

## 断面変形を考慮した梁の動的特性に関する検討

東北大学大学院工学研究科 学生会員 ○星屋 美優  
東北大学大学院工学研究科 正会員 齊木 功

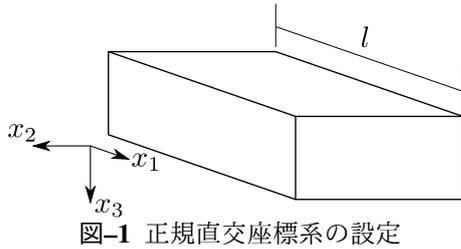


図-1 正規直交座標系の設定

## 1. はじめに

橋梁等の構造解析において、梁要素によりモデル化できれば、連続体要素でモデル化した場合よりも自由度を低減でき、効率的に解析できる。しかし、薄肉断面や複合断面のような断面変形が無視できない部材においては、断面平面保持を仮定した一般的な梁要素を使用すると、解析精度が低下する。支間に比べて桁高や幅が小さくない場合、断面変形の影響が大きくなることが知られている。

梁の断面変形はせん断遅れや横せん断といった要因ごとに研究がなされたが、近年では、均質化梁理論により任意断面のフランジのせん断遅れやウェブの面外せん断変形などの断面変形を考慮した梁理論が開発されている<sup>1),2)</sup>。

動的問題を考える場合、高次の振動モードでは曲げの波長が短くなる。そのため、せん断変形の影響が相対的に大きくなることが知られており、Timoshenko 梁の動的特性に関する研究<sup>3),4)</sup>が盛んに行われてきた。しかしながら、断面変形が梁の動的特性に及ぼす影響は明らかにされていない。そこで、本研究では断面変形を考慮した梁に動的特性を組み込んで定式化し、従来の梁との精度を比較することで、断面変形が動的問題に及ぼす影響を検証する。

## 2. 支配方程式の定式化

### (1) 変位場の設定

図-1 に示すような長さ  $l$  の  $x_1$  方向に一様な断面の梁を解析対象とし、正規直交座標系を設定する。 $x_1$  方向の解析対象領域を  $L = \{x_1 | 0 \leq x_1 \leq l\}$ 、断面の解析対象領域を  $A$  とする。梁断面の重心を  $x_2, x_3$  の原点とすると、時刻  $t$  のときの梁の  $x_1$  軸方向変位場は、

$$u_1 = x_3 \theta(x_1, t) + f(x_2, x_3) g(x_1, t) \quad (1)$$

と表すことができる。ここで、 $\theta(x_1, t)$  は梁の断面の回転、 $g(x_1, t)$  は断面変形の大きさである。 $x_2, x_3$  軸方向変位場は、 $u_2 = 0, u_3 = u_3(x_1, t)$  とすると、ひずみは

$$\epsilon_1 = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = x_3 \theta' + f g' \quad (2)$$

$$\epsilon_3 = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0 \quad (3)$$

$$\gamma_{12} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = f_{,2} g \quad (4)$$

$$\gamma_{13} = \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} = \tilde{\gamma} + f_{,3} \quad (5)$$

と表すことができる。ここで、 $(\cdot)'$  は  $x_1$  に関する導関数、 $(\cdot)_{,i}$  は  $x_i$  に関する偏導関数を表す。また、 $\tilde{\gamma} = \theta + u_3'$  は梁の横せん断ひずみである。

### (2) 仮想仕事式

解析対象領域を  $V := L \times A$  とし、慣性力と単位軸方向長さ当たりの  $x_3$  方向の分布荷重  $q(x_1, t)$ 、境界条件としての表面力  $p_i (i = 1, 3)$  を考慮した仮想仕事式は、

$$\begin{aligned} & \int_V \{E \epsilon_1 \delta \epsilon_1 + G(\gamma_{12} \delta \gamma_{12} + \gamma_{13} \delta \gamma_{13}) \\ & + \rho(\ddot{u}_1 \delta u_1 + \ddot{u}_3 \delta u_3)\} dV \\ & = \int_L q \delta u_3 dx_1 + \int_{\partial V} (p_1 \delta u_1 + p_3 \delta u_3) dA \end{aligned} \quad (6)$$

と表せる。ここで、 $(\cdot)$  は時間導関数である。上式に式(1)~(5)を代入し変形し、断面積分を実行すると、弱形式の支配方程式

$$\begin{aligned} & \int_L \{ (K_b \theta' + R_1 g')(\delta \tilde{\gamma}' - \delta u_3) + (R_1 \theta' + R_2 g') \delta g' \\ & + (K_s \tilde{\gamma} + R_4 g) \delta \tilde{\gamma} + (R_4 \tilde{\gamma} + R_3 g) \delta g \\ & + (L_1 \ddot{\theta} + L_3 \ddot{g})(\delta \tilde{\gamma} - \delta u_3') + (L_3 \ddot{\theta} + L_4 \ddot{g}) \delta g + L_2 \ddot{u}_3 \delta u_3 \} dx_1 \\ & = \int_L q \delta u_3 dx_1 + (\bar{M}(\delta \tilde{\gamma} - \delta u_3') + \bar{D} \delta g + \bar{Q} \delta u_3) |_{x_1=0,l} \end{aligned} \quad (7)$$

が得られる。ここで、パラメータ  $K_b, K_s, R_i, L_i$  および端部断面に作用する外力の合応力  $\bar{M}, \bar{D}, \bar{Q}$  は、

