

摩擦構成則に対する台形公式を用いた陰的接触力更新アルゴリズムの構築

東北大学工学部

学生員 ○ 遠澤 梨佳

東北大学大学院工学研究科

正 員 山田 正太郎

東北大学大学院工学研究科

学生員 岡部 開

東北大学大学院工学研究科

正 員 京谷 孝史

1. はじめに

本研究は、尾崎ら (2007) による時間依存性を有する弾塑性摩擦構成則の陰的接触力更新アルゴリズムの構築を目的とする。岡部ら (2020) の後退差分近似を適用したリターンマッピングでは時間増分を十分に大きく設定することができないため、新たに台形公式を適用したアルゴリズムを構築し、これを用いてスティックスリップ現象の数値的再現を試みた。

2. 弾塑性摩擦モデル

相対変位 $\bar{\mathbf{u}}$ を弾性成分 $\bar{\mathbf{u}}^e$ と塑性成分 $\bar{\mathbf{u}}^p$ に加算分解する。

$$\bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{u}}^e + \bar{\mathbf{u}}^p \quad (1)$$

弾性摩擦則を次式で与える。

$$\mathbf{f} = \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{\mathbf{u}}^e}; \quad \Psi(\bar{\mathbf{u}}^e) = -\frac{\alpha_n}{2}(\bar{u}_n^e)^2 - \frac{\alpha_t}{2}(\bar{u}_t^e)^2 \quad (2)$$

ここで、 Ψ は弾性ひずみエネルギー関数、 $\mathbf{f}$ は接触力である。また、 α_t と α_n は弾性定数であり、 $\bar{u}_t^e$ と $\bar{u}_n^e$ はそれぞれ $\bar{\mathbf{u}}^e$ の水平方向成分と鉛直方向成分の大きさである。摩擦力 f_t と接触圧力 f_n は次式で与えられる。

$$f_t = \alpha_t \bar{u}_t^e \quad (3)$$

$$f_n = \alpha_n \bar{u}_n^e \quad (4)$$

本研究で用いる弾塑性摩擦モデルでは、動摩擦係数と静止摩擦係数の違いを考慮するため、摩擦係数を $\mu_k \leq \mu \leq \mu_s$ を満たす変数とする。ここで、 μ_k は動摩擦係数、 μ_s は静止摩擦係数である。 μ の発展則は以下のように与える。右辺の第一項は塑性すべりに起因する μ の減少項であり、第二項は時間経過に起因する μ の増加項である。

$$\dot{\mu} = V_k(\mu)\|\dot{\bar{\mathbf{u}}}^p\| + V_s(\mu) \quad (5)$$

$V_k(\mu)$ と $V_s(\mu)$ の具体形を次式で与える。

$$\begin{cases} V_k(\mu) = -\kappa(\mu - \mu_k) \\ V_s(\mu) = \xi(\mu_s - \mu) \end{cases} \quad (6)$$

ここで、 κ は凝着解消指数、 ξ は凝着発達指数である。

このとき、正規塑性すべり面は次式で与えられる。

$$\hat{\mathbf{f}}_t = \mu f_n \quad (7)$$

また当モデルでは、滑らかな弾塑性遷移や繰り返し負荷による微小な塑性すべりの表現を目的に、下塑性すべり面（下負荷面）の概念（図-1）を導入する。

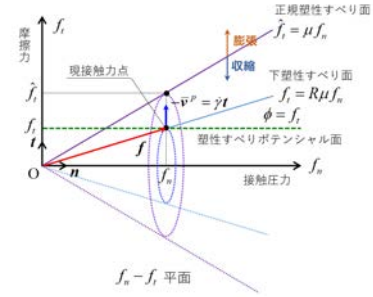


図-1 弾塑性摩擦モデル

f_n 面上における正規塑性すべり面に対する下塑性すべり面の相似比を R とすると、下塑性すべり面は次式で与えられる。

$$f_t = R\mu f_n \quad (8)$$

R の発展則を次式で与える。

$$\dot{R} = U(R)\|\dot{\bar{\mathbf{u}}}^p\|; \quad U(R) = m \frac{1-R}{R} \quad (9)$$

塑性すべり則は次式で表される。

$$\dot{\bar{\mathbf{u}}}^p = -\dot{\gamma} \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{f}} = -\dot{\gamma} \mathbf{t}; \quad \phi = f_t \quad (10)$$

