# 地盤材料の繰返しせん断変形に対する<br>有限変形・回転硬化 Cam-clay モデルの適用性検証

東北大学　学生会員　○ 佐藤 祐杜
東北大学　正会員　山川 優樹
東北大学　学生会員　井口 拓哉
東北大学　学生会員　町島 智大

## 1. はじめに

繰返し載荷時における地盤材料の液状化へ至る過程でみられるサイクリック・モビリティ現象を再現する弾塑性モデルの開発が行われている [1),2),3),4),5),6),7)]. 本研究では，変形勾配テンソルの乗算分解と超弾性構成式を組み合わせた有限変形・回転硬化 Cam-clay モデルの開発を進めている. これまでの研究において, 現時点で当モデルが液状化挙動に対してどの程度の適用性を持つかを, 実験結果や他モデルのシミュレーション例と比較することにより確認した. 今回は, 実験結果を良好に再現するための適切なパラメータ設定について検討した結果を示す.

## 2. 有限変形・回転硬化 Cam-clay モデル

### (1) 変形勾配テンソルの乗算分解に基づく諸量の定義

変形勾配テンソル $\boldsymbol{F}$ を弾性部分・塑性部分へ乗算分解することを仮定し，さらに $\boldsymbol{F}^{\mathrm{p}}$ をエネルギー貯蓄部分である $\boldsymbol{F}^{\mathrm{p_e}}$ とエネルギー消散部分である $\boldsymbol{F}^{\mathrm{p_d}}$ に乗算分解を行う.

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}^{\mathrm{e}}\boldsymbol{F}^{\mathrm{p}}, \quad \boldsymbol{F}^{\mathrm{p}} = \boldsymbol{F}^{\mathrm{p_e}}\boldsymbol{F}^{\mathrm{p_d}} \tag{1}$$

$\boldsymbol{F}^{\mathrm{p_e}}$ を変形変数とする構成則によって背応力比テンソルを与えることにより回転硬化を表現し, 背応力比テンソルの客観速度による発展則を用いない定式化による非線形回転硬化モデルを構築する.

### (2) 超弾性構成式

中間配置を参照して表示された超弾性モデルを用いる. 超弾性ポテンシャル関数 $W^{\mathrm{e}}(\bar{\boldsymbol{C}}^{\mathrm{e}})$ を弾性変形テンソル $\bar{\boldsymbol{C}}^{\mathrm{e}} := \boldsymbol{F}^{\mathrm{e}\mathrm{T}}\boldsymbol{F}^{\mathrm{e}}$ で微分することで第 2 Piola–Kirchhoff 応力 $\bar{\boldsymbol{S}}$ を得る.

$$\bar{\boldsymbol{S}} = 2\frac{\partial W^{\mathrm{e}}(\bar{\boldsymbol{C}}^{\mathrm{e}})}{\partial \bar{\boldsymbol{C}}^{\mathrm{e}}} \tag{2}$$

$W^{\mathrm{e}}(\bar{\boldsymbol{C}}^{\mathrm{e}})$ の具体形は省略するが，本研究で用いる超弾性モデルでは体積弾性係数とせん断弾性係数ともに圧力依存性を有する.

### (3) 回転硬化に関する構成式

回転硬化に関する構成式は，回転硬化に関する変形内部変数テンソル $\tilde{\boldsymbol{C}}^{\mathrm{p_e}} := \boldsymbol{F}^{\mathrm{p_e}\mathrm{T}}\boldsymbol{F}^{\mathrm{p_e}}$ と第二 Piola–Kirchhoff 応力に類似した回転硬化応力比テンソル $\tilde{\boldsymbol{S}}^{\mathrm{rot}}$ との関係式として与える. 回転硬化に関するポテンシャル関数 $W^{\mathrm{rot}}$ を $\tilde{\boldsymbol{C}}^{\mathrm{p_e}}$ で微分することで $\tilde{\boldsymbol{S}}^{\mathrm{rot}}$ を導く.

$$\tilde{\boldsymbol{S}}^{\mathrm{rot}} = 2\frac{\partial W^{\mathrm{rot}}(\tilde{\boldsymbol{C}}^{\mathrm{p_e}})}{\partial \tilde{\boldsymbol{C}}^{\mathrm{p_e}}} \tag{3}$$

