東北のコンクリート構造物の施工事例に基づく温度ひび割れ指数とひび割れ発生確率

東北学院大学　学生会員　○有賀颯太朗
東北学院大学　菊池　幸
東北学院大学　正会員　石川　雅美
東北学院大学　神永　正博

1　背景と目的

土木学会コンクリート標準示方書[1]（以下、示方書）では、コンクリート構造物に生じるひび割れの発生確率を、ワイブルの累積分布関数を用いて表している。このひび割れ発生確率は、ひび割れ指数 *Icr*（コンクリートの引張強度／温度応力）と関連付けられ、以下の式から求めることができる。

$$F(x) = 1 - exp\left[-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^m\right] \qquad (1)$$

ここで、示方書では *x=Icr*：ひび割れ指数，*F(x)=P(Icr)*：ひび割れ発生確率，m=－4.29，α =0.92 としている。ワイブルの累積分布関数を記述する２つのパラメータ m と α はそれぞれ、尺度パラメータおよび形状パラメータと呼ばれ、金津ら[2]が 728 のコンクリート部材を対象としたひび割れの調査結果を基に、最小二乗法により定めたものである。それゆえ、これらのパラメータはワイブル分布の特性上、”いわゆるカーブフィッティングにより定められた”値であり、物理的な意味を持つものではない。

本論は、コンクリートのひび割れという、強度と作用応力に起因する現象を、より理論的に論じることを目的として、ワイブル分布で表示されているひび割れ発生確率を正規分布により表すことを試みたものである。正規分布は、平均値と標準偏差（あるいは変動係数）という物理的な意味合いを持つパラメータで記述されており、コンクリートの圧縮強度も、正規分布に従うことを前提に品質管理がなされている。したがって、ひび割れ発生確率を正規分布により表すことにより、コンクリートの強度管理実績値として得られる平均値や変動係数などから、その理論的な解釈が可能になると考える。

2　正規分布に基づくひび割れ発生確率

ひび割れ指数を求める際のコンクリートの引張強度は、圧縮強度と同様に正規分布をなすものと仮定する。また、作用側である温度応力も正規分布に従うものとする。いま、図-1 に示すように、抵抗側である引張強度の分布を ***R***、作用側である温度応力の分布を ***S*** とすると、斜線で示す重なった部分の面積がひび割れ発生確率となる。***R*** 側および ***S*** 側の正規分布はそれぞれ次式で表される。

$$f_R(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_R} e^{-\frac{(Z-\mu_R)^2}{2{\sigma_R}^2}} \qquad (2)$$

$$f_S(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_S} e^{-\frac{(Z-\mu_S)^2}{2{\sigma_S}^2}} \qquad (3)$$

ここで、μ_S, μ_Rは作用側および抵抗側の平均値、また、σ_S, σ_Rは作用側および抵抗側の標準偏差である。*Z*はひび割れ指数 *Icr* となる。一般にこれら２つの正規分布の重なり（差分）も以下の正規分布に従うものとされている[3]。

$$N(\mu_z, \sigma_z) = N(\mu_R - \mu_S, \sqrt{{\sigma_R}^2 \mp {\sigma_{RS}}^2}) \qquad (4)$$

さらに、ひび割れ発生確率となる累積分布関数は、以下の式より計算される。

$$P_f(Z \le 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_Z} \int_{-\infty}^{0} \left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{z-\mu_Z}{\sigma_Z}\right)^2\right\} dz \qquad (5)$$

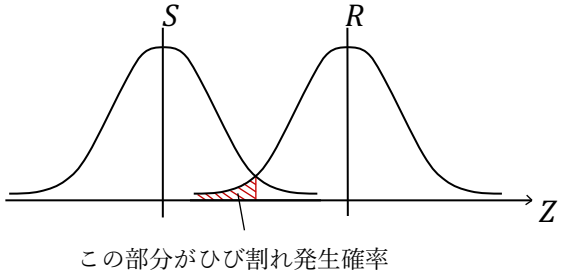

図-1 正規分布に基づくひび割れ発生確率

3　正規分布を基にしたひび割れ発生確率

一般に、正規分布は平均値 μ と標準偏差 σ によって記述される。しかしながらここでは、コンクリートの強度管理においては平均値 μ と変動係数 V が用いられていることから、変動係数 V をパラメータとして議論する。