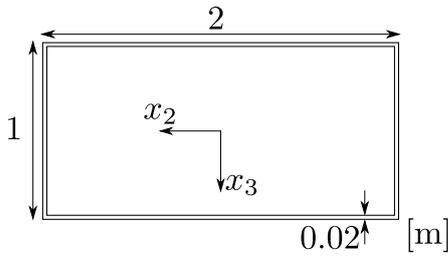


図-2 解析対象の梁の断面図

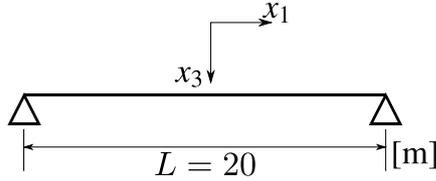


図-3 荷重・拘束条件

$$\begin{aligned}
 K_b &:= \int_A E(x_3)^2 dA, & K_s &:= \int_A G dA, \\
 R_1 &:= \int_A E x_3 f dA, & R_2 &:= \int_A E f^2 dA, \\
 R_3 &:= \int_A G \{(f_2)^2 + (f_3)^2\} dA, & R_4 &:= \int_A G f_3 dA \\
 L_1 &:= \int_A \rho (x_3)^2 dA, & L_2 &:= \int_A \rho dA, \\
 L_3 &:= \int_A \rho x_3 f dA, & L_4 &:= \int_A \rho f^2 dA, \\
 \bar{M} &:= \int_A x_3 p_1 dA, & \bar{D} &:= \int_A p_1 f dA, & \bar{Q} &:= \int_A p_3 dA
 \end{aligned} \tag{8}$$

と定義した。

式(7)の  $\delta u_3$ ,  $\delta \tilde{y}$ ,  $\delta g$  に関する項を取り出し、それぞれ部分積分を行うと、強形式の支配方程式は、

$$K_b \theta''' + R_1 g'' - L_1 \dot{\theta}' - L_3 \dot{g}' - L_2 \ddot{u}_3 + q = 0 \tag{9}$$

$$-K_b \theta'' + R_1 g'' + K_s \tilde{y} + R_4 g + L_1 \ddot{\theta} + L_3 \ddot{g} = 0 \tag{10}$$

$$-R_1 \theta'' - R_2 g'' + R_4 \tilde{y} + R_3 g + L_3 \ddot{\theta} + L_4 \ddot{g} = 0 \tag{11}$$

となる。

### 3. 箱断面梁による精度検証

解析対象は箱桁とし、断面図を図-2に示す。なお、板厚はフランジ、ウェブともに 20 mm とした。図-3に示すように、支間長は  $L = 20$  m とし、端部で  $x_3$  方向に拘束した。また、Young 率は  $2.0 \times 10^{11}$  N/m<sup>2</sup>、Poisson 比は 0、密度は 1000 kg/m<sup>3</sup> とした。

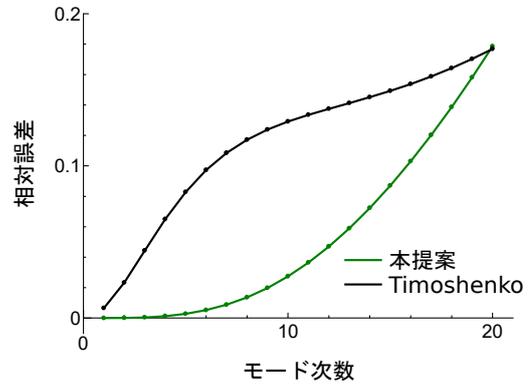


図-4 モードと固有振動数の相対誤差

連続体要素のみを用いたモデル (solid モデル) の結果を参照解として、本手法に基づく梁要素と、Timoshenko 梁要素の解析結果を比較した。なお、Timoshenko 梁のせん断補正係数  $\kappa$  は、せん断遅れを拘束したときの代表体積要素のせん断力を  $Q$  と横せん断ひずみ  $\tilde{\gamma}$  の関係から設定した<sup>5)</sup>。

解析モデルの要素分割は、連続体要素には 8 節点 6 面体アイソパラメトリック要素を用い、要素分割は板厚方向、 $x_1$  方向ともに 20 mm とした。また、solid モデルのフランジのたわみを拘束するために、フランジのヤング率  $E_2$  とせん断弾性係数  $G_{23}$  の値を大きく設定した。梁要素はすべて  $x_1$  方向に要素長を  $l = 20$  mm とした。

上記のモデルを固有振動解析したときのモード次数と固有振動数の参照解との相対誤差を図-4に示す。図-4より、モード次数が小さいとき、本提案はTimoshenko モデルと比較して固有振動数が参照解に近いが、次数が大きくなるにつれてTimoshenko モデルが本提案よりも参照解に近くなっていることが確認できる。これは、モードの次数が大きくなると曲げの波長が短くなることで、断面変形が拘束されせん断剛性が大きくなるため、Timoshenko 梁のせん断剛性が実際よりも小さく評価されていることが原因だと考えられる。

### 参考文献

- 1) 齊木 功, 西井大樹, 山本剛大: 任意断面梁のせん断遅れを考慮できる梁要素, 日本計算工学会論文集, Vol.2018, p.20180013, 2018.
- 2) 齊木 功, 鄭 勳, 山本剛大: 断面変形を梁のせん断変形と独立に考慮した梁理論, 土木学会論文集 A2, Vol.75, pp.I.3-I.12, 2019.
- 3) Thomas, J. and Abbas, B. A.: Finite element model for dynamic analysis of Timoshenko beam, *J. Sound Vibr.*, Vol.41, pp.291-299, 1975.
- 4) Han, S. M., Benaroya, H. and Wey, T.: Dynamics of transversely vibrating beams using four engineering theories, *J. Sound Vibr.*, Vol.225, pp.935-988, 1999.
- 5) 齊木 功, 新井晃朋, 山本剛大, 岩熊哲夫: 非均質断面梁のせん断剛性評価に関する一考察 土木学会論文集 A2, Vol.73, pp.I.23-I.31.