回転硬化は塑性偏差変形によってもたらされるとの仮定のもとで, $W^{\mathrm{rot}}(\tilde{\boldsymbol{C}}^{\mathrm{p_e}})$ では $\tilde{\boldsymbol{C}}^{\mathrm{p_e}}$ の等積成分 $\tilde{\boldsymbol{C}}^{\mathrm{p_e}}_{\mathrm{dis}} := (J^{\mathrm{p_e}})^{-2/3}\tilde{\boldsymbol{C}}^{\mathrm{p_e}}$ を用いており，$\det \tilde{\boldsymbol{C}}^{\mathrm{p_e}}_{\mathrm{dis}} = 1$ である.

### (4) 回転硬化モデルに用いる修正応力の導入

回転硬化モデルの定式化において，中間配置 $\bar{\mathcal{K}}$ を参照する修正 Mandel 応力を次式のように定義する.

$$\bar{\boldsymbol{M}}^{\mathrm{mod}} := \bar{\boldsymbol{M}} - (-\bar{P} + P_{\mathrm{t}})\bar{\boldsymbol{M}}^{\mathrm{rot}}_{\mathrm{dev}} \tag{4}$$

ここで，Mandel 応力 $\bar{\boldsymbol{M}}$ と $\bar{\boldsymbol{S}}$ は $\bar{\boldsymbol{M}} = \bar{\boldsymbol{C}}^{\mathrm{e}}\bar{\boldsymbol{S}}$ で関係づけられる. $\bar{\boldsymbol{M}}^{\mathrm{rot}}$ は回転硬化に関する背応力比テンソルで，偏差成分のみを用いている. 式 (4) を pull-back すると，基準配置 $\mathcal{K}_0$ を参照する修正応力が次のように得られる.

$$\boldsymbol{M}^{\mathrm{mod}} = \boldsymbol{F}^{\mathrm{pT}}\bar{\boldsymbol{M}}^{\mathrm{mod}}\boldsymbol{F}^{\mathrm{p-T}} = \boldsymbol{M} - (-P + P_{\mathrm{t}})\boldsymbol{M}^{\mathrm{rot}}_{\mathrm{dev}} \tag{5}$$

ここで，$P$ は基準配置 $\mathcal{K}_0$ を参照する応力 $\boldsymbol{M}$ の平均垂直応力であり，$P := \frac{1}{3}\operatorname{tr}\boldsymbol{M}$ と定義している.

### (5) 塑性流動則および内部変数の発展則

塑性変形勾配テンソル $\boldsymbol{F}^{\mathrm{p}}$ の発展則は次式のように表される.

$$\dot{\boldsymbol{F}}^{\mathrm{p}} = \bar{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{p}}\boldsymbol{F}^{\mathrm{p}} \tag{6}$$

中間配置 $\bar{\mathcal{K}}$ を参照する速度勾配テンソル $\bar{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{p}}$ を次式のように対称部分 $\bar{\boldsymbol{D}}^{\mathrm{p}}$ と反対称部分 $\bar{\boldsymbol{W}}^{\mathrm{p}}$ へ加算分解する.

$$\bar{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{p}} = \bar{\boldsymbol{D}}^{\mathrm{p}} + \bar{\boldsymbol{W}}^{\mathrm{p}}, \quad \bar{\boldsymbol{D}}^{\mathrm{p}} := \operatorname{sym}\bar{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{p}}, \quad \bar{\boldsymbol{W}}^{\mathrm{p}} := \operatorname{skew}\bar{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{p}} \tag{7}$$

塑性流動則として $\bar{\boldsymbol{D}}^{\mathrm{p}}$ の発展則を次式のように与える.

$$\bar{\boldsymbol{D}}^{\mathrm{p}} = \dot{\lambda}\operatorname{sym}\frac{\partial g}{\partial \bar{\boldsymbol{M}}} \bigg/ \left\|\operatorname{sym}\frac{\partial g}{\partial \bar{\boldsymbol{M}}}\right\| \tag{8}$$

