

変形勾配の乗算分解理論に基づく等方性 Cam-clay model の再構築

○東北大学工学部 学生会員 阿部 悠太  
 東北大学大学院工学研究科 正会員 山田 正太郎  
 東北大学大学院工学研究科 正会員 京谷 孝史

1. はじめに

有限変形弾塑性理論の枠組みにおいて変形勾配の乗算分解と超弾性構成則を用いた Cam-clay model の定式化が行われているが<sup>1),2)</sup>、これらの先駆的な取り組みでは中間配置に生じる体積変化が十分に考慮されていない。このことに起因して、先行研究における定式化では、Cam-clay model の導出において重要な役割を果たす状態境界面の存在を保証できない。

そこで本研究では 塑性散逸の非負性から導出される zeta 応力および Eshelby-zeta 応力<sup>3)</sup>を用いて、状態境界面の存在を説明可能な等方性 Cam-clay model の構築を行った。また構築したモデルを実装した有限要素解析コードによる数値解析を行い、計算例を示すことで構築したモデルの妥当性の検証を行った。

2. 有限変形理論に基づく等方性 Cam-clay model の定式化

本研究では変形勾配の乗算分解に基づく有限変形弾塑性理論の枠組みにおいて定式化を行う。次式に示すように変形勾配  $F$  を弾性成分  $F^e$  と塑性成分  $F^p$  へ乗算分解する。

$$F = F^e F^p \tag{1}$$

また超弾性構成則を用いた定式化を行うため、Houlsby らによって提案された超弾性モデル<sup>4)</sup>を使用し、以下のような中間配置を参照するひずみエネルギー関数  $\bar{\Psi}$  を与える。

$$\bar{\Psi} = \tilde{\kappa}^* p_r \exp \left[ \frac{1}{\tilde{\kappa}^*} \left( \varepsilon_v^e + \frac{3}{2} \tilde{\mu} (\varepsilon_s^e)^2 \right) \right] \tag{2}$$

本研究では 塑性散逸の非負性を満足するように塑性流れ則および超弾性構成則を以下のように定義する。

$$\zeta = 2 \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \mathbf{b}^e} \mathbf{b}^e \tag{3}$$

$$l^p = \dot{\gamma} \frac{\partial g}{\partial \xi} \tag{4}$$

ここで  $\zeta$  は zeta 応力,  $\xi$  は Eshelby-zeta 応力と呼ばれ, Cauchy 応力  $\sigma$ , 弾性体積変化  $J^e = \det F^e$  および中間配置を参照するひずみエネルギー関数  $\bar{\Psi}$  を用いて次式のように定義される。

$$\zeta = J^e \sigma \tag{5}$$

$$\xi = \zeta - \bar{\Psi} I \tag{6}$$

式 (2) より図-1 に示すように  $\ln v - \ln p^\xi$  平面上で膨潤線は直線となる。この平面で正規圧密線が直線となるように等方硬化則を式 (7) のように与える。

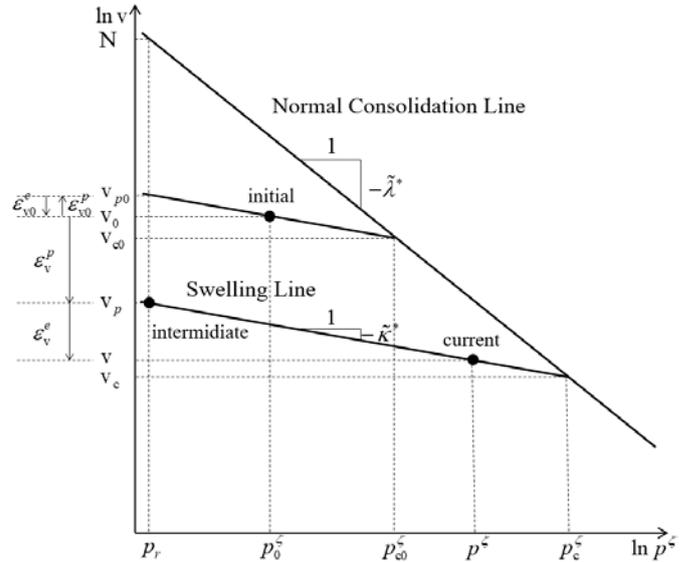


図-1  $\ln v - \ln p^\xi$  関係での正規圧密線および膨潤線

$$p_c^\xi = p_{c0}^\xi \exp \left[ \theta^* (\varepsilon_v^p - \varepsilon_{v0}^p) \right] \tag{7}$$

