拡張下負荷面モデルの改良型負荷判定法：非比例的な負荷経路を含む繰返し変形への適用

東北大学　学生会員　○ 羅 家驊
東北大学　正会員　　山川 優樹

1. はじめに

Hashiguchi[1] が開発した拡張下負荷面モデルは，材料の繰返し塑性挙動を精度よく表現可能な非古典塑性モデルのひとつとして知られている．金属材料を対象とした適用例として，微小な応力・ひずみ振幅での繰返し負荷による塑性変形の進行の表現，繰返し軟化を示す金属材料を対象とした繰返し負荷による塑性変形の進行の表現などが挙げられる．

しかし，繰返し変形解析において，ひずみ増分の大きさによっては，応力計算の結果に著しい誤差が生じることがある問題点が確認された [2]．これは，弾性除荷過程で下負荷面が現応力に追従しながら縮小した後，塑性負荷の再開により下負荷面が拡大するという下負荷面モデルに特有の挙動を計算で正確に追跡できていないことに起因する．

井口らは上記の問題点を解決する負荷判定法および応力計算アルゴリズムを提案した．しかし当該手法のアイデアは，単軸の繰返し負荷挙動をベースとしている．そのため弾性除荷過程において応力が弾性核に近づき，下負荷面が一点に縮退する過程を含むような，弾性核を基準とした比例反復的な負荷経路には適用できるが，それ以外の一般の負荷経路では精度良く計算できない場合があることが判明した．これを受けて，Hashiguchi は，上述のような負荷経路に限定せず一般的な負荷経路に対応した合理的な負荷判定法を提案した．

そこで本研究では，井口ら [2] により微小変形理論の枠組みで超弾性構成則をベースとして定式化された拡張下負荷面モデルについて，Hashiguchi による改良型負荷判定法を導入した完全陰的リターンマッピングによる応力計算を行い，繰返し変形解析への適用性を検証する．その際，負荷方向の変化を伴う多数回サイクルの繰返し変形についても検討する．また，従来から広く用いられている一般的な負荷判定法との計算精度の比較を行い，改良型負荷判定法の有用性を示す．

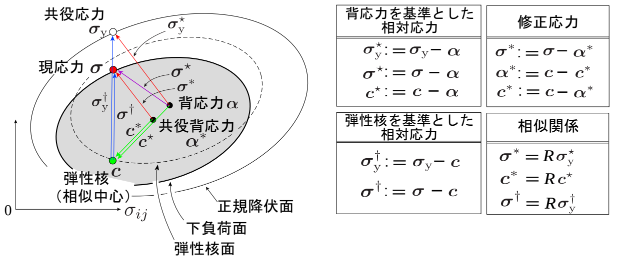
2. 拡張下負荷面の概要

(1) 正規降伏面，下負荷面，弾性核面

拡張下負荷面モデルにおける応力諸量および正規降伏面，下負荷面，弾性核面（相似中心面）の応力空間での模式図を図–1 に示す．なお，同図中には背応力 $\boldsymbol{\alpha}$ や弾性核 $\boldsymbol{c}$ を基準とした相対応力や，相似比 R を介した応力諸量の相似関係も記している．

(2) 塑性負荷／弾性除荷の判定

応力空間における時刻 t_n での下負荷面は $f_{\mathrm{sub},n}=0$ により表される．また，正規降伏比 R を材料定数 R_{e} で置き換えた式 $f^{(\mathrm{ela})}_{\mathrm{sub},n} := f_{\mathrm{sub},n}|_{R=R_{\mathrm{e}}}=0$ により表される純粋弾性限界面を考える．応力空間において試行応力がこれら 2 つの面の外側にあるか，内側ないしは面上にあるかを判定するために，次式を用いて負荷判定を行う．これは一般的な弾塑性モデルのリターンマッピングにおける負荷判定法を下負荷面関数 f_{sub} に適用したものである．



図–1 拡張下負荷面モデルの模式図

$$
\begin{cases}
f^{(\mathrm{tri})}_{\mathrm{sub},n+1} \le 0 \text{ or } f^{(\mathrm{ela}),(\mathrm{tri})}_{\mathrm{sub},n+1} \le 0 & \rightsquigarrow \text{弾性除荷・中立} \\
f^{(\mathrm{tri})}_{\mathrm{sub},n+1} > 0 \text{ and } f^{(\mathrm{ela}),(\mathrm{tri})}_{\mathrm{sub},n+1} > 0 & \rightsquigarrow \text{塑性負荷}
\end{cases}
\tag{1}
$$

3. 負荷判定法の改良・数値解析

弾性除荷過程において応力が弾性核を通らない負荷経路を含む，一般的な負荷経路においても適切に弾性除荷・塑性負荷の判定を行うことのできる負荷判定法を提案する．具体的には，弾性除荷過程により下負荷面が最も縮小したときの正規降伏比 R^0_{n+1}，および弾性除荷から塑性負荷に転じる瞬間の応力点 $\boldsymbol{\sigma}^0_{n+1}$ と弾性試行応力 $\boldsymbol{\sigma}^{(\mathrm{tri})}_{n+1}$ との相対的な位置関係を表すスカラー c を計算し，c の値による場合分けにより負荷判定を行う．

