総和の関係を図-2に、物体の挙動の履歴を図-3にそれぞれ示す。図-2より、はじめは内部エネルギーと運動エネルギーはおおよそ逆位相の変化挙動を示しているが、部材分離を経るごとに周期の短い波になることがわかる。また、この図より、拘束を失った個々の部材は回転しながら初期位置から離れていく様子が確認できる。本計算例においては、損傷によるエネルギー散逸は考慮されていないため、エネルギー保存が成立するが、図-2より、エネルギーの総和は物体の運動状態に関わらず全体を通して保存されていることが確認できる。

4. 結論

本研究では、任意の拡散き裂を表現する Phase-field き裂モデルに有限被覆法を適用した離散き裂によるき裂進展問題の解析手法について、動的解析問題へと拡張を行なった。具体的には、運動エネルギーを含めたエネルギーのつり合い式から、変位場と損傷場の支配方程式を導出し、有限被覆法による空間離散化を行ない、Newmark β 法を用いて時間離散化をすることにより、動的破壊問題への適用を行なった。また、本手法の性能を確認するため、有限被覆法によ

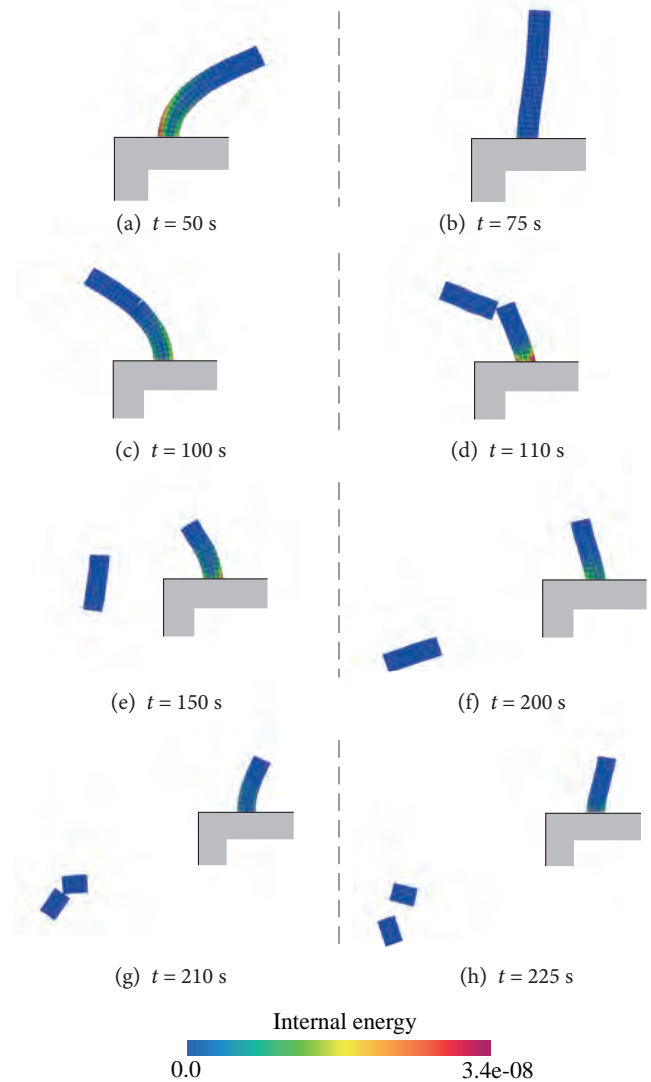


図-3 変形履歴

る離散型き裂を含む動的問題の解析を実施した。結果として、離散型き裂の発生時におけるエネルギーが保存されることを確認し、動的問題における有用性を確認した。

参考文献

- 1) Miehe, C., Welschinger, F. and Hofacker, M.: Thermodynamically consistent phase-field models of fracture: Variational principles and multi-field FE implementations, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 83, No. 10, pp. 1273–1311, 2010.
- 2) Han, J., Shintaku, Y., Moriguchi, S. and Terada, K.: A transition scheme from diffusive to discrete crack topologies at finite strain during the course of a staggered iterative procedure, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2022.
- 3) Terada, K., Asai, M. and Yamagishi, M.: Finite cover method for linear and non-linear analyses of heterogeneous solids, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 58, No. 9, pp. 1321–1346, 2003.
- 4) Bonet, J., Gil, A. J. and Wood, R. D.: *Nonlinear Solid Mechanics for Finite Element Analysis: Dynamics*, Cambridge University Press, 2021.