

圧力依存性接線係数を有する地盤材料の 超弾性構成則の基本特性に関する研究

東北大学工学部建築・社会環境工学科 学生会員 ○小山 直人
東北大学大学院工学研究科土木工学専攻 正会員 山川 優樹
東北大学大学院工学研究科土木工学専攻 フェロー会員 池田 清宏

1. はじめに

弾塑性構成則において弾性構成則は重要な役割を果たし、主に歪弾性と超弾性の2種類が利用されている。大ひずみ弾塑性構成則を適切に定式化するために変形速度テンソルの弾性・塑性部分への加算分解をベースとして弾性部分に歪弾性構成則を用いる方法が幅広く採用され、1980年代まではこれが有限変形弾塑性構成則の唯一の枠組みであった。その後、変形勾配テンソルの乗算分解と超弾性構成則に基づく有限ひずみ弾塑性構成理論の枠組みが J. C. Simo などの研究者によって提案され、普及が進んできた。

弾性応答をより正確に記述するためには、弾性部分に超弾性構成則を採用するのが望ましい。これまでに地盤材料を対象とした数種の超弾性モデルが提案されている。これらの超弾性モデルでは、地盤材料の弾性特性に特有の力学特性である体積・せん断弾性係数の圧力依存性が表現されているが、その表現形式は様々である。

本研究では地盤材料を対象とした4つの典型的なタイプの超弾性モデルの基本特性について調べる。一部の超弾性モデルでは変形の進行過程で不合理な応力低下がみられたため、その点については重点的に調べる。

2. 地盤材料を対象とした超弾性モデル

(1) 変形勾配テンソルの乗算分解

変形勾配テンソル \mathbf{F} の弾性部分・塑性部分への乗算分解を仮定する。

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \mathbf{F}^p \quad (1)$$

中間配置 $\bar{\mathbf{C}}$ を参照する弾性右 Cauchy–Green 変形テンソル $\bar{\mathbf{C}}^e$ を次のように定義し、これを用いて弾性変形を記述する。

$$\bar{\mathbf{C}}^e := \mathbf{F}^{eT} \mathbf{F}^e \quad (2)$$

また、これと仕事共役な中間配置を参照する第二 Piola–Kirchhoff 応力テンソル $\bar{\mathbf{S}}$ と Mandel 応力テンソル $\bar{\mathbf{M}} = \bar{\mathbf{C}}^e \bar{\mathbf{S}}$ を用いる。

(2) 超弾性構成式

本論文では、4種類の超弾性モデルの基本特性を調べる。以下に各モデルの中間配置での Mandel 応力を与える構成式を示す。また、式中の α は圧力依存性を表す材料定数であるが、各モデルによってその意味合いは異なる。

Model 1 このモデルは、Houlsby¹⁾ や Borja and Tamagnini²⁾ の2不変量表示超弾性モデルにおける弾性接線係数の圧力依存性の表現方法を用いつつ、Neo-Hooke 超弾性モデルの形式に準じてテンソル表示したものである。

$$\bar{\mathbf{M}} = \left[P_1 + (P_0 - P_1) \left(\frac{J^e}{J_0^e} \right)^{-1/\kappa^*} \right] \times \left\{ 1 + \frac{\alpha}{2\kappa^*} (\text{tr} \bar{\mathbf{C}}_{\text{dis}}^e - 3) \right\} \mathbf{I} + \mu^e(J^e) (\bar{\mathbf{C}}_{\text{dis}}^e)_{\text{dev}} \quad (3)$$

せん断弾性係数には次のように圧力依存性が考慮されている。

$$\mu^e(J^e) := \mu_1^e - \alpha(P_0 - P_1) \left(\frac{J^e}{J_0^e} \right)^{-1/\kappa^*} \quad (4)$$

Model 2 このモデルは Hashiguchi³⁾ が提案したもので、Model 1 でのせん断弾性係数 $\mu^e(J^e)$ を式 (6) で置き換え、せん断弾性係数が圧力のべき乗に比例する形式にしたものである。

$$\bar{\mathbf{M}} = \left[\left\{ P_1 + (P_0 - P_1) \left(\frac{J^e}{J_0^e} \right)^{-1/\kappa^*} \right\} - \frac{\alpha}{2\kappa^*} (\mu_0^e - \mu_1^e) \left(\frac{J^e}{J_0^e} \right)^{-\alpha/\kappa^*} (\text{tr} \bar{\mathbf{C}}_{\text{dis}}^e - 3) \right] \mathbf{I} + \mu^e(J^e) (\bar{\mathbf{C}}_{\text{dis}}^e)_{\text{dev}}, \quad (5)$$

$$\mu^e(J^e) := \mu_1^e + (\mu_0^e - \mu_1^e) \left(\frac{J^e}{J_0^e} \right)^{-\alpha/\kappa^*} \quad (6)$$

