陰的 Runge-Kutta 法を用いた動的解析手法の構築および検証

○東北大学工学部 学生員 米田 玄徳
東北大学大学院工学研究科 正 員 山田 正太郎
東北大学大学院工学研究科 正 員 京谷 孝史

1. はじめに

本研究では陰的 Runge-Kutta 法を用いた動的な有限要素解析のスキームを構築する．加えて弾塑性体を対象とした解析において動的解析スキームに整合した応力更新アルゴリズムを構築し，その検証を行う．

2. 動的解析手法

動的問題を解くにあたり，慣性項を考慮した仮想仕事式に有限要素法を適用することで空間的に離散化した．時間積分手法として陰的 Runge-Kutta 法 (IRK) を用い，Newmark-β 法 (NB) と比較する．Newmark-β 法についてはパラメーターに $\gamma = 1/2$，$\beta = 1/4$ を使用し，台形公式とする．

ここで陰的 Runge-Kutta 法は以下に示すような 1 階の微分方程式の初期値問題を解く手法である．

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x) \quad (t \geq 0) \tag{1}$$

$$\text{初期値}: x(0) = x_0 \tag{2}$$

本研究では陰的 Runge-Kutta 法のうち，1 段 2 次の Gauss-Legendre 法を使用した．スキームは次式のとおりである．

$$t_{n+1} = t_n + h \tag{3}$$

$$x_{n+1} = x_n + hk_1 \tag{4}$$

$$k_1 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{h}{2}k_1\right) \tag{5}$$

運動方程式を解くためにこの手法を適用するにあたり，問題を節点変位と節点速度を未知数とする 1 階の連立微分方程式の初期値問題に書き換える．さらに陰的 Runge-Kutta 法を適用することで以下に示す 2 段階の時間積分スキームが得られる．

Step1：式 (7) を式 (6) に代入した式より $\tilde{\Delta}\boldsymbol{u}$ を求めたうえで，式 (7) より $\boldsymbol{v}_{n+1/2}$ と $\boldsymbol{a}_1/2$ を求める．

$$\boldsymbol{M}\boldsymbol{a}_{n+1/2} + \boldsymbol{C}\boldsymbol{v}_{n+1/2} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{u}_{n+1/2} = \boldsymbol{f}_{n+1/2} \tag{6}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}_{n+1/2} = \tilde{\Delta}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}_n \\ \boldsymbol{v}_{n+1/2} = \frac{1}{\tilde{\Delta}t}\tilde{\Delta}\boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{a}_{n+1/2} = \left(\frac{1}{\tilde{\Delta}t}\right)^2 \tilde{\Delta}\boldsymbol{u} - \left(\frac{1}{\tilde{\Delta}t}\right)\boldsymbol{v}_n \end{cases} \tag{7}$$

Step2:式 (8) より $\boldsymbol{u}_{n+1/2}$ と $\boldsymbol{v}_{n+1/2}$ を更新する．

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}_{n+1} = \boldsymbol{u}_n + \Delta t\boldsymbol{v}_{n+1/2} \\ \boldsymbol{v}_{n+1} = \boldsymbol{v}_n + \Delta t\boldsymbol{a}_{n+1/2} \end{cases} \tag{8}$$

3. 応力更新アルゴリズム

準静的な弾塑性解析では，後退 Euler 近似に基づく陰的応力更新アルゴリズムが構築されることが多い．しかし後退 Euler 近似は台形公式および陰的 Runge-Kutta 法と異なる積分方法であるため，これらの動的解析手法と整合した陰的応力更新アルゴリズムを考える．

台形公式は n+1/2 ステップまで前進近似をし，残りの半ステップで後退近似を行っていると解釈できる．そのためまず内部変数である $(\boldsymbol{C}^p)^{-1}$ および α を前進近似によって半ステップ分仮更新したのちに後退 Euler 近似に基づき応力および内部変数を陰的に更新する．

・前進近似による内部変数の更新

$$\left(\boldsymbol{C}^p_{n+1/2}\right)^{-1} = \exp\left(-2\tilde{\Delta}\gamma\boldsymbol{F}_n^{-1} \left.\frac{\partial g(\boldsymbol{\tau})}{\partial \boldsymbol{\tau}}\right|_n \boldsymbol{F}_n\right)\left(\boldsymbol{C}^p_n\right)^{-1} \tag{9}$$

$$\alpha_{n+1/2} = \alpha_n + \tilde{\Delta}\gamma a(\alpha_n) \tag{10}$$

ただし，$\tilde{\Delta}\gamma = \dot{\gamma}_n\tilde{\Delta}t \quad \tilde{\Delta}t = \Delta t/2$ である．

陰的 Runge-Kutta 法は n+1/2 ステップまで後退近似をし，その値を用いてで中点近似を行っている．よってまず後退 Euler 近似に基づく陰的更新アルゴリズムにより応力，内部変数を仮更新したのちに，以下の通り $(\boldsymbol{C}^p)^{-1}$ および α を中点近似によって更新する．

・中点近似による内部変数の更新

$$\left(\boldsymbol{C}^p_{n+1}\right)^{-1} = \exp\left(-2\Delta\gamma\boldsymbol{F}_{n+1/2}^{-1} \left.\frac{\partial g(\boldsymbol{\tau})}{\partial \boldsymbol{\tau}}\right|_{n+1/2} \boldsymbol{F}_{n+1/2}\right)\left(\boldsymbol{C}^p_n\right)^{-1} \tag{11}$$