ただし  $\theta^*$  は膨潤指数  $\tilde{\kappa}^*$  と圧縮指数  $\tilde{\lambda}^*$  から求まるパラメータである。

降伏関数は修正 Cam-clay model の降伏関数を用いる。

$$f(\xi, p_c^\xi) = \frac{p^\xi (M^\xi)^2 + (\eta^\xi)^2}{p_r (M^\xi)^2} - \frac{p_c^\xi}{p_r} \tag{8}$$

以上の基本諸法則を定めることにより式 (9) に示すような, Cauchy 応力空間で現在の応力状態で比体積  $v$  が決まる関係が得られ, 状態境界面の存在を考慮できているモデルとなっている。

$$\ln v = \ln N - \tilde{\lambda} \frac{p}{p_r} - \frac{\tilde{\lambda} - \tilde{\kappa}}{1 - \tilde{\kappa}} \ln \frac{M^2 + \eta^2}{M^2} + (1 - \tilde{\lambda}) \frac{\eta^2}{6\tilde{\mu}} \tag{9}$$

以上の基本諸法則をもとに主値・主軸に基づく定式化を行った。また有限要素解析を行うにあって、陰的応力更新アルゴリズムおよびそのアルゴリズムに整合した Consistent 接線係数を導出した。

### 3. 有限要素解析による検証結果

解析対象として高さ 10cm, 直径 5cm の計 640 要素の円柱供試体を扱い, 排水三軸圧縮試験を想定したシミュレーションを行った. 境界条件として下面は完全固定, 上面は水平方向の変位を固定した上で, 側面に 100kPa の拘束圧と上面の鉛直方向の下の向きに強制変位を与えた. 強制変位は 1step あたり 0.05cm として, 軸ひずみが 50% に達するまで与えた. 使用した材料定数および初期値を表-1 にまとめる. なお,  $\tilde{\lambda}^* = \tilde{\lambda}/(1 - \tilde{\kappa})$ ,  $\tilde{\kappa}^* = \tilde{\kappa}/(1 - \tilde{\kappa})$ ,  $M^\xi = (1 - \tilde{\kappa})M$  となる関係がある.

表-1 材料定数および初期値

材料定数	値	初期値	値
疑似ポアソン比 $\tilde{\nu}$	0.3	初期平均応力 $p_0$	100 kPa
膨潤指数 $\tilde{\kappa}$	0.025	初期比体積 $v_0$	3.0
圧縮指数 $\tilde{\lambda}$	0.082		
限界状態定数 M	1.05		
参照比体積 N	3.0		
参照応力 $p_r$	98.1 kPa		
初期平均応力 $p_0$	100 kPa		
初期比体積 $v_0$	3.0		

また今回のモデルでは限界状態近傍で体積ロッキングが発生するため, F-bar 法<sup>5)</sup>を適用して解析を行った.

### 4. 数値解析結果

図-2 に全要素を平均化して 1 つの要素とみなしたときの平均応力-せん断応力および軸ひずみ-せん断応力関係, 図-3 にせん断応力のコンター図を示す. 平均応力-せん断応力関係より排水三軸圧縮試験と同様な応力パスが得られていることがわかる. また軸ひずみ-せん断応力関係より, 軸ひずみが増大していくにつれてせん断応力の変化が小さくなっていく挙動が見られ, 限界状態へ近づいていく様子が再現されていることがわかる.

導出した consistent 接線係数を評価するため, 解析の序盤と終盤における反復回数と残差の大きさの関係を図-4 に示す. 解析の序盤と終盤ともに Newton-Raphson 法が有する二次収束性が見られるため, 導出した consistent 接線係数が適切であると確認できた.

