

断面変形梁理論に基づくせん断遅れによる付加的な応力の評価

東北大学工学部

○学生会員

三井涼平

東北大学大学院工学研究科

正会員

斉木 功

1. はじめに

幅広フランジを持つ梁のフランジにおける曲げ応力の橋軸直角方向分布は、せん断遅れのために一様ではなく、ウェブ上の曲げ応力は初等梁理論よりも大きくなる。橋梁の設計においては、応力の照査が主となることから、一般的に有効幅により見掛け上の曲げ剛性を小さくすることでせん断遅れが考慮される¹⁾。しかし、せん断遅れは曲げではなく、せん断変形に起因する断面変形によって生じる。したがって、断面変形を考慮することでフランジにおける曲げ応力分布をより正確に評価することが可能になると考えた。

梁理論を拡張し、せん断遅れ変形を直接取り入れた理論は、Reissner²⁾により提案された。その後、斉木・鄭³⁾は、せん断遅れと横せん断による断面変形を統一的に考慮できる梁理論を提案している。この方法では、代表体積要素に一樣せん断変形を与えたときの軸方向変位をそのまま断面変形モード f として用いている。そして、得られた f から決定される断面パラメタを用いて、たわみや軸ひずみなどの解析解が求められる。

そこで、断面変形を考慮した梁理論³⁾で提案されている方法を用いて、パラメトリックスタディを実施し、断面形状や寸法と、断面パラメタとの相関を示し、断面変形に起因する付加的なひずみ算定のための推定式の提案を行う。

2. 断面変形を考慮した梁の軸ひずみ

この章では、梁のせん断遅れ変形と横せん断変形による断面変形を統一的に考慮可能な梁理論³⁾による軸ひずみの解析解を示す。図-1のように単純支持されて等分布荷重 q を受けるときの軸ひずみの解析解は、

$$\epsilon_{11} = \frac{qz}{K_b} \left(\frac{1}{2} \ell x - \frac{1}{2} x^2 \right) + q \frac{f}{K_{\text{seq}}} \frac{e^{-\frac{kf}{2}} e^{kx} - e^{\frac{kf}{2}} e^{-kx}}{e^{\frac{kf}{2}} + e^{-\frac{kf}{2}}} - q \frac{f}{K_{\text{seq}}} \quad (1)$$

と表される。ここに、 e は Napier 数、 K_b は曲げ剛性、 k 、 K_{seq} は断面変形モード f から得られる断面パラメタである。右辺の第1項は Euler-Bernoulli 梁の曲げによるひずみ、第2項以降が断面変形に起因する付加的

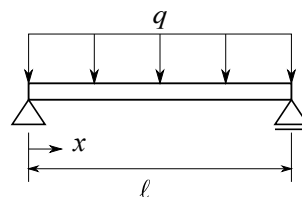


図-1 等分布荷重を受ける単純梁

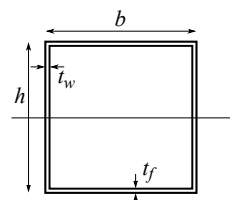


図-2 箱断面

なひずみである。式(1)に示すように、軸ひずみの解析解は f/K_{seq} と k によって決まる。また、支間中央部においては、第2項はその他の項と比較して相対的に小さく、 f/K_{seq} が支配的である。なお、支持条件や荷重条件を変えても、上記の2つの変数によって断面変形に起因する付加的なひずみが決定されることは確認できている。

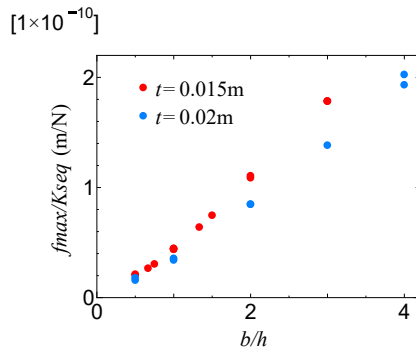
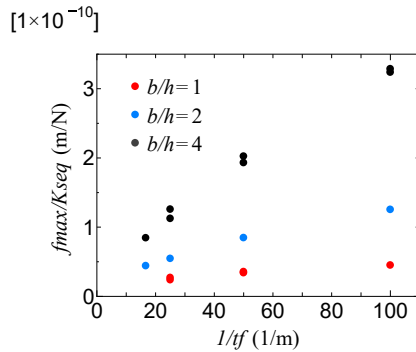
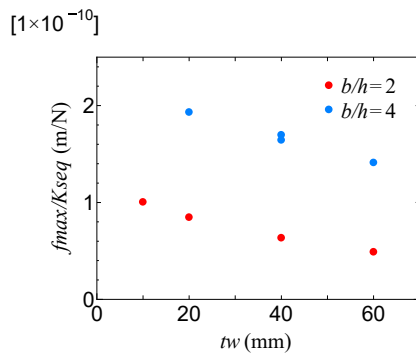
3. パラメトリックスタディ

せん断遅れと横せん断による断面変形が曲げに対して無視できない影響をおよぼす典型的な部材として、図-2に示す単一材料の箱断面を選択する。この箱断面に対して、断面変形梁理論で採用する変位場に必要断面変形モード $f(x_2, x_3)$ を求めるために、文献⁴⁾に基づき代表体積要素に単位の横せん断変形を与えた。代表体積要素は1次6面体アイソパラメトリック要素を用いて離散化した。図-2において、 b は断面の幅、 h は断面の高さ、 t_f はフランジ厚、 t_w はウェブ厚を表す。これらのパラメータを変化させ、 f/K_{seq} との相関を検討する。