図-2 にワイブルに基づく示方書のひび割れ確率曲線と正規分布の累積関数として表した３つの曲線を示す。正規分布の３つの累積曲線はそれぞれ、V_R =0.1, 0.2, 0.3 とした場合である。また、作用応力の変動係数 V_S＝0.1 は一定とした。ここでの作用応力の変動係数 V_S とは、温度応力解析における解析結果のばらつき[4]を意味する。この図より、ひび割れ指数 1 が以下の範囲では示方書の式と、V_R =0.2，V_s =0.1 とした正規分布の曲線がよく一致していることがわかる。したがって、この 1 以下の範囲の示方書の式は、引張強度の変動係数が 0.2 程度、温度応力の変動係数が 0.1 程度となっていることが確認できる。一方、1 を超える範囲では V_R =0.3 の曲線が対応している。

4　ワイブル分布に対する近似

次に東北構造物のひび割れ調査結果を基に、増井ら[5]が提案したひび割れ発生確率図に対して検討する。増井らは, 東北地方で施工された 46 の構造物の 172 のリフトにおけるひび割れ調査結果をもとに,

3 次元の温度応力解析を行い，ひび割れ指数とひび割れ発生確率の関係を整理した。図-3 に示す赤の丸印は増井らの収集データのプロットであり、赤の曲線がプロットデータに対するワイブル分布による近似である。同図の黒の曲線が示方書のひび割れ発生確率である。

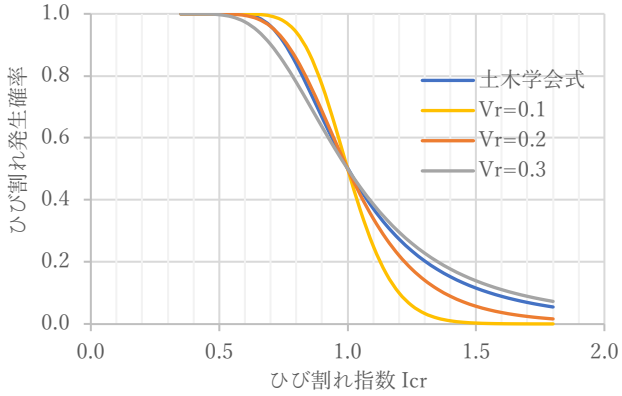

図-2　示方書の確率図と正規分布の累積曲線

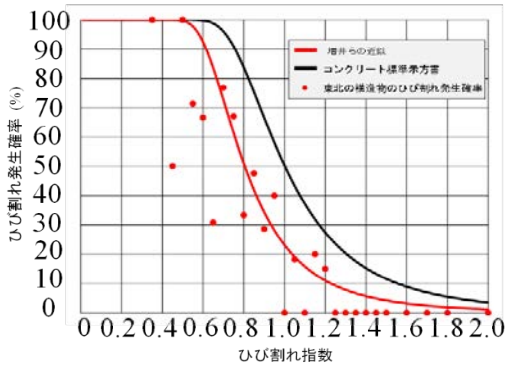

図-3 示方書と増井らのひび割れ発生確率の比較

示方書の曲線は、ひび割れ指数が 1 のとき、ひび割れ発生確率が 50%となるのに対して、増井らのひび割れ確率（図-3 の赤の曲線）は、ひび割れ指数が 1 のときにひび割れ発生確率が 23%を通る。このようにひび割れ指数が 1 で、ひび割れ発生確率が 50%とならないような累積分布関数については、正規分布で表すことができない。そこで、式(6)に示す引張強度に対する修正係数 [6]を導入する。この修正係数の物理的な意味としては、強度管理に使用される供試体の強度と実際の構造物中の強度が多少異なることを調整する係数であると解釈できる。

$$\mu_R = \rho_R f_t \qquad (6)$$

ここで、μ_R：作用側の平均値、ρ_R：引張強度に対する修正係数（式(4)の計算に用いる）、f_t：引張強度の平均値であり、ひび割れ指数 Icr の計算に用いる。

