有限変形カムクレイモデルの応力計算における塑性発展式の時間積分に関する精度検証

東北大学　学生会員　○町島 智大
東北大学　学生会員　佐藤 祐杜
東北大学　学生会員　井口 拓哉
東北大学　学生会員　羅　家驊
東北大学　正会員　山川 優樹

1.　はじめに

地盤材料の変形挙動を精緻に再現可能な高度な弾塑性構成モデルの開発が進んでいる．陰的差分近似に基づくリターンマッピング・アルゴリズムを用いることにより，高精度の応力計算が可能となる反面，連立非線形方程式の反復収束計算による求解が必要となる．また，変形勾配テンソルの乗算分解に基づく有限変形弾塑性構成則の場合には，塑性流動則の時間積分の際にテンソル指数関数の計算を行う必要があり，その際はテンソル指数関数を級数展開して収束計算を行うことが多い[1)]．このように，高度な構成則の高精度応力計算には大きな計算コストを伴う．しかし一方で，繰返し変形解析など多数の増分ステップでの解析が必要となる場合，計算コストの低減が必要とされてきている．

このことを受けて，リターンマッピング・アルゴリズムにおいて計算量の大きい塑性発展則の時間積分における近似法に着目し，計算コストの低減を試みる．本研究では，(a) 塑性発展則の陰的更新・陽的更新, (b) 時間積分においてテンソル指数関数を用いた計算方法と，級数の高次項を省略して一次近似した場合の二つの方法それぞれについて応力計算の精度及び計算速度を比較・検証する．

2.　有限変形・回転硬化下負荷面カムクレイモデル

(1)　変形勾配テンソルの乗算分解に基づく諸量の定義

変形勾配テンソル $\boldsymbol{F}$ について弾性部分・塑性部分への乗算分解を仮定し，さらに $\boldsymbol{F}^{\mathrm{p}}$ をエネルギー貯蓄部分である $\boldsymbol{F}^{\mathrm{p_e}}$ とエネルギー消散部分である $\boldsymbol{F}^{\mathrm{p_d}}$ に乗算分解を行う．

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}^{\mathrm{e}}\boldsymbol{F}^{\mathrm{p}}, \quad \boldsymbol{F}^{\mathrm{p}} = \boldsymbol{F}^{\mathrm{p_e}}\boldsymbol{F}^{\mathrm{p_d}} \tag{1}$$

上式の乗算分解により，基準配置 $\mathcal{K}_0$ と現配置 $\mathcal{K}$ に加え，塑性変形に関する中間配置 $\bar{\mathcal{K}}$ と回転硬化に関する中間配置 $\tilde{\mathcal{K}}$ が新たに導入される．

(2)　構成式

超弾性ポテンシャル関数は 2 不変量表示のものを用い，それを弾性変形テンソル $\bar{\boldsymbol{C}}^{\mathrm{e}} := \boldsymbol{F}^{\mathrm{eT}}\boldsymbol{F}^{\mathrm{e}}$ で微分することで，それと仕事共役な第 2 Piola–Kirchhoff 応力 $\bar{\boldsymbol{S}}$ を得る．また回転硬化に関する背応力比テンソルを与える構成式は式 (2) に示すように $\tilde{\boldsymbol{C}}^{\mathrm{p_e}} := \boldsymbol{F}^{\mathrm{p_e T}}\boldsymbol{F}^{\mathrm{p_e}}$ の関数として表す．

$$\bar{\boldsymbol{S}} = 2\frac{\partial \mathcal{W}^{\mathrm{e}}(\bar{\boldsymbol{C}}^{\mathrm{e}})}{\partial \bar{\boldsymbol{C}}^{\mathrm{e}}}, \quad \tilde{\boldsymbol{S}}^{\mathrm{rot}} = 2\frac{\partial \mathcal{W}^{\mathrm{rot}}(\tilde{\boldsymbol{C}}^{\mathrm{p_e}})}{\partial \tilde{\boldsymbol{C}}^{\mathrm{p_e}}} \tag{2}$$