設計において問題となる最大ひずみに着目する。Euler-Bernoulli 梁の曲げによるひずみは、断面の中立面から最も離れた位置で最大になり、橋軸直角水平方向に一様である。また、前述のように、支間中央部においては、断面変形に起因する付加的なひずみは、 f/K_{seq} が支配的である。そこで、フランジ上面の断面変形モード f の最大値を f_{max} として、 $f_{\text{max}}/K_{\text{seq}}$ の推定について述べる。

Key Words: shear lag, transverse shear, deformation of cross section, box girder

〒980-8579 仙台市青葉区荒巻青葉 6-6-06

図-3 $f_{\max}/K_{\text{seq}}$ と b/h の関係図-4 $f_{\max}/K_{\text{seq}}$ と $1/t_f$ の関係図-5 $f_{\max}/K_{\text{seq}}$ と t_w の関係

$t_f = t_w$ として、 $f_{\max}/K_{\text{seq}}$ とアスペクト比 b/h の関係を板厚ごとに図-3に示す。 $0.5 < b/h < 4$ の範囲では、 $f_{\max}/K_{\text{seq}}$ と b/h にはほぼ比例関係がある。これは、 b/h が大きくなると、せん断遅れの影響が大きくなるためだと考えられる。また、板厚ごとに結果を比較すると、断面の大きさにはほとんど関係なく、アスペクト比 b/h によって $f_{\max}/K_{\text{seq}}$ が決定されることが明らかになった。図-4に、 $t_w = 20\text{mm}$ として b/h ごとに、 $f_{\max}/K_{\text{seq}}$ と $1/t_f$ の関係を表す。この結果は、フランジの板厚が薄くなると、せん断遅れの影響は大きくなることを示している。図-5に、 $t_f = 20\text{mm}$ として b/h ごとに、 $f_{\max}/K_{\text{seq}}$ と t_w の関係を表す。 $f_{\max}/K_{\text{seq}}$ が、 t_w とほぼ線形の関係を示している。

4. 付加的なひずみの推定

以上の結果から、 $f_{\max}/K_{\text{seq}}$ を b/h 、 $1/t_f$ 、 t_w の多項式で表すこととし、各項の係数を最小二乗法で決定す

表-1 ウェブ上の軸ひずみ相対差の比較（支間中央）

本提案	断面変形梁 ³⁾	Euler 梁	示方書
1.6×10^{-2}	1.2×10^{-2}	-4.4×10^{-2}	4.4×10^{-2}

ると、

$$\frac{f_{\max}}{K_{\text{seq}}/G} = -0.28 \frac{b}{h} \frac{1}{t_f} t_w + 0.068 \frac{b}{h} \frac{1}{t_f} - 13 \frac{b}{h} t_w - 0.89 \frac{1}{t_f} t_w + 1.2 \frac{b}{h} - 0.021 \frac{1}{t_f} + 15 t_w + 0.30 \quad (2)$$

となった。ただし、長さの単位は m とし、 K_{seq} は、断面のせん断剛性なので、せん断弾性係数 G で規格化した。これらの係数は $0.5 < b/h < 4$ 、 $0.01 < t_f < 0.04$ 、 $0.01 < t_w < 0.04$ の範囲の結果を用いて算出し、相関係数は 0.997 であった。

構築した推定式の精度を検証する。箱断面の寸法は幅 $b = 5.0\text{m}$ 、高さ $h = 2.5\text{m}$ 、板厚 $t_w = t_f = 15\text{mm}$ とした。材料の Young 率は $E = 2 \times 10^{11} \text{N/m}^2$ 、Poisson 比はゼロとした。図-1に示す単純支持梁の境界値問題を考え、 $\ell = 25\text{m}$ として、通常の実体ソリッド要素による数値解析結果を参照解とする。また、道路橋示方書¹⁾と比較するために、有効幅を用いて断面形状を定義し、Euler 梁と同様にして解を求めた。参照解を基準とした相対差を表-1に示す。本論文で提案した推定式(2)は、斉木・鄭の断面変形梁³⁾と同様に示方書より良い精度で参照解を再現できた。

5. 結論

箱断面を対象に、斉木・鄭のせん断遅れと横せん断による断面変形を統一的に考慮できる梁理論³⁾で用いる断面パラメタと、断面形状との相関を明らかにした。そして、その断面パラメタの推定式を提案し、断面変形に起因する付加的なひずみを評価することができた。しかし、推定式は箱断面の支間中央部に限定されるもので、連続桁の中間支点などについては、今後の検討が必要と考える。

参考文献

- 1) 日本道路協会：道路橋示方書・同解説，Ⅱ 鋼橋・鋼部材編，2017。
- 2) Reissner, E.: Analysis of shear lag in box beam by principle of minimum potential energy, *Q. Appl. Math.*, 4(3), pp.268-278, 1946。
- 3) 斉木功，鄭勲：せん断遅れと横せん断による断面変形を統一的に考慮した梁理論，土木学会論文集 A2, Vol.77, No.1, pp.1-11, 2021。
- 4) 斉木功，藤本竜太，山本剛大：非均質断面梁のせん断剛性評価に用いる断面の回転に関する一考察，土木学会論文集 A2, Vol.74, pp.I.3-I.11, 2018。