負荷基準は $\dot{\gamma} > 0$ であり、塑性すべり関数は以下のように定義する。

$$\Phi(\mathbf{f}, \mu, R) = f_t - R\mu f_n \quad (11)$$

3. 陰的接触力更新アルゴリズム

本研究では、台形公式を適用して陰的接触力更新アルゴリズムを構築する。ここで、 $\bar{\mathbf{u}}_{n+1/2}^e$ 、 $\mu_{n+1/2}$ 、 $R_{n+1/2}$ を以下のように定義する。

$$\bar{\mathbf{u}}_{n+1/2}^e = \bar{\mathbf{u}}_n^e + \frac{\Delta t}{2}(\dot{\bar{\mathbf{u}}}^e_n + \dot{\bar{\mathbf{u}}}^e_{n+1}) \quad (12)$$

$$\mu_{n+1/2} = \mu_n + \frac{\Delta t}{2}(\dot{\gamma}_n V_k(\mu_n) + V_s(\mu_n)) \quad (13)$$

$$R_{n+1/2} = R_n + \frac{\Delta t}{2}\dot{\gamma}_n U(R_n) \quad (14)$$

更新アルゴリズムは以下の手順で構成される。

Key Words: 摩擦、スティックスリップ現象、弾塑性、陰的接触力更新アルゴリズム

〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06, TEL 022-795-7489

(1) 試行弾性計算

試行弾性計算は以下ようになる。

$$\bar{\mathbf{u}}_{n+1}^{e(\text{trial})} = \bar{\mathbf{u}}_{n+1/2}^e + \frac{\Delta t}{2} \dot{\bar{\mathbf{u}}}_{n+1} \quad (15)$$

$$\mu_{n+1}^{(\text{trial})} = \mu_{n+1/2} + \frac{\Delta t}{2} V_s(\mu_{n+1}^{(\text{trial})}) \quad (16)$$

$$\mathbf{f}_{n+1}^{(\text{trial})} = \left. \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{\mathbf{u}}} \right|_{n+1}^{(\text{trial})} \quad (17)$$

μ は除荷時も発展することに注意する。

(2) 負荷判定

$\Phi(\mathbf{f}_{n+1}^{(\text{trial})}, \mu_{n+1}^{(\text{trial})}, R_{n+1/2}) \leq 0$ ならば、試行弾性計算で得られた値をそのステップでの値として更新する。

$$\mathbf{f}_{n+1} = \mathbf{f}_{n+1}^{(\text{trial})} \quad (18)$$

$$\bar{\mathbf{u}}_{n+1}^e = \bar{\mathbf{u}}_{n+1}^{e(\text{trial})} \quad (19)$$

$$\mu_{n+1} = \mu_{n+1}^{(\text{trial})} \quad (20)$$

$$\dot{\gamma}_{n+1} = 0 \quad (21)$$

R_{n+1} は、以下の式から算出する。

$$\Phi(\mathbf{f}_{n+1}^{(\text{trial})}, \mu_{n+1}^{(\text{trial})}, R_{n+1}) = 0 \quad (22)$$

(3) 塑性修正計算

塑性すべりが発生した場合、 $\bar{\mathbf{u}}_{n+1}^e, \dot{\gamma}_{n+1}, \mu_{n+1}, R_{n+1}$ を未知数とする以下の代数方程式を Newton-Raphson 法で解く。

$$\bar{\mathbf{u}}_{n+1}^e = \bar{\mathbf{u}}_{n+1}^{e(\text{trial})} + \frac{\Delta t}{2} \dot{\gamma}_{n+1} \quad (23)$$

$$\mu_{n+1} = \mu_{n+1/2} + \frac{\Delta t}{2} (\dot{\gamma}_{n+1} V_k(\mu_{n+1}) + V_s(\mu_{n+1})) \quad (24)$$

$$R_{n+1} = R_{n+1/2} + \frac{\Delta t}{2} \dot{\gamma}_{n+1} U(R_{n+1}) \quad (25)$$

$$\Phi(\mathbf{f}_{n+1}, \mu_{n+1}, R_{n+1}) = 0 \quad (26)$$

接触力は次式で表される。

$$\mathbf{f}_{n+1} = \left. \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{\mathbf{u}}} \right|_{n+1} \quad (27)$$