### 5. 結論

本研究では Eshelby-zeta 応力を用いて状態境界面の存在を説明可能な等方性 Cam-clay model の構築を行い, 排水三軸圧縮試験を想定した有限要素解析によって構築したモデルの妥当性を確認することができた.

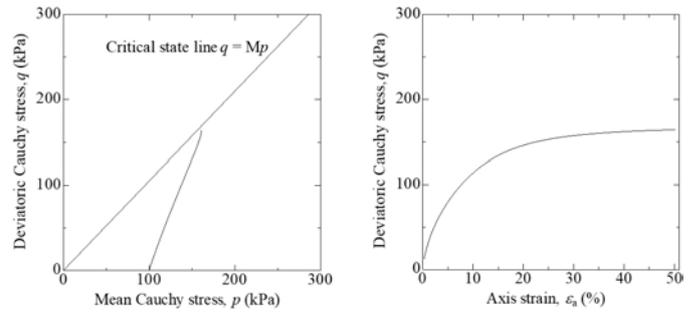


図-2 1要素とみなした挙動

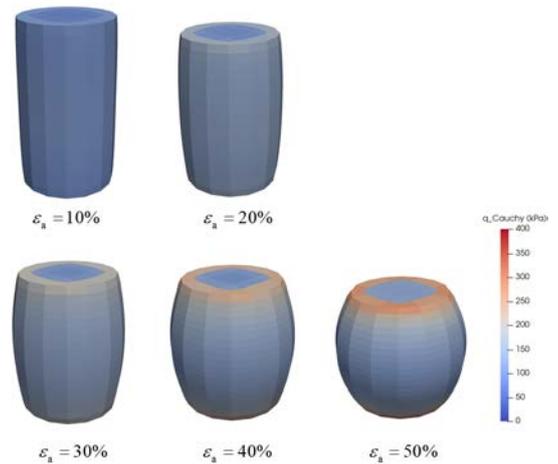


図-3 せん断力のコンター図

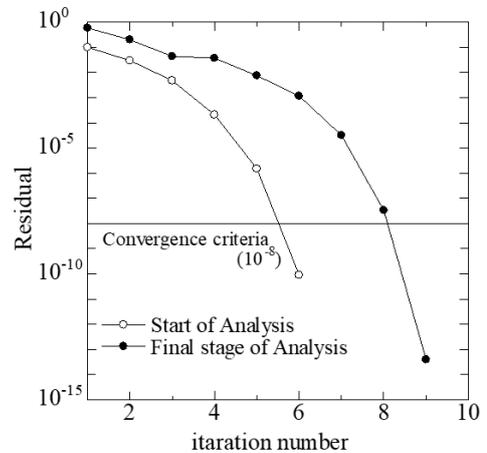


図-4 全体 Newton-Raphson 法の収束状況

### 参考文献

- 1) Borja, R.I., and Tamagnini, C.: *Cam-Clay plasticity PartIII: Extension of the infinitesimal model to include finite strains*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1998, Vol.155, pp.73-95.
- 2) Yamakawa, Y., Hashiguchi, K., and Ikeda, K.: *Implicit stress-update algorithm for isotropic Cam-clay model based on the subloading surface concept at finite strains*, International journal of Plasticity, 2010, Vol.26, No.5, pp.634-658.
- 3) Bennett, K.C., Regueiro, R.A. and Borja, R.I. : *Finite strain elastoplasticity considering the Eshelby stress for materials undergoing plastic volume change*, International Journal of Plasticity, 2016, Vol.77, pp.214-245
- 4) Housley, G.T., Amorosi, A. and Rojas, E. : *Elastic moduli of soils dependent on pressure: a hyperelastic formulation*, geotechnique, 2005, Vol.55, pp.383-392
- 5) de Souza Neto, E.A., Peric, D., Dutko, M., and Owen, D.R.J. : *Design of simple low order finite elements for large strain analysis of nearly incompressible solids*, International Journal of Solids and Structures, 1996, Vol.33, pp.3277-3296