

変分法に基づくコンクリートの温度ひび割れ問題の数値シミュレーション

○東北大学工学部建築・社会環境工学科 学生会員 中村 明莉
 東北大学大学院工学研究科 学生会員 山中 耀介
 東北大学災害科学国際研究所 正会員 森口 周二
 東北大学災害科学国際研究所 正会員 寺田 賢二郎

1. 目的

本研究では、コンクリートの温度ひび割れ現象の予測が可能な数値解析手法を提案する。本手法の特徴は、車谷らのコンクリートの破壊力学に基づく連続体損傷モデル²⁾を用いて損傷発展と熱伝導の連成問題を変分原理によって定式化する点である。また、数値計算例を示し提案手法の妥当性や精度について議論する。

2. 構成モデリング

Helmholtz の自由エネルギー密度を弾性損傷成分 $\psi^d(\boldsymbol{\varepsilon}, d)$ 、損傷硬化に関する成分 $\psi^k(\kappa)$ 、比熱に関する成分 $\psi^T(T)$ の和として、次式で定義する。

$$\psi(\boldsymbol{\varepsilon}, d, \kappa, T) \equiv \psi^d(\boldsymbol{\varepsilon}, d, T) + \psi^k(\kappa) + \psi^T(T) \quad (1)$$

ここに、 $\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)$ 、 $\mathbf{u}$ 、 κ 、 T はそれぞれ微小ひずみテンソル、変位、損傷硬化変数¹⁾、絶対温度であり、 $d \in [0, 1]$ は材料の局所的な損傷の度合いを表す損傷変数である。また、 $\psi^d(\boldsymbol{\varepsilon}, d)$ 、 $\psi^k(\kappa)$ 、 $\psi^T(T)$ を以下のように定義する。

$$\rho\psi^d(\boldsymbol{\varepsilon}, d, T) = \frac{1}{2}(1-d)K(\text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}))\text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) + \frac{1}{2}K((\text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon})) - |\text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon})|)\text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \\ + (1-d)G \text{dev}(\boldsymbol{\varepsilon}) : \text{dev}(\boldsymbol{\varepsilon}) - 3K\alpha(T - T_R)\text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \quad (2)$$

$$\rho\psi^k(\kappa) = -\frac{1}{2}r(\kappa - \kappa_0)^2 \quad (3)$$

$$\rho\psi^T(T) = \rho c \left(T - T_R - T \ln \frac{T}{T_R} \right) \quad (4)$$

そして、弾塑性モデルにおける降伏関数と類似の損傷降伏関数 ϕ_d を次式で定義する。

$$\phi_d(A_d, A_k, d, \kappa) = \left(\frac{1}{\kappa} + \beta \right) (1-d) A_d + A_k - A_0 \leq 0 \quad (5)$$

ここに、 A_d 、 A_k はそれぞれ損傷変数 d 、損傷硬化変数 κ とエネルギー共役な熱力学的駆動力であり、 $A_0 \geq 0$ は初期の損傷開始状態を示す閾値である。加えて、 β は車谷ら²⁾によってコンクリートの破壊力学に基づいて提案された定数であり、材料パラメータと代表要素長 h_e および破壊エネルギー G_f 、 κ の初期値 κ_0 を用いて次式で表される。²⁾

$$\beta = \frac{Ek_0 h_e}{G_f} \quad (6)$$

式(5)の損傷降伏関数 ϕ_d を用いることで最大散逸の原理より、 d と κ の発展則を以下のように導出することができる。

$$\dot{d} = \lambda \frac{\partial \phi_d}{\partial A_d} = \lambda \left(\frac{1}{\kappa} + \beta \right) (1-d) \quad (7)$$

$$\dot{\kappa} = \lambda \frac{\partial \phi_d}{\partial A_k} = \lambda \quad (8)$$

ここに λ は Lagrange の未定乗数である。ここで、式(8)を式(7)に代入することで得られる関係式

$$\dot{d} = \left(\frac{1}{\kappa} + \beta \right) (1-d) \dot{\kappa} \quad (9)$$

は、車谷らの損傷モデル²⁾の時間微分に他ならない。このことは、式(7)、(8)の発展則が車谷らの損傷モデルと等価であることを示している。最後に、損傷発展に関する負荷/除荷条件は次式で表される。

$$\lambda \geq 0, \quad \phi_d \leq 0, \quad \lambda \phi_d = 0 \quad (10)$$

3. 変分法による熱-機械連成問題の定式化

Canadiglia と Mösler³⁾の手法より、コンクリートで構成された連続体 $\mathcal{B}$ の熱力学的平衡状態を導く最適化問題を次のように得ることができる。

$$\inf_{\dot{\mathbf{u}}, \dot{\eta}, \dot{\lambda}} \sup_{\dot{\mathbf{u}}, \dot{\eta}, \dot{\lambda}} \dot{\Phi}(\dot{\mathbf{u}}, \dot{\eta}, \dot{\lambda}, T) \quad \text{subject to Eqn. (7)(8)} \quad (11)$$

