

Poisson 効果による断面変形を考慮した一般化梁の定式化とその有限要素の開発

東北大学大学院工学研究科 学生会員 ○田淵 航
東北大学大学院工学研究科 正員 齊木 功

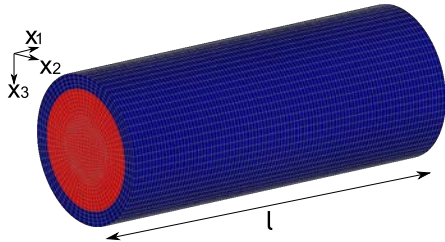


図-1 解析対象と座標・領域の設定

1. はじめに

梁理論は部材が細長く断面変形しないという仮定の上に成り立っているが、実務で扱う部材は必ずしも細長くないため、断面変形を考慮することで梁理論の精度を向上させることは有用である。齊木・鄭¹⁾は有限要素離散化した代表体積要素に単位横せん断変形を与えることで得られる断面変形モードを変位場に組み込んだ梁理論を提案している。この手法を用いれば、非均質かつ任意形状の断面の横せん断変形とせん断遅れを統一的に考慮することが可能である。

積層梁のような、Poisson 比の異なる材料を組み合わせて作られた非均質断面を有する梁の変形においては、Poisson 効果の影響を無視できないことが予想される。Schaefer et al.²⁾は梁構造物のひずみの測定値から Poisson 効果を考慮した梁の形状を再構成する手法を提案しているが、非均質断面梁は対象としていない。

本研究では齊木・鄭¹⁾の研究に倣い、Poisson 効果による断面変形を考慮した梁理論を提案する。

2. Poisson 効果を考慮した梁理論の定式化

図-1 に示すような長さ l の長さ方向に一樣な任意形状断面の梁を解析対象とする。梁軸方向を x_1 、梁軸直角水平方向を x_2 、鉛直方向を x_3 とする正規直交座標系を設定する。解析対象の梁軸方向領域を $L = \{x_1 | 0 \leq x_1 \leq l\}$ 、断面の領域を S とする。断面に x_2 軸周りの曲げのみが作用したときの中立軸と x_3 軸周りの曲げのみが作用したときの中立軸との交点を x_2, x_3 の原点とする。

齊木・鄭¹⁾は任意形状断面の全断面領域において、せん断遅れに起因する軸方向変位と横せん断に起因する軸方向変位の両者を統合して断面変形の変位場を $f_s(x_2, x_3)$ と定義することを提案している。本論文で

はこの変位場に加えて、Poisson 効果による面内方向の断面変形の変位場を考慮することを提案する。

梁の断面の平均 x_1 軸方向変位を u_1 、平均たわみを $u_3(x_1)$ 、回転を $\theta(x_1)$ 、せん断遅れと横せん断に起因する軸方向の断面変形の変位場 $f_s(x_2, x_3)$ に対する一般化変位を $g_s(x_1)$ 、Poisson 効果に起因する曲げによる面内方向の断面変形の変位場 $f_b(x_2, x_3)$ (x_2 方向の成分 f_{b2} と x_3 方向の成分 f_{b3} を持つ) に対する一般化変位を $g_b(x_1)$ 、Poisson 効果に起因する軸力による面内方向の断面変形の変位場 $f_a(x_2, x_3)$ (x_2 方向の成分 f_{a2} と x_3 方向の成分 f_{a3} を持つ) に対する一般化変位を $g_a(x_1)$ とすると、梁の x_1, x_2, x_3 方向変位場はそれぞれ

$$u_1 = u_1(x_1) + x_3\theta(x_1) + f_s(x_2, x_3)g_s(x_1) \quad (1)$$

$$u_2 = f_{b2}(x_2, x_3)g_b(x_1) + f_{a2}(x_2, x_3)g_a(x_1) \quad (2)$$

$$u_3 = u_3(x_1) + f_{b3}(x_2, x_3)g_b(x_1) + f_{a3}(x_2, x_3)g_a(x_1) \quad (3)$$