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n + \Delta\gamma a(\alpha_{n+1/2}) \tag{12}$$

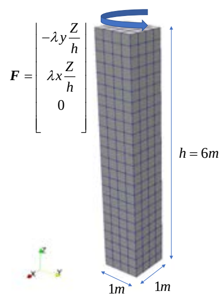
ただし，$\Delta\gamma = \dot{\gamma}_{n+1/2}\Delta t$ である．

4. 解析条件

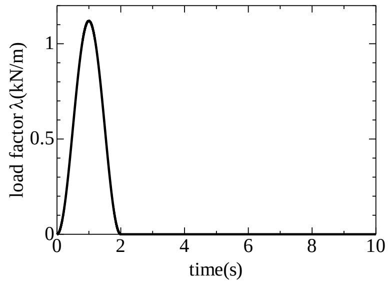
図–1 に示すような弾塑性体を解析対象とした．弾性成分には Henchy の超弾性構成則を用いた．また，塑性成分には Mises の降伏局面と線形硬化則を適用するとともに，関連流れ則を用いた．1 次の六面体要素を計 384 (= 4 × 4 × 24) 要素用い， 下端を完全に固定したうえで，側面に**図–2** に示す力を作用させることで解析対象をねじった．

時間刻み幅は $\Delta t = 0.05$ s として 100step 計算を行った．

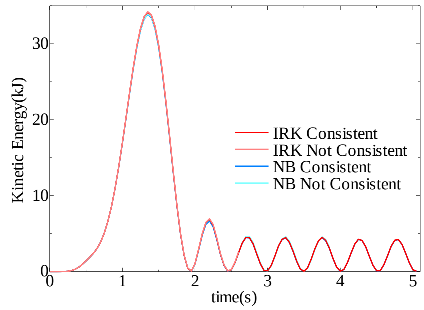
Key Words: 動的解析， 陰的 *Runge-Kutta* 法, 応力更新アルゴリズム,
〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06, TEL 022-795-7489



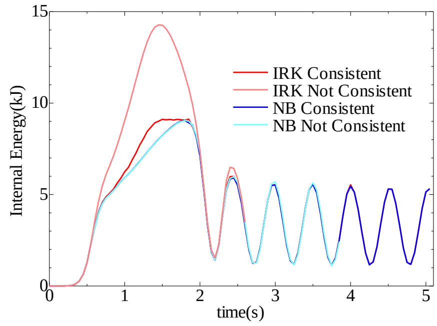
図–1 有限要素モデル



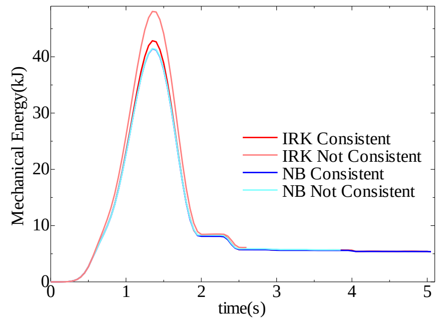
図–2 荷重係数



図–3 運動エネルギー



図–4 内部ひずみエネルギー



図–5 力学的エネルギー

5. 数値解析結果

表–1 に Newmark-β 法および陰的 Runge-Kutta 法において応力更新アルゴリズムを解析スキームと整合させた場合と整合させていない場合の計算時間の結果を示す．

表–1 計算時間

積分手法	スキームとの整合	計算時間
陰的 Runge-Kutta 法	あり	1595.645 s
	なし	53step で停止
Newmarkβ 法	あり	1583.177 s
	なし	78step で停止

応力更新アルゴリズムを動的解析スキームに整合させなかった場合座標変換の Jacobian が負となり計算を継続することができなかったのに対し，整合させた場合はそのようなことは生じなかった．また全体 Newton-Raphson ループ開始時の残差が整合させた場合よりも大きく，収束までの繰り返し回数が多いことが確認された．

図–3~ **図–5** に Newmark-β 法および陰的 Runge-Kutta 法において応力更新アルゴリズムを解析スキームと整合させた場合と整合させていない場合の運動エネルギー K，内部ひずみエネルギー E およびその和を示す． また，時間刻み幅を細かくした場合にはいずれの手法においても図における応力更新アルゴリズムを動的解析スキームに整合させた場合の Newmark-β 法の結果に近づいた．陰的 Runge-Kutta 法を用いる弾塑性体を対象とした動的解析は Newmark-β 法のものとおおよそ同程度の結果が得られている．しかし陰的 Runge-Kutta 法を用いた場合に内部ひずみエネルギーが大きく生じてしまうが，応力更新アルゴリズムをスキームと整合させることで内部ひずみエネルギーが大きくなることを防ぎ，計算を安定させることができる．

6. 結論

本研究では，陰的 Runge-Kutta 法を用いた動的解析手法を構築し，Newmark-β 法と同様の結果が得られることを示した．また，弾塑性解析の陰的応力更新アルゴリズムを時間積分手法と整合させることにより計算が安定することを示した．

参考文献

1) J. Bonet, Antonio J Gil and Richard D. Wood : *Nonlinear Solid Mechanics for Finite Element Analysis: Dynamics*, 271-272. [2021]