ここで、 $\dot{\Phi}$ は単位時間あたりにおける連続体 $\mathcal{B}$ の全エネルギー変化率であり、次式のように定義する。

$$\dot{\Phi}(\dot{\mathbf{u}}, \dot{\eta}, \dot{\lambda}, T) \equiv \int_{\mathcal{B}} \dot{\Upsilon}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}, \dot{\eta}, \dot{\lambda}, T) dV + \dot{G}^{\text{ext}}(\dot{\mathbf{u}}, T) \quad (12)$$

また、局所ポテンシャル変化率 $\dot{\Upsilon}$ の具体系を次式で定義する。

$$\dot{\Upsilon}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}, \dot{\eta}, \dot{\lambda}, T) = \rho \dot{e}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}, \dot{\eta}, \dot{\lambda}) - \rho T \dot{\eta} + D(f(T, \theta) \dot{\lambda}) - \chi(\dot{\mathbf{G}}) \quad (13)$$

ここで、 $e(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}, \dot{\eta}, \dot{\lambda}) = \psi(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}, \dot{\lambda}, T) + \eta T$ は内部エネルギー密度であり、 $f(T, \theta)$ は平衡温度 $\theta = \partial_{\rho\eta} e$ と外部温度 T を用いて $f(T, \theta) = \frac{T}{\theta}$ で表される積分因子である。また、 $\dot{\Phi}(\dot{\mathbf{u}}, \dot{\eta}, \dot{\lambda}, T)$ の $(\dot{\mathbf{u}}, \dot{\eta}, \dot{\lambda}, T)$ に関する停留条件を時間離散化することで、時刻 $t = t_{n+1}$ における支配方程式を以下のように得ることができる。

$$\int_{\mathcal{B}} \boldsymbol{\sigma}_{n+1} : \delta \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} dV + \int_{\mathcal{B}} \rho \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u}_{n+1} dV + \int_{\partial_{\text{MNB}}} \mathbf{T}_N \cdot \delta \mathbf{u}_{n+1} dA = 0 \quad (14)$$

$$\int_{\mathcal{B}} \rho (\eta_n - \eta_{n+1}) \delta T_{n+1} dV + \int_{\mathcal{B}} \frac{\delta T_{n+1}}{T_n} \Delta \lambda A_0 dV + \int_{\mathcal{B}} \mathbf{Q}_{n+1} \cdot \nabla \left(\frac{\delta T_{n+1}}{T_{n+1}} \right) \\ - \int_{\partial_{\text{HNB}}} Q_N \frac{\delta T_{n+1}}{T_{n+1}} dA + \int_{\mathcal{B}} \rho h \frac{\delta T_{n+1}}{T_{n+1}} dA = 0 \quad (15)$$

$$\theta_{n+1} = T_n \quad (16)$$

$$\phi_d(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}, \kappa_{n+1}, \Delta \lambda) \\ = \left(\frac{1}{\kappa_{n+1}} + \beta \right) (1-d_{n+1}) A_d(\boldsymbol{\varepsilon}_n) + A_k(\kappa_{n+1}) - A_0 = 0 \quad (17)$$

Key Words: 熱-機械連成, 連続体損傷モデル, 破壊力学, コンクリート, 温度ひび割れ, 変分原理

〒980-8572 仙台市青葉区荒巻字青葉 468-1 災害科学国際研究所 4F S403-S404, TEL 022-752-2132, FAX 022-752-2133

表-1 材料パラメータ

E	ヤング率 [MPa]	2.00×10^4
γ	ポアソン比	0.00
r	損傷硬化に関する係数	4.40×10^1
G_f	破壊エネルギー [$\text{N} \cdot \text{mm}^{-1}$]	5.00×10^{-2}
κ_0	κ の初期値	1.00×10^{-4}
A_0	損傷開始の閾値 [MPa]	6.50×10^{-1}
α	熱膨張係数 [$^{\circ}\text{C}^{-1}$]	1.00×10^{-5}
c	比熱 [$\text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot ^{\circ}\text{C}^{-1}$]	1.05×10^3
k	熱伝導率 [$\text{J} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$]	1.60

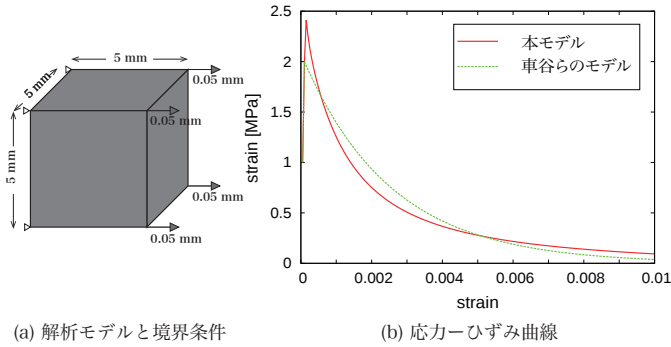
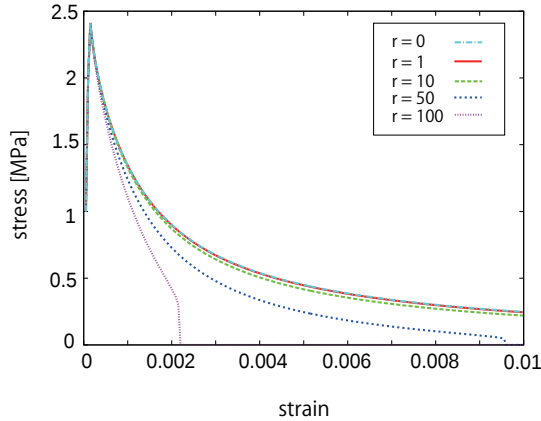