(3)　中間配置を参照する下負荷面関数

中間配置 $\bar{\mathcal{K}}$ を参照する Mandel 応力 $\bar{\boldsymbol{M}} := \bar{\boldsymbol{C}}^{\mathrm{e}}\bar{\boldsymbol{S}}$ を用いて回転硬化を表すための修正応力 $\bar{\boldsymbol{M}}_{\mathrm{mod}}$ を以下のように定義する．

$$\bar{\boldsymbol{M}}_{\mathrm{mod}} =: \bar{\boldsymbol{M}} - (-\bar{P} + P_{\mathrm{t}})\bar{\boldsymbol{M}}^{\mathrm{rot}}_{\mathrm{dev}} \tag{3}$$

ここで $\bar{\boldsymbol{M}}^{\mathrm{rot}}_{\mathrm{dev}}$ は式 (2) を変換することで得られる背応力比テンソルである．また, 中間配置 $\bar{\mathcal{K}}$ を参照する修正応力 $\bar{M}^{\mathrm{mod}}$ の 3 不変量 $\bar{P}^{\mathrm{mod}}$, $\bar{Q}^{\mathrm{mod}}$, $\bar{\Theta}^{\mathrm{mod}}$ を用いた下負荷面関数 f の定義を以下に示す．P_{c} は等方硬化に関する降伏応力，P_{t} は平均垂直応力の引張限界値，R は下負荷面モデルの正規降伏比である．

$$f(\bar{\boldsymbol{M}}, \bar{\boldsymbol{M}}^{\mathrm{rot}}, P_{\mathrm{c}}, R) := \frac{(\bar{Q}^{\mathrm{mod}})^2}{\left\{M(\bar{\Theta}^{\mathrm{mod}})\right\}^2 - c(\bar{\eta}^{\mathrm{rot}})^2} + (\bar{P}^{\mathrm{mod}} - P_{\mathrm{t}}) \times \left[\bar{P}^{\mathrm{mod}} - \{P_{\mathrm{t}} + R(P_{\mathrm{c}} - P_{\mathrm{t}})\}\right] \tag{4}$$

(4)　塑性発展則

塑性変形勾配テンソル $\boldsymbol{F}^{\mathrm{p}}$ の発展則は塑性速度勾配テンソル $\bar{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{p}}$ を用いて次の第 1 式で与えられ，これを一般化中点則により時刻 $\mathrm{t}_{n+\theta}$ での $\bar{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{n}+\theta(0\leq\theta\leq1)}$ を用いて時間区間 $[t_n, t_{n+1}]$ で時間積分することにより第 2 式を得る．$\theta = 0$ は陽的更新，$\theta = 1$ は陰的更新となる．

$$\dot{\boldsymbol{F}}^{\mathrm{p}} = \bar{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{p}}\boldsymbol{F}^{\mathrm{p}} \rightsquigarrow \boldsymbol{F}^{\mathrm{p}}_{n+1} = \exp[\bar{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{p}}_{n+\theta}\Delta t]\boldsymbol{F}^{\mathrm{p}}_n \tag{5}$$

本研究では，L^{p} の対称部分を関連流れ則で与え，反対称部分はゼロとしたここで，テンソル $\boldsymbol{Z}$ の指数関数 $\exp \boldsymbol{Z}$ は無限級数表示で表される．

$$\exp \boldsymbol{Z} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\boldsymbol{Z}^k = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{Z} + \frac{1}{2}\boldsymbol{Z}^2 + \frac{1}{6}\boldsymbol{Z}^3 + \dots \tag{6}$$

実際の数値計算では無限級数のうち有限の項数を採用することになるが，次式により級数の収束を判定した．

$$\frac{1}{k!}\|\boldsymbol{Z}^k\| < \mathrm{TOL} \tag{7}$$

本研究における数値解析では $\mathrm{TOL} = 1.0 \times 10^{-15}$ とした．本研究では，2 種類の計算方法を検討する．
(検討 A) 式 (5) で $\theta = 1$ とする陰的近似と $\theta = 0$ とする陽的近似との比較を行う．陽的近似とした場合，次式のように既知量のみにより Fp が更新される．そのためリターンマッピング方程式に式 (5) の第 2 式を連立させる必要がなくなり，式 (4) の単一のスカラー方程式 $f = 0$ だけを解くことになる．

$$\boldsymbol{F}^{p}_{n+1} = \exp[\bar{\boldsymbol{L}}^{p}_n\Delta t]\boldsymbol{F}^{p}_n \tag{8}$$