と表すことができる。

梁の断面の平均的な横せん断変形 $\tilde{\gamma}(x_1)$ を Timoshenko 梁と同様に断面の回転とたわみ角の差として

$$\tilde{\gamma}(x_1) := \theta(x_1) - (-u_3(x_1))' \quad (4)$$

と定義する。ここで、 $:=$ は定義、 $(\cdot)'$ は x_1 に関する導関数を表す。

以上に示す変位場から梁の全ポテンシャルエネルギーを求め、全ポテンシャルエネルギー停留原理を用いることで、 $u_1, u_3, \theta, g_s, g_b, g_a$ に関する以下の支配方程式

$$K_a u_1' + R_{14} \theta' + R_{15} g_s' + R_{16} g_b + R_{17} g_a - N = 0 \quad (5)$$

$$-R_{14} u_1' - K_A \theta' - R_{18} g_s' - R_{6} g_b - R_{18} g_a + M = 0 \quad (6)$$

$$\begin{aligned} & -R_{14} u_1'' - K_A \theta'' + K_S \tilde{\gamma} + R_4 g_s \\ & - R_1 g'' + (R_7 - R_6) g_b' + (R_{19} - R_{18}) g_a' = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} & -R_{15} u_1'' - R_1 \theta'' + R_4 \tilde{\gamma} + R_3 g_s \\ & - R_2 g'' + (R_9 - R_8) g_b' + (R_{21} - R_{20}) g_a' = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} & R_{16} u_1' + R_6 \theta' - R_7 \tilde{\gamma}' \\ & + (R_8 - R_9) g_s' + (R_{11} + R_{12} + R_{13}) g_b \\ & - R_{10} g_b'' + (R_{22} + R_{23} + R_{24}) g_a - R_{25} g_a'' = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} & R_{17} u_1'' + R_{18} \theta' - R_{19} \tilde{\gamma}' \\ & + (R_{20} - R_{21}) g_s' + (R_{22} + R_{23} + R_{24}) g_b \\ & - R_{25} g_b'' + (R_{27} + R_{28} + R_{29}) g_a - R_{26} g_a'' = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

Key Words: Poisson 効果, Timoshenko 梁, 断面変形, せん断遅れ, 横せん断

〒980-0845 宮城県仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06 東北大学大学院工学研究科土木工学専攻構造強度学研究室

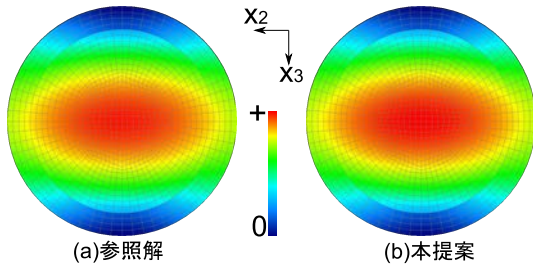
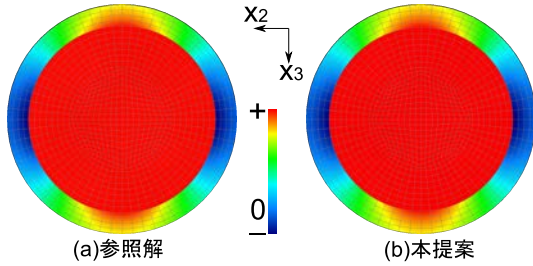


図-2 曲げを受ける梁の断面の横せん断ひずみ分布

図-3 一様圧縮を受ける梁の断面の x_2 方向ひずみ分布

が得られる．ここで N は軸力， M は曲げモーメントを表す．また， K_S ， K_a ， K_A はそれぞれせん断剛性，Poisson 変形を拘束した際の軸剛性，Poisson 変形を拘束した際の曲げ剛性であり， R_i ($i = 1, \dots, 4, 6, \dots, 29$) は断面変形に関するパラメタである．これらのパラメタの値は代表体積要素の有限要素解析および数値積分で求める．