図-1 一様引張試験


図-2 r を変化させたときの応力 - ひずみ曲線

4. 数値計算例

ここでは、2つの数値計算例を通して本研究の性能を検証する。一つ目の例では、提案手法と車谷らの手法を用いて一様引張試験をそれぞれ行い、得られた結果を比較することで、本手法の妥当性を検証する。二つ目の例では、熱連成解析を行うことで本研究で提案する手法がコンクリートの温度ひび割れ問題を予測可能であることを例示する。解析に使用する材料パラメータは表-1のとおりである。

4.1 一様引張試験

提案手法と車谷らの手法をそれぞれ用いて、図-1(a)に示す一辺 10 mm の正六面体要素に 1% のひずみを与える解析を行った。図-1(b) のグラフはそれぞれの手法を用いて得られた応力-ひずみ曲線であり、提案手法により車谷モデルに近い結果が得られることを示している。ただし、 r と A_0 は車谷モデルでは使用されていない材料パラメータであり、これらの値を適切に設定する必要がある。図-2 の r を変化させたときの応力ひずみ曲線を示しており、 r が大きくなるほど応力軟化後の曲線の傾きが大きくなることがわかる。

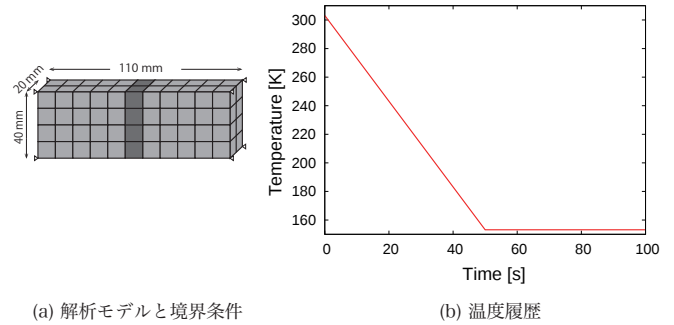


図-3 温度ひび割れ問題

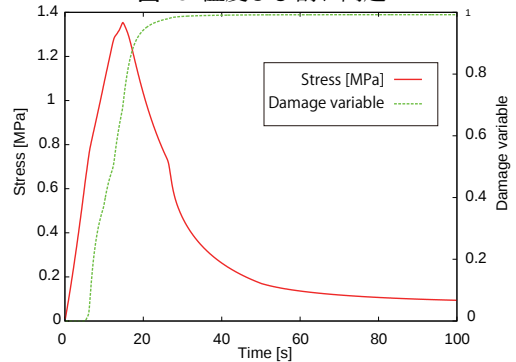


図-4 損傷要素上部の x 方向の応力と損傷変数の時刻歴

4.2 温度ひび割れ問題

コンクリートの温度ひび割れ現象の予測を例題として、図-3(a)に示す解析モデルの全表面に、図-3(b)のグラフに示す温度履歴を与える解析を行った。なお、モデル中央の灰色で示す要素のみ損傷発展の計算を行い、それ以外の要素については損傷発展を計算しない単純な線形弾性体として計算を行った。図-4のグラフは、損傷要素上部の x 方向の応力と損傷変数の解析結果の時刻歴を示しており、温度変化に伴って損傷変数 d が発展し、応力が低下することが示されている。

5. 終わりに

本研究ではコンクリートの破壊力学に基づく連続体損傷モデルを用いて損傷発展と熱伝導の連成問題を変分原理によって定式化し、コンクリートの温度ひび割れ現象の予測が可能な解析手法を提案した。今後は材料パラメータの適切な決定方法について検討する。

参考文献

- Brepols, T., Wulfinghoff, S. and Reese, S.: Gradient-extended two-surface damage-plasticity: Micromorphic formulation and numerical aspects, *International Journal of Plasticity*, Vol. 97, pp. 64–106, 2017.
- 車谷麻緒, 寺田賢二郎, 加藤準治, 京谷孝史, 檜山和男: コンクリートの破壊力学に基づく等方性損傷モデルの定式化とその性能評価, 日本計算工学会論文集, Vol. 2013, pp. 20130015–20130015, 2013.
- Canadija, M. and Mosler, J.: On the thermomechanical coupling in finite strain plasticity theory with non-linear kinematic hardening by means of incremental energy minimization, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 48, No. 7-8, pp. 1120–1129, 2011, Cited By :36.