Key Words:　有限変形理論，弾塑性構成則，カムクレイモデル，リターンマッピング・アルゴリズム，塑性発展則，テンソル指数関数
〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06，東北大学大学院工学研究科土木工学専攻，Phone: 022-795-7420

(検討 B) 式 (6) で，2 次以降の項を無視して第 1 項までのみを用いることで，式 (5) の第 2 式を一次の後退差分近似とした場合次式となる．

$$\boldsymbol{F}^{\mathrm{p}}_{n+1} = (\boldsymbol{I} + \bar{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{p}}_{n+1})\boldsymbol{F}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{n}} = \boldsymbol{F}^{\mathrm{p}}_{n} + \bar{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{p}}_{n+1}\boldsymbol{F}^{\mathrm{p}}_{n} \qquad (9)$$

式 (1) の $\boldsymbol{F}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{d}}$ の発展則も回転硬化の発展を規定する上で必要であるが，ここでは紙面の制約により省略する．

3.　計算精度および計算速度の検証解析

本研究では，式 (8) を用いて塑性発展則をを陽的更新した場合と，テンソル指数関数を 1 次近似することで塑性発展則を式 (9) とした場合のそれぞれについて，応力計算精度及び計算速度の比較を行う．

(1)　変形増分の設定

所定のせん断変形・体積変形の制御を与え，その入力変形に対する応力計算結果を誤差評価式により比較する．変形制御の解析については，変形勾配 $\boldsymbol{F}$ を，

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_{*}\boldsymbol{F}_0,\ \boldsymbol{F}_{*} = \begin{bmatrix} 1+H_{\mathrm{v}} & H_{\mathrm{s}} & 0 \\ 0 & 1+H_{\mathrm{v}} & 0 \\ 0 & 0 & 1+H_{\mathrm{v}} \end{bmatrix} \qquad (10)$$

と表し，せん断変形に対応する H_{s} と体積変形に対応する H_{v} を指定し解析を行う．ここで，$\boldsymbol{F}_0$ は初期状態を規定する変形勾配であり，ここでは，$\boldsymbol{F}_0 = \boldsymbol{I}$ とする．解析範囲は $0.00 \leq H_{\mathrm{s}} \leq 0.20$，$-0.02 \leq H_{\mathrm{v}} \leq 0.02$ とした．比較検証の方法として，所定の変形を 10 ステップに等分割したときの数値解を参照解との相対誤差を次式で評価する．尚、参照解は数値的に求めることはできないため，所定の変形を 1000 ステップに等分割して与えた数値解で代用することととする．

$$\mathrm{ERR} := \frac{\|\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}^{*}\|}{\|\boldsymbol{\tau}^{*}\|} \times 100 \quad (\%) \qquad (11)$$

ここで $\boldsymbol{\tau}$ は 10 ステップ解析で得られた Kirchhoff 応力の数値解であり，上添字 $(*)$ がついた量が参照解である．

また計算コストについては，実際の計算量を計測するのは難しいため，1000 ステップ等分割解析において，所定の変形解析を 500 回実行した時間から 1 回あたりの平均計算時間を算出し，下式を用いた相対時間比を用いて比較した．

$$\mathrm{TimeRatio} := \frac{\mathrm{T} - \mathrm{T}^{*}}{\mathrm{T}^{*}} \times 100 \quad (\%) \qquad (12)$$

ここで T^{*} は従来の計算方法 (塑性発展則を陰的更新し，テンソル指数関数を級数を用いて計算した場合) の計算時間とし，T は検討 A，B それぞれについて 1000 ステップ解析をした場合の計算時間とした．