修正係数ρ_R=1.15 として、正規分布の累積関数を計算すると、正規分布の累積曲線は左側にシフトして、ひび割れ指数が 1 のとき、増井の曲線と同様にひび割れ発生確率が 23%の値を得る。このように修正係数を用いることで、正規分布の確率曲線と増井の曲線を比較することができる。

図-3 は増井の曲線と、引張強度の変動係 V_R=0.1，0.2，0.3、温度応力の変動係数 V_s =0.1 として正規分布に基づく式(5)より算出した累積分布曲線との比較である。なお青の増井の曲線は、Vr=0.2 のオレンジの曲線と完全に重なっている。実はこの 2 つの曲線が一致するように強度の修正係数を調整している。図-5 は、その修正係数のひび割れ指数に伴う変化を示したものである。

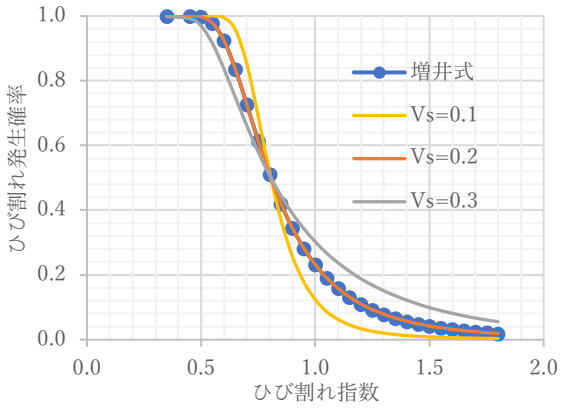

図-4　正規分布を仮定したひび割れ発生確率図

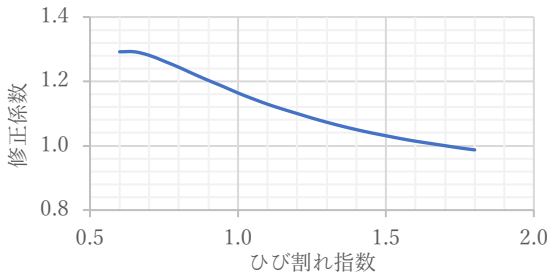

図-5 引張強度の修正係数

5　まとめ

本研究では、コンクリートの施工過程で生じるひび割れを、平均値や変動係数という物理的な意味合いを持たせた正規分布を介して関連付けることができた。また、修正係数を用いることで、ひび割れ指数が 1 のとき、ひび割れ発生確率が 50%とならない場合についても、正規分布の累積関数で表しうることを示した。修正係数物理的な解釈については今後さらに検討したいと考えている。

参考文献
1)　土木学会：コンクリート標準示方書[設計編：本編]2017 年制，pp.322-327，2018
2) 金津 努・溝渕 利明・佐藤 良一・十河 茂幸：3 次元 FEM に基づく温度ひび割れ発生確率分布の提案，コンクリート工学年次論文集，Vol.31，No.1，pp.1549-1554，2009
3)中村秀明ほか：材料の不確定性を考慮したマスコンクリートのひび割れ発生確率、土木学会論文集 No.514/V-27,29-40,1995.5
4)M. Ishikawa, M. Yurugi:Study on Thermal Cracks of Concrete Structures Base upon Probability Theory, JCI-RILEM International Workshop on “Control of Cracking of Mass Concrete and Related Issues Concerning Early Age Cracking of Concrete Structures” CONCRACK 5) 2017.4
5)増井優哉、石川雅美：東北の構造物を対象とした初期ひび割れ発生確率図の提案、土木学会東北支部技術研究発表会、V-27，2020.3
6)杉橋直行：温度ひび割れの照査方法の変遷から見た現状の課題とその改善方法に関する研究、東京大学博士論文