3. 結果と考察

図-1 に示す円形非均質断面の梁を解析対象として，提案した梁理論の精度を検証する．赤色で示す円柱部の材料を材料 1，青色で示す円管部の材料を材料 2 とした．材料はともに等方弾性体とし，Young 率を $E_1 = E_2 = 200\text{GPa}$ とした．材料 1 の Poisson 比は $\nu_1 = 0.49$ ，材料 2 の Poisson 比は $\nu_2 = 0$ とした．また，寸法については，内径を 0.4m ，外径を 0.5m とした．

代表体積要素は 1 次 6 面体アイソパラメトリック要素を用いて離散化した．支配方程式に含まれるパラメタは代表体積要素に単位横せん断変形，曲げ変形，軸ひずみを与えることで得られる断面変形モードを用いて求める¹⁾．代表体積要素の有限要素解析から得られる断面の曲げ剛性は，Young 率と断面二次モーメントの積で求められる曲げ剛性よりも 7.4 % ほど大きく，軸剛性は，Young 率と断面積の積で求められる軸剛性よりも 6.7 % ほど大きい．このことから，Poisson 効果を考慮していない従来の手法は図-1 に示すような非均質断面の曲げ剛性や軸剛性を過小評価してしまうことが確認できる．

両端固定梁を対象とし，通常の連続体ソリッド要素による数値解析結果を参照解とする．本提案手法によ

る解は，式 (5)～(10) を有限要素離散化し，数値的に求めている．本提案手法による数値解を参照解と比較してその精度・妥当性を評価する．橋長 $l = 4.8\text{m}$ とし，細長比は約 19 である．比較対象としたソリッド要素によるモデルは，代表体積要素と同じ要素寸法で要素分割を行い，両端の全ての節点を完全拘束することで固定端のモデル化を行った．

図-2 は梁の右端に $u_3 = 0.8\text{m}$ の強制変位を与えた際の $x_1 = 1.8\text{m}$ （梁の左端から橋長の 3/8 の位置）の断面における横せん断ひずみ γ_{13} 分布である．参照解と本手法による解は定性的に一致していることがわかる．図-2 に示す断面の横せん断ひずみについて本提案と参照解との相対差 L^2 ノルムを求めると約 1.4 % となっている．同位置断面の横せん断ひずみについて斉木・鄭¹⁾ の手法による解と参照解との相対差 L^2 ノルムを求めると約 7.3 % となっており，本手法は Poisson 効果を考慮していない斉木・鄭¹⁾ の手法と比較して精度が向上していることがわかる．ただし，断面 i の相対差 L^2 ノルム δ_i は

$$\delta_i := \sqrt{\frac{\int_S (\beta_p - \beta_s)^2 dS}{\left(\sum_{i=1}^n \int_S \beta_s^2 dS\right) / n}} \quad (11)$$

と定義した．ここで， β_s は参照解， β_p は各手法による解， n は断面の数を表す．分母は参照解の各断面ごとの L^2 ノルムの平均を意味している．

図-3 は梁の右端に $u_1 = -0.8\text{m}$ の強制変位を与えた際の $x_1 = 1.8\text{m}$ の断面における x_2 方向ひずみ ϵ_{22} 分布である．参照解と本手法による解は定性的に一致していることがわかる．本手法では，斉木・鄭¹⁾ の手法では表現できない Poisson 効果による断面内のひずみを表現することが可能である．

4. 結論

本論文では Poisson 効果を考慮可能な梁理論を構築した．非均質断面梁に対して本理論を適用し，連続体要素による数値解析結果を参照解として比較を行った．その結果，Poisson 効果を考慮していない斉木・鄭¹⁾ の手法と比較して精度が改善されることを示した．

参考文献

- 1) 斉木 功，鄭 勲：せん断遅れと横せん断による断面変形を統一的に考慮した梁理論，土木学会論文集 A2，Vol.77，No.1，pp.1-11，2021．
- 2) Schaefer, P. -L., Chagnon, G., Moreau-Gaudry, A. : 3D small strain large deflection beam shape sensing including poisson effect, *Engineering Structures*, Vol.209, 109948, 2020.