ここで $\dot{\lambda} \geq 0$ は塑性乗数である. $\bar{\boldsymbol{W}}^{\mathrm{p}}$ は, ここではゼロとする.

$$\bar{\boldsymbol{W}}^{\mathrm{p}} := \boldsymbol{O} \tag{9}$$

### (6) 中間配置 $\bar{\mathcal{K}}$ を参照する下負荷面関数

中間配置 $\bar{\mathcal{K}}$ を参照する修正応力 $\bar{M}^{\mathrm{mod}}$ の 3 不変量 $\bar{P}^{\mathrm{mod}}$，$\bar{Q}^{\mathrm{mod}}$，$\bar{\Theta}^{\mathrm{mod}}$ を用いた $\bar{\boldsymbol{M}}^{\mathrm{rot}}$ の下負荷面関数 $f$ の定義を以下に示す. 以下の式で用いている $\bar{P}^{\mathrm{mod}}$，$\bar{Q}^{\mathrm{mod}}$，$\bar{\Theta}^{\mathrm{mod}}$ はそれぞれ，修正 Mandel 応力 $\bar{\boldsymbol{M}}$ の平均垂直応力，偏差不変量，Lode 角である.

$$f(\bar{\boldsymbol{M}}, \bar{\boldsymbol{M}}^{\mathrm{rot}}, P_{\mathrm{c}}, R) := \frac{(\bar{Q}^{\mathrm{mod}})^2}{\left\{M(\bar{\Theta}^{\mathrm{mod}})\right\}^2 - c(\bar{\eta}^{\mathrm{rot}})^2} + (\bar{P}^{\mathrm{mod}} - P_{\mathrm{t}})\left[\bar{P}^{\mathrm{mod}} - \{P_{\mathrm{t}} + R(P_{\mathrm{c}} - P_{\mathrm{t}})\}\right] \tag{10}$$

式中の材料定数は表-1 に示した通りである. また，$\bar{\eta}^{\mathrm{rot}}$ は回転硬化の程度を表す応力比変数である. これを右辺第 1 項の分母に用いることにより，回転硬化の進行に伴う楕円形 Cam-clay 降伏面の扁平化を導入している. $c$ はその係数である.

### (7) 塑性体積ひずみによる等方硬化則及び塑性偏差ひずみによる硬化・軟化の導入

Cam-clay モデルで一般に用いられる，塑性体積ひずみと圧密降伏応力を関係づける等方硬化則は次式の通りである. 式中の材料定数は表-1 に示した通りである.

$$P_{\mathrm{c}} = P_{\mathrm{t}} + (P_{\mathrm{c0}} - P_{\mathrm{t}})\exp\left(-\frac{1}{\lambda^* - \kappa^*}\varepsilon^{\mathrm{p}}_{\mathrm{v}}\right) \tag{11}$$

**Key Words:** 有限変形, 弾塑性構成式, *Cam-clay* モデル, 回転硬化, 繰返しせん断変形
〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06, Phone: 022-795-7417, E-mail:yuki.yamakawa.c7@tohoku.ac.jp

本研究では (11) の速度形をベースとして，次式のように塑性偏差ひずみによる等方硬化・軟化を導入する．本研究ではこれを偏差硬化・軟化とよぶ．

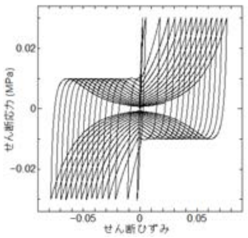
$$\frac{(P_\mathrm{c}-P_\mathrm{t})^\bullet}{P_\mathrm{c}-P_\mathrm{t}}=-\frac{1}{\lambda^*-\kappa^*}\dot{\varepsilon}_\mathrm{v}^\mathrm{p}+h_\mathrm{s}(\chi)\dot{\varepsilon}_\mathrm{s}^\mathrm{p} \tag{12}$$