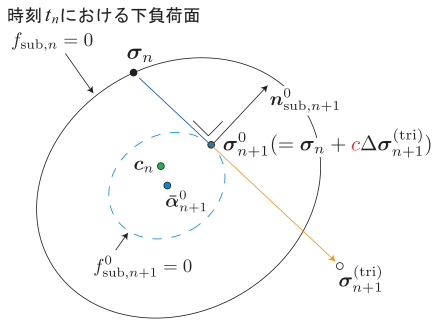
図–2 に弾性除荷過程において応力が弾性核を通らない負荷経路における，応力諸量の位置関係を表した模式図を示す．ここでは $\boldsymbol{\sigma}_n$ と $\boldsymbol{\sigma}^{(\mathrm{tri})}_{n+1}$ との間の応力経路を直線と仮定している．図–2 の破線で示した下負荷面は，弾性除荷により縮小して拡大に転じる瞬間の下負荷面を表しており，$\bar{\boldsymbol{\alpha}}^0_{n+1}$ はその中心である．破線で示した下負荷面を式 (2) に示す．ここで $R^0_{n+1}(0 \le R^0_{n+1} \le R_n \le 1)$ はこの下負荷面の大きさを表す正規降伏比である．また，弾性除荷過程と塑性負荷過程の境界の応力状態である $\boldsymbol{\sigma}^0_{n+1}$ を，スカラー c と試行応力増分を用いて式 (3) で表す．

$$
\boldsymbol{\sigma}^0_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_n + c\Delta\boldsymbol{\sigma}^{(\mathrm{tri})}_{n+1} \tag{2}
$$

$$
f^0_{\mathrm{sub},n+1} = \sqrt{\frac{3}{2}}\|(\boldsymbol{\sigma}^0_{n+1} - \bar{\boldsymbol{\alpha}}^0_{n+1})^{\mathrm{dev}}\| - R^0_{n+1}q_n = 0 \tag{3}
$$

図–3 に示すような負荷経路における負荷判定法を考察するため，弾性除荷過程と塑性負荷過程の境界である $\boldsymbol{\sigma}^0_{n+1}$ の応力状態に着目する．時刻 t_n の応力 $\boldsymbol{\sigma}_n$ から $\boldsymbol{\sigma}^0_{n+1}$ までの

Key Words: 構成式, 弾塑性, 拡張下負荷面モデル, リターンマッピング, 負荷判定, 非比例負荷
〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06, Phone: 022-795-7420, Fax: 022-795-7418, E-mail: luo.jiahua.p5@dc.tohoku.ac.jp



図–2 弾性除荷において応力が弾性核を通らない負荷経路における応力諸量の位置関係

経路は弾性除荷過程であるから，この過程において応力点は弾性試行応力増分 $\Delta\boldsymbol{\sigma}^{(\mathrm{tri})}_{n+1} := \boldsymbol{\sigma}^{(\mathrm{tri})}_{n+1} - \boldsymbol{\sigma}_n$ を表す矢印に沿って移動し，それに追従して下負荷面は縮小していく．従って，弾性除荷が完了し応力点が $\boldsymbol{\sigma}^0_{n+1}$ に等しくなったとき，試行応力増分を表す矢印と下負荷面は接する．試行応力増分と弾性除荷過程における最小の下負荷面が接することを表す関係式を式 (4) に示す．ここで，$\boldsymbol{n}^0_{\mathrm{sub},n+1}$ は下負荷面 $f^0_{\mathrm{sub},n+1}=0$ の単位外向き法線である．

$$\Delta\boldsymbol{\sigma}^{(\mathrm{tri})}_{n+1} : \boldsymbol{n}^0_{\mathrm{sub},n+1} = 0 \tag{4}$$

式 (3),(4) より未知数 c, R^0_{n+1} に対し，Newton-Raphson 法により求めることができる．

本研究で提案する負荷判定法は，c の値による場合分けを行い，弾性試行応力 $\boldsymbol{\sigma}^{(\mathrm{tri})}_{n+1}$ と $\boldsymbol{\sigma}^0_{n+1}$ の位置関係を整理し負荷判定を行う方法である．この場合分けを式 (5) に整理した．以上で説明した手法により，弾性除荷過程において応力が弾性核を通らない負荷経路においても，適切に弾性除荷・塑性負荷の判定を行い，増分内の弾性除荷過程と塑性負荷過程を正確に追跡することができる．

- $f^{(\mathrm{ela}),(\mathrm{tri})}_{\mathrm{sub},n+1} \le 0 \quad \rightarrow \quad$ 弾性除荷
- $f^{(\mathrm{ela}),(\mathrm{tri})}_{\mathrm{sub},n+1} > 0$

$$\begin{array}{ccl} 1 < c & \rightarrow & \text{弾性除荷} \\ 0 \le c \le 1 & \rightarrow & \text{塑性負荷} \\ c < 0 & \rightarrow & \text{塑性負荷} \end{array} \tag{5}$$