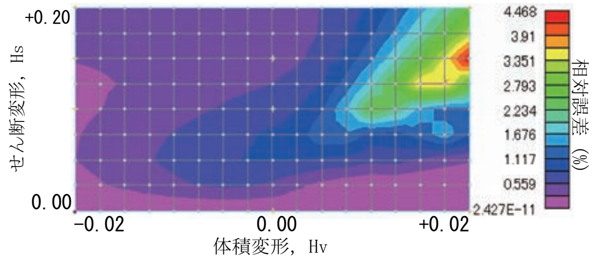
(2)　検証と考察

(検証 A)：塑性発展式を陽的更新した場合

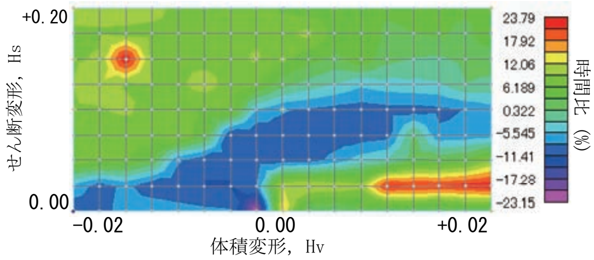
所定の変形を 10 ステップ分割で与えた計算結果を**図–1** に縦軸を H_s，横軸を H_v とした誤差マップで示す．また 1000 ステップ分割解析の相対時間比を**図–2** に示す．計算時間については**図–2** より，主に圧縮変形を与えた時に計算時間が改善しており最大 20% 以上の削減が確認できたが，膨張変形と小さいせん断変形を与えたときに計算時間が極端に悪化してしまうことが確認された．

(検証 B)：テンソル指数関数 1 次近似した場合

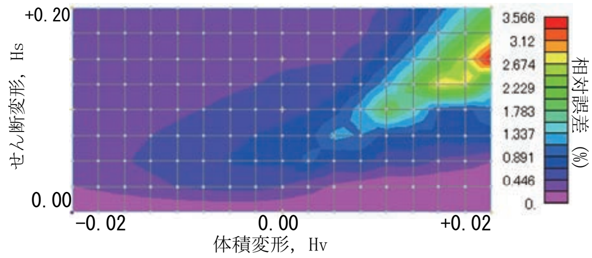
(検証 A) と同様の計算を行った結果の誤差マップを**図–3** に，また相対時間比マップを**図–4** に示す．誤差は**図–1** と比較して同程度であり，同様に応力計算精度への影響は小さいと考えられる．また計算時間について，**図–4** をみると，多くの部分で数%程度の改善が確認されたが，塑性発展則を陽的更新した場合のような顕著な改善は見られなく，計算コストの面での有効性は小さい事が確認された．また膨張変形を与えたときに計算時間が比較的悪化する点には注意が必要である．これらの計算方法を組み合わせたり使い分けたりすることでさらに計算コストを削減できる可能性があるが，どのような基準とするかはより厳密な検討が必要である．



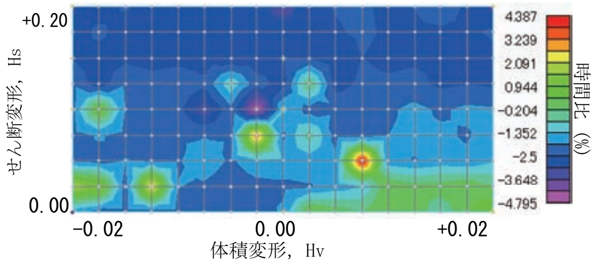
図–1　応力計算誤差 (塑性発展則の陽的更新)



図–2　計算時間比マップ (塑性発展則の陽的更新)



図–3　応力計算誤差 (テンソル指数関数の 1 次近似)



図–4　計算時間比マップ (テンソル指数関数の 1 次近似)

参考文献

1) de Souza Neto, E.A.: The exact derivative of the exponential of an unsymmetric tensor, *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 190, pp. 2377–2383, 2001.
2) Hashiguchi, K.: Hypo-elastic and hyper-elastic equations for soils. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Vol. 42, Issue 13, pp. 1554-1564, 2018.