ここで，$h_\mathrm{s}(\chi)$ は塑性偏差ひずみによる等方硬化係数で，応力比や塑性偏差ひずみに依存した硬化・軟化を導入した．

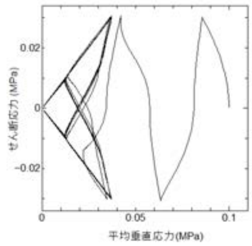
## 3. 各検討結果

### (1) 解析結果の一例と比較・検討

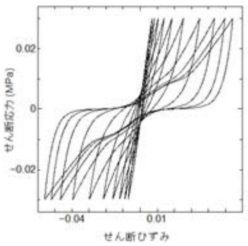
非排水条件を想定して体積一定拘束のもとで $x_{12}$ 方向に繰返しせん断変形を与える解析を行った. 初期等方応力を $P_0=-100\,\mathrm{kPa}$ とし,$|\sigma_{12}|=30\mathrm{kPa}$ に達したら変形を反転させるひずみ振幅制御を行った. **表–1** の材料定数を用いた場合の, 応力-ひずみ関係図と応力経路を **図–1**, **図–2** に示す. また, 比較のため既往研究の解析結果を**図–3**, **図–4** に示す (紙面の都合上, その解析で用いた材料定数は省略する).



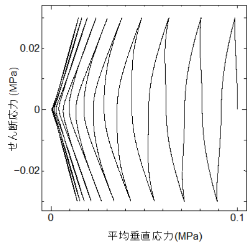
**図–1** 応力-ひずみ経路



**図–2** 応力経路



**図–3** 応力-ひずみ経路 (既往)

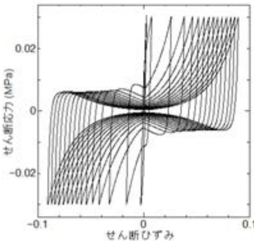


**図–4** 応力経路 (既往)

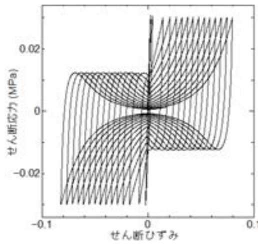
**表–1** 材料定数（繰返しせん断試験）

| 材料定数 | 値 |
|---|---|
| 弾塑性圧縮指数 $\lambda^*$ | $5.0\times10^{-2}$ |
| 弾性圧縮指数 $\kappa^*$ | $3.3\times10^{-3}$ |
| せん断弾性係数の基準値 $\mu_0^\mathrm{e}$ | 20.3 MPa |
| 圧力 $p_i$ 時のせん断弾性係数 $\mu_\mathrm{i}^\mathrm{e}$ | 0.0 MPa |
| せん断弾性係数の圧力依存係数 $\alpha$ | 0.6 |
| 軸対称圧縮状態での限界応力比 $M_\mathrm{TC}$ | 1.431 |
| 軸対称圧縮状態での塑性ポテンシャル面の形状比 $N_\mathrm{TC}$ | 1.431 |
| 弾性引張限界応力 $p_\mathrm{i}$ | $1.0\times10^{-3}$ kPa |
| 塑性引張限界応力 $p_\mathrm{t}$ | $1.0\times10^{-3}$ kPa |
| 回転硬化による降伏面の扁平化係数 $c$ | 6.0 |
| 回転硬化限界応力比 $M_\mathrm{r,TC}=1.2$ | 1.2 |
| 回転硬化の発展係数 $b_\mathrm{r}$ | 50 |
| 回転硬化則の非線形性を表す指数 $\beta$ | $1.0\times10^{-6}$ |
| 偏差硬化・軟化境界応力比 $M_\mathrm{d,\ TC}$ | 0.6 |
| 偏差硬化・軟化係数 $h_{s1}$ | 4.0 |
| 偏差硬化・軟化に用いる定数 $a$ | 10.0 |
| 偏差硬化・軟化に用いる定数 $b$ | 10.0 |
| 弾性限界の正規降伏比 $R_\mathrm{e}$ | $1.0\times10^{-6}$ |
| 下負荷面発展係数の基準値 $u_0$ | 10 |
| 下負荷面発展係数の Lode 角依存性 $\upsilon$ | 3.0 |
| 累積偏差塑性ひずみによる | |
| 下負荷面発展係数の減少指数 $\varsigma$ | $1.8\times10^{+2}$ |
| 先行圧密応力 $P_\mathrm{c0}$ | –100 kPa |
| 過圧密比 OCR | 6.0 |