4. 数値計算例

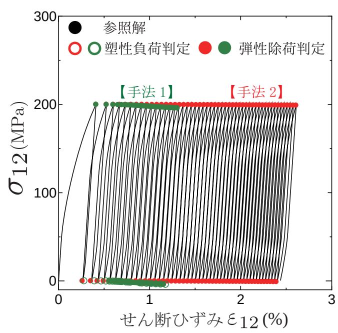
拡張下負荷面モデルは，微小応力振幅下での塑性ひずみ蓄積挙動を表現できることが特長である．そこで本節では，一定応力振幅下の繰返し変形に対する提案手法の適用性を検証するため，弾性核を通る応力経路と弾性核を通らない経路を設定した解析を行う．異なる 2 方向垂直応力 σ_{11} 及びせん断応力 (σ_{12}) を単純引張，純粋せん断，単純圧縮，逆方向の純粋せん断の順に与え，一定応力振幅下 $(\sigma_{11}=0\sim10\ \mathrm{MPa})$，$(\sigma_{12}=\sigma_{21}=0\sim200\ \mathrm{MPa})$ での 50 サイクル繰返し解析を行う．各解析手順で与える応力増分 $\Delta\sigma$ と応力増分を等分割するステップ数 N_{step} を以下に述べる．

解析手順:

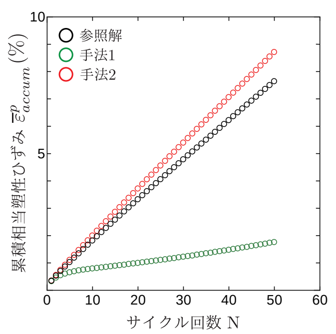
1. $\Delta\sigma_{11}=10\ \mathrm{MPa}$ $(\sigma_{11}=0\rightarrow10\ \mathrm{MPa})$，$N_{step}=100$.
2. $\Delta\sigma_{12}=\Delta\sigma_{21}=200\ \mathrm{MPa}$ $(\sigma_{12}=0\rightarrow200\ \mathrm{MPa})$, $N_{step}=1000$.
3. $\Delta\sigma_{11}=-10\ \mathrm{MPa}$ $(\sigma_{11}=10\rightarrow0\ \mathrm{MPa})$, $N_{step}=100$.
4. $\Delta\sigma_{12}=\Delta\sigma_{21}=-200\ \mathrm{MPa}$ $(\sigma_{12}=200\rightarrow0\ \mathrm{MPa})$, $N_{step}=1$.

上述の解析手順で計算された応力を数値解とする．一方，数値解の比較対象である参照解を算出するため、応力を 1 ステップで与える解析手順に対応する参照解を求める必要がある．解析手順 4 で与える応力を $N_{step}=1000$ で等分割した解析によって得られた結果を参照解として，数値解との比較対象とする．

図–**3-a** には，1 ステップでせん断ひずみを与える解析で得られた各サイクルでの応力をプロットした．弾性除荷と判定された場合を白抜きの丸，塑性負荷と判定された場合を色付きの丸でプロットしている．比較対象として，参照解の応力-ひずみ曲線を示してある． 図–**3-a** から，手法 1 では参照解の応力と大きな差異がみられ，応力計算に誤差が生じていることが分かる．一方，手法 2 は参照解の負荷判定結果と整合している．最後はサイクル回数と累積塑性ひずみの挙動を調べた．調べた結果を図–**3-b** に示す．これらの結果からサイクル数の増加に伴い累積塑性塑性ひずみが増加する傾向となっているが，手法 1 で得られた結果は参照解より大幅に小さいことを示してるため，手法 1 が累積塑性ひずみを過小評価する傾向があると考えられる．



図–3-a 応力-ひずみ曲線



図–3-b 応力-累積塑性ひずみ関係

図–3 一定応力振幅下における繰返し変形解析の結果

5. 結論

本研究では拡張下負荷面モデルの負荷判定法の改良手法を提案した．この手法により増分ステップ内に弾性除荷過程と塑性負荷過程が含まれる場合にも高い精度で応力計算が可能になった．また，本研究で提案した負荷判定法が，弾性除荷過程において応力が弾性核を通過しない負荷経路にも適用可能な負荷判定法と応力計算アルゴリズムを提案し，増分ステップ内に弾性除荷と塑性負荷が含まれる場合の応力計算精度を向上させた．

参考文献

1) Hashiguchi, K.: Subloading surface model in unconventional plasticity, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 25, pp. 917–945, 1989.
2) 井口拓哉, 山川優樹, 池田清宏: 微小変形理論と超弾性構成則に基づく拡張下負荷面モデルの再定式化とリターンマッピング法の開発, 日本機械学会論文集, Vol. 82, No. 841, p. 16-00197, 2016..