Model 3 Model 3 は、Houlsby¹⁾ の2不変量表示モデルを Borja and Tamagnini²⁾ が対数弾性ひずみを用いることにより有限変形へ拡張したものである。

$$\bar{\mathbf{M}} = p \mathbf{I} + \frac{q}{3\varepsilon_s^e} (\log \bar{\mathbf{C}}^e)_{\text{dev}}, \quad (7)$$

$$p = P_0 \left\{ 1 + \frac{3\alpha P_0}{2\kappa^*} (\varepsilon_s^e)^2 \right\} \exp \left(-\frac{\varepsilon_v^e - \varepsilon_{v0}^e}{\kappa^*} \right), \quad (8)$$

$$q = 3 \left\{ \mu_1^e - P_0 \alpha \exp \left(-\frac{\varepsilon_v^e - \varepsilon_{v0}^e}{\kappa^*} \right) \right\} \varepsilon_s^e \quad (9)$$

Model 4 Model 4 は、Houlsby et al.⁴⁾ が提案したもので、Model 3 で用いた応力の2不変量 p 、 q を式 (10)、(11) で置き換えたものである。

$$p = \begin{cases} P_1 + (P_0 - P_1) \left\{ 1 + (1 - \alpha) \left(-\frac{\varepsilon_v^e - \varepsilon_{v0}^e}{\kappa^*} \right) \right\} A^{\alpha/(2-2\alpha)} & \text{for } 0 \leq \alpha < 1, \\ P_1 + (P_0 - P_1) \exp B & \text{for } \alpha = 1 \end{cases} \quad (10)$$

$$q = \begin{cases} 3\mu_0^e \varepsilon_s^e A^{\alpha/(2-2\alpha)} & \text{for } 0 \leq \alpha < 1, \\ 3\mu_0^e \varepsilon_s^e \exp B = 3\mu_0^e \left(\frac{p - P_1}{P_0 - P_1} \right) \varepsilon_s^e & \text{for } \alpha = 1 \end{cases} \quad (11)$$

$$\begin{cases} A = \left\{ 1 + (1 - \alpha) \left(-\frac{\varepsilon_v^e - \varepsilon_{v0}^e}{\kappa^*} \right) \right\}^2 - \frac{3\mu_0^e(1 - \alpha)}{\kappa^*(P_0 - P_i)} (\varepsilon_s^e)^2, \\ B = -\frac{\varepsilon_v^e - \varepsilon_{v0}^e}{\kappa^*} - \frac{3\mu_0^e}{2\kappa^*(P_0 - P_i)} (\varepsilon_s^e)^2 \end{cases} \quad (12)$$

3. 様々な入力変形に対する網羅的な解析結果

様々な入力変形に対して Mandel 平均垂直応力 p と偏差応力不変量 q を求める。図-1 は Han⁵⁾ らの研究による、側圧一定圧縮による軸対称変形解析の応力ひずみ関係である。同図の Model 1, 2, 3 において、変形の進行過程で不合理な応力低下が確認できる。この結果を踏まえ、式 (13) で入力変形を設定し 2 方向の主ストレッチ λ_2 を同じ値にすることで軸対称変形解析として、所定の範囲の入力変形について網羅的な解析を行い、各モデルの応力を比較し、図-1 の応力低下挙動について検討する。材料定数は各モデル共通で $P_0 = -100$ kPa, $\kappa^* = 3.0 \times 10^{-3}$ として、Model 1 と Model 3 で $\mu_i^e = 60$ kPa, Model 2 で $\mu_0^e = 600$ kPa, $\mu_i^e = 60$ kPa, Model 4 で $\mu_0^e = 600$ kPa とした。このときの図-2 に示す入力範囲における各 Model での解析結果を図-4 に示す。ここでは、紙面の制約により偏差応力不変量 q の結果のみを示す。また、変形の進行過程で不合理な応力低下が起こる範囲に関して、図-3 のようにそのひずみ経路を含む範囲の体積ひずみ ε_v 、偏差ひずみ ε_s について解析した結果を図-5 に示す。図-5 で実線で示したひずみ経路上の q の値をみると、Model 1, 2, 3 では側圧一定圧縮のひずみ経路で応力低下が生じる状況が確認できた。