応力経路について**図–2** と**図–4** を比較すると, 平均有効応力が低下していく過程や, サイクリック・モビリティにみられる典型的な挙動に関して再現性の向上がみられる. 一方で応力-ひずみ関係図については, **図–1** から, 除荷過程において応力が 0 を通過した後に, 剛性が急速に低下し始めていることが分かる. 通常, 繰返しせん断変形によって平均垂直応力が 0 へ近づくと, せん断応力の符号反転の手前で剛性低下が始まる. その後, 剛性がゼロに近い状態で進展するひずみが次第に大きくなり, 繰返し変形にともなってひずみ振幅が増加していく. しかし今回の解析結果では, 除荷過程において応力が 0 を通過した後に剛性が急激に低下し, 一旦軟化を示した後に剛性回復に転じており, 実験で観察される典型的な挙動とは異なる挙動となってしまった. 今回は, この問題点に対して硬化則に着目し, 回転硬化と偏差硬化・軟化に関する材料定数を変化させ改良を試みた. ここでは回転硬化発展係数 $b_\mathrm{r}$ を変化させた結果を示す.



**図–5** br=20 hs1=4.0



**図–6** br=80 hs1=4.0

**図–5** と**図–6** より, 回転硬化発展係数 $b_\mathrm{r}$ を小さい値に設定する程, 除荷過程において早い段階で剛性低下が始まることが確認出来る. これは, 発展した回転硬化及びそれに伴う降伏面の扁平化の解消が遅い程, 逆負荷側の塑性変形が早く開始するためだと考えられる. しかし,$b_\mathrm{r}$ をかなり小さい値に設定した場合においても, 十分な改善には至らなかった. また, 除荷及び逆負荷過程における回転硬化発展程度 $\eta^\mathrm{rot}$ をステップごとに分析した結果, 応力が 0 を通過する際には除荷開始点での値からほとんど変化しておらず, 約 1.0 であった. 回転硬化限界応力比 $M_\mathrm{r,TC}=1.2$ であることから, 回転硬化は十分に機能していると考えられる.

### (2) 結論

今回は, 除荷から逆負荷へ至る過程での剛性低下から剛性回復へ転じる挙動の再現に注力し, 主に回転硬化の発展と偏差硬化・軟化の観点から改善を試みた. 結果として十分な解決には至らなかったが, 関連するパラメータ設定によって改善傾向は確認できた. 今後もパラメータ調整による挙動の変化を確認し, 本モデルの改良に努める予定である.

### 参考文献

1) A. Elgamal, Z. Yang, E. Parra, A. Ragheb: Modeling of cyclic mobility in saturated cohesionless soils. *International Journal of Plasticity,* Vol. 19, pp. 883–905, 2003.
2) Feng Zhang, Bin Ye, Toshihiro Noda, Masaki Nakano, Kentaro Nakai: Explanation of cyclic mobility of soils: Approach by stress-induced anisotropy. *Soils and Foundations,* Vol. 47, No. 4, pp. 635–648, 2007.
3) 橋口公一, 間瀬辰也: 下負荷面モデルによるサイクリックモビリティの物理的解釈と定量的表現. 地盤工学ジャーナル, 地盤工学会, Vol. 6, No. 2, pp. 225–241, 2011.
4) Jian-Min Zhang, Gang Wang: Large post-liquefaction deformation of sand, part I: physical mechanism, constitutive description and numerical algorithm. *Acta Geotechnica,* Vol. 7, pp. 69–113, 2012.
5) Rui Wang, Jian-Min Zhang, Gang Wang: A unified plasticity model for large post-liquefaction shear deformation of sand. *Computers and Geotechnics,* Vol. 59, pp. 54–66, 2014.
6) Alireza Najma, Manouchehr Latifi: Predicting flow liquefaction, a constitutive model approach. *Acta Geotechnica,* Vol. 12, Issue 4, pp. 793–808, 2017.
7) Fusao Oka, Sayuri Kimoto: A cyclic elastoplastic constitutive model and effect of non-associativity on the response of liquefiable sandy soils. *Acta Geotechnica,* Vol. 13, pp.1283–1297, 2018.