Consistent 接線係数は以下ようになる。

$$\tilde{\mathbf{C}}_{n+1}^{ep} = -\alpha_n \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} - \tilde{\alpha}_t (\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) - (\alpha_t - \tilde{\alpha}_t) \mathbf{t}_{n+1}^{(\text{trial})} \otimes \mathbf{t}_{n+1}^{(\text{trial})} - \frac{\alpha_t \mathbf{t}_{n+1}^{(\text{trial})} \otimes (\alpha_n R_{n+1} \mu_{n+1} \mathbf{n} - \alpha_t \mathbf{t}_{n+1}^{(\text{trial})})}{\alpha_t + R_{n+1} \tilde{V}_{k,n+1} f_{n+1}^{(\text{trial})} + \tilde{U}_{n+1} \mu_{n+1} f_{n+1}^{(\text{trial})}} \quad (28)$$

$$\tilde{\alpha}_t = \alpha_t \left\{ 1 - (\Delta \gamma \alpha_t / f_{n+1}^{(\text{trial})}) \right\} \quad (29)$$

$$\tilde{V}_{k,n+1} = \frac{V_k(\mu_{n+1})}{1 - (\Delta t/2) \{ \dot{\gamma}_{n+1} V'_k(\mu_{n+1}) + V'_s(\mu_{n+1}) \}} \quad (30)$$

$$\tilde{U}_{n+1} = \frac{U(R_{n+1})}{1 - (\Delta t/2) \dot{\gamma}_{n+1} U'(R_{n+1})} \quad (31)$$

4. 解析対象となるモデル

本研究では図-2 に示すような解析モデルを想定した。

このモデルの運動方程式は次式で与えられる。

$$M \ddot{\bar{u}}_i(t) = K(Vt - \bar{u}_i(t)) - S f_i(t) \quad (32)$$

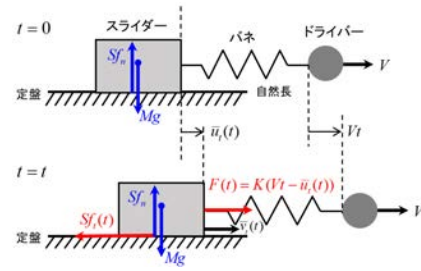


図-2 解析モデル

ここで、 M はスライダの質量、 K はばね定数、 V はドライバーの速さ、 S はスライダーと底盤の見かけの接触面積である。 $f_i(t)$ は上述した計算より求めた摩擦力である。

この運動方程式に台形公式を適用し、各ステップの終了時刻において式 (32) を立てた。この非線形方程式を Newton-Raphson 法により解く。また、収束計算の際に、上述したアルゴリズムに整合する接線係数 (28) を用いて線形化方程式 (32) を解く。

5. 解析結果

設定し得る Δt の最大値は、台形公式を適用したアルゴリズムでは $1.3 \times 10^{-2} \text{s}$ 、後退差分近似を適用したアルゴリズムでは $2.7 \times 10^{-4} \text{s}$ であり、約 48 倍の増分を設定できるようになった。また、構築したアルゴリズムを用いてスティックスリップ現象を再現したところ、図-3 より台形公式を適用した場合の方が Δt を変化させても影響を受けにくいことを見て取れる。

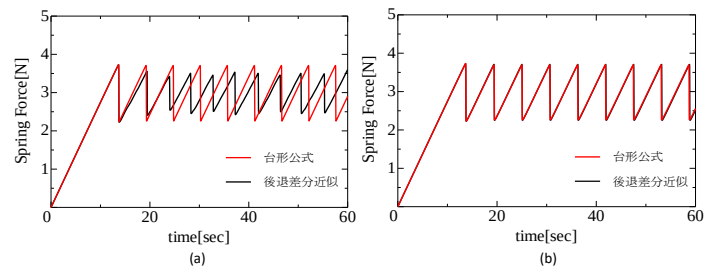


図-3 計算精度の検証: (a) $\Delta t = 10^{-4} \text{s}$; (b) $\Delta t = 10^{-5} \text{s}$

6. 結論

台形公式を適用した陰的接触力更新アルゴリズムは、後退差分近似を適用する場合に比べて、時間増分をより大きく設定してスティックスリップ現象を再現することができた。また、このアルゴリズムは安定性に加え、高い精度を有していることが分かった。

参考文献

- 尾崎伸吾, 橋口公一, 陳玳行: 時間依存性摩擦構成式を用いたスティック・スリップ運動の安定性に関する検討, 応用力学論文集 Vol.10, pp445-455, 2007.
- 岡部開, 山田正太郎, 京谷孝史, 松原成志朗: 弾塑性摩擦モデルの陰的摩擦力更新アルゴリズムの構築とスティックスリップ現象の再現, 土木学会東北支部技術研究発表会 講演概要集 I-36, 2020.