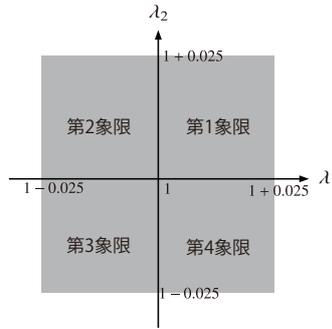


図-2 λ_1, λ_2 を軸とした時の入力変形の範囲

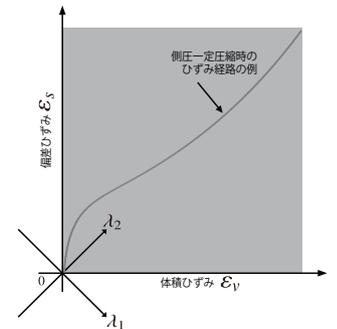


図-3 第2象限に注目した時の解析範囲

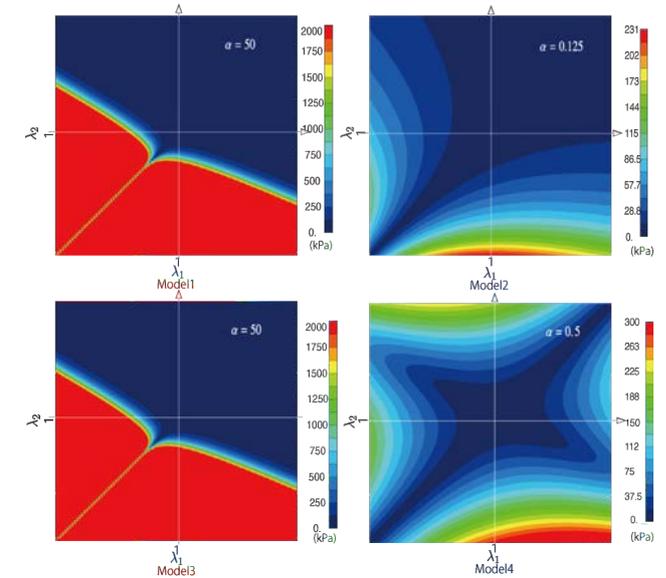


図-4 偏差応力不変量 q の分布 ($\alpha > 0$)

$$\mathbf{F}^e = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \quad (13)$$

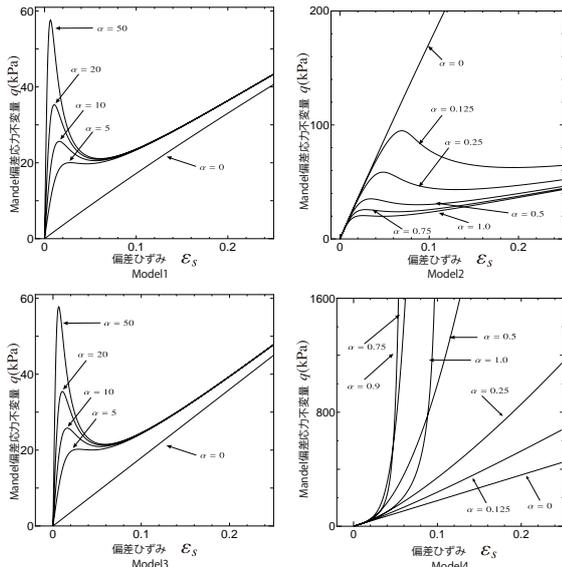


図-1 偏差応力不変量 q における応力低下が起きるひずみ経路

参考文献

- 1) Houslyby, G.T.: The use of variable shear modulus in elastoplastic model for clays. *Comput. Geotech.*, Vol. 1, pp. 3-13, 1985.
- 2) Borja, R.I., Tamagnini, C.: Cam-Clay plasticity, Part III: Extension of the infinitesimal model to include finite strains. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol 155, pp. 73-95, 1998.

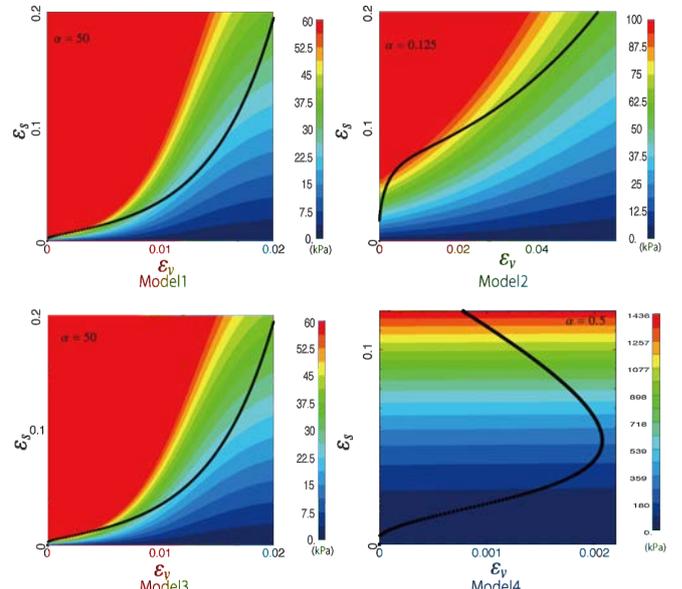


図-5 第2象限に注目した時の偏差応力不変量 q の分布とひずみ経路 ($\alpha > 0$)

- 3) Hashiguchi, K.: Hypo-elastic and hyper-elastic equations for soils. *Int. J. Numer. Anal. Methods Geomech.* Vol. 42, Issue 13, pp. 1554-1564, 2018.
- 4) Houslyby, G.T., Amorosi, A., Rojas, E.: Elastic moduli of soils dependent on pressure: a hyperelastic formulation. *Géotechnique*, Vol. 55, No. 5, pp. 383-392, 2005.
- 5) Minxin, H.: A comparative study of hyperelastic constitutive models with pressure-dependent tangent moduli for geomaterials *Master thesis, Tohoku Univ.*, 2020