空間的 Waiting-Line オークションモデルの開発

東北大学工学部建築・社会環境工学科 社会システム計画学研究室 学生会員 浅川 雅知
東北大学大学院情報科学研究科 社会システム計画学研究室 正会員 福本 潤也

1.研究目的

価格によらない代表的な配分メカニズムの 1 つに早い者勝ちメカニズムがある．早い者勝ちメカニズムは Waiting-Line オークション（WL オークション）としてモデル化できる．WL オークションでは，消費者は財・サービスの配布地点で列に並んで待ち，早く並んだ順番に財・サービスを受け取る．最初に WL オークション問題を定式化したのは Holt and Sherman(1982)である．WL オークション問題を不完備情報ゲームとして定式化して均衡解を導出した． M 個の非分割財を N 人の消費者に配分する状況を分析している．

先行研究では空間要素は捨象されてきた．例えば，財・サービスを複数の地点で配布する状況は分析できない．WL オークションモデルに空間要素を取り入れた空間的 WL オークションモデルを開発することが本研究の目的である．

2.非空間的 WL オークションモデル

最初に，非空間的な WL オークションモデルを定式化する． N 人の同質な消費者に M 個の財を配分する状況を考える．

消費者は最大で財を 1 個だけ受け取る．財は時刻 $t=0$ に配分される．消費者が財の配分場所に到着する時刻を $t_i^{'}(<0)$ で表す．財から得る利得を，財の配分場所へ移動するためのコストを k で表す(ただし，$a-k$)．以降は意味解釈の都合上，時間軸を逆転させて $t_i=-t_i^{'}$ とする．純粋戦略均衡は存在せず混合戦略均衡のみが存在する．消費者全員が同じ戦略をとる対称均衡の場合，ナッシュ均衡戦略と均衡利得は以下の非線形相補性条件により定義される．

$$\begin{cases} g_N(t)\geq 0 \\ \lambda_N-(F_N(t)a-t-k)\geq 0 \\ g_N(t)\{\lambda_N-(F_N(t)a-t-k)\}=0 \end{cases} \quad {}^{\forall}t=0 \qquad (1)$$

$$\begin{cases} \lambda_N\geq 0 \\ 1-\int_0^{\infty} g_N(s)ds\geq 0 \\ \lambda_N\{1-\int_0^{\infty} g_N(s)ds\}=0 \end{cases} \qquad (2)$$

式(1)-(2)において $g_N(t)$ は均衡戦略（消費者が列に並ぶ時間の確率密度関数），λ_N は均衡利得を表している．$g_N(t)$ の分布関数を $G_N(t)$ とする． $G_N(0)$ は列に並ばない確率を表している． $F_N(t)$ は確率分布関数 $G_N(t)$ に従う $N-1$ 個の独立な確率変数の第 M 順序統計量の確率分布関数であり，以下の通り表される．

$$F_N(t)=\sum_{s=0}^{M-1} {}_{N-1}C_s\{G_N(t)\}^{N-1-s}\{1-G_N(t)\}^s \qquad (3)$$

式(1)は，期待効用が最大となる t を消費者が選択することを意味する．式(2)は均衡利得が 0 のときに配布場所に並ばない確率が正の値になることを意味する．

3.数値解法

数値的に均衡解を求めるため，$\Delta t\equiv\frac{a-k}{L}$ と定義し，連続時間を $T=[t_{-1},t_0)\cup[t_0,t_1)\cup\cdots\cup[t_{m-1},t_m)$ と離散化して表現する．

離散時間上のモデルにおける確率密度関数で表現した選択行動を $\mathbf{g}=(g_0,...,g_L)$ とし，確率分布関数で表現した選択行動を $\mathbf{G}=(G_0,...,G_L)$ とする．離散時間上でのモデルにおける財の受取確率を $\mathbf{F}=(F_1,...,F_L)$ で表し，F_l を以下の式で定義する．

$$F_l=\sum_{s=0}^{M-1}\sum_{r=0}^{N-1-s} {}_{N-1}C_s\,{}_{N-1-s}C_r(\gamma_l)^s(g_l)^r(1-\gamma_{l-1})^{N-1-s-r}\delta(M-s\geq 1+r) \qquad (4)$$

ただし， $\gamma_l=\sum_{l'=l+1}^{L} g_{l'}(l=1,...,L-1)$， $\gamma_L=0$．

以上の準備の下，非線形相補性問題を式(5)の通り離散近似できる．

$$\begin{cases} \mathbf{x}\geq 0 \\ \mathbf{Q(x)}\geq 0 \\ \mathbf{x}\cdot\mathbf{Q(x)}=0 \end{cases} \qquad (5)$$

キーワード：WL オークション，ナッシュ均衡
連絡先：〒980-8579 宮城県仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06　東北大学大学院情報科学研究科　福本　潤也

図-1 時間の離散化

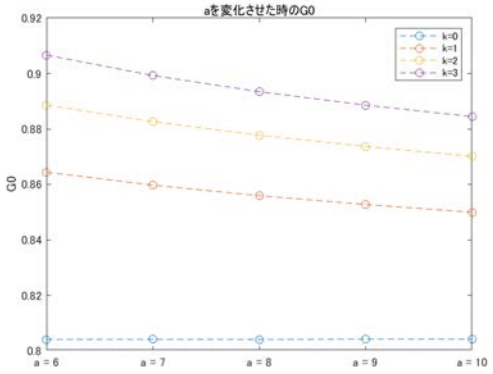

図-2 G_0 の変化

ただし，$\mathbf{x}=\begin{bmatrix}\mathbf{g}\\ \lambda\end{bmatrix}$，$\mathbf{Q(x)}=\begin{bmatrix}\lambda\mathbf{i}-\mathbf{F}a+(\mathbf{t}-\dfrac{\Delta t}{2}\mathbf{i})+k\mathbf{i}\\ 1-\mathbf{g}\cdot\mathbf{i}\end{bmatrix}$，$\mathbf{i}$ は要素１の L 次元ベクトルである．

4.ナッシュ均衡の解法

最適化ソルバーを用いてメリット関数を直接最小化することで均衡解を求めることができる．メリット関数として２乗 Fischer-Burmeister 関数を用いる．

$$\psi_{FB}(\mathrm{X})=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\{\sqrt{x_i^2+Q_i(X)^2}-x_i-Q_i(X)\}^2 \quad (6)$$

最適化問題を解いて求めた G_0 の変化を図-2 に示す．図の横軸は a，縦軸は G_0 である．図より財の配分場所への移動コスト k が大きくなるほど列に並ばない確率も大きくなることが分かる．a に着目すると，$k=0$ の場合を除き，a が大きくなるほど並ばない確率が小さくなることが分かる．

5.空間的 WL オークションモデルの定式化

(1) One to Many

N 人の消費者が１カ所に立地し，P 箇所で M^p 個の同質な財が配布される状況を考える（$p=1,\mathrm{K},P$）．各地点への移動時間は異質であり，k^p で表されるとする．この時，均衡条件は以下の通り表される．

$$\begin{cases} g_N^p(t)\ge 0 \\ \lambda_N-(F_N^p(t)a-t-k^p)\ge 0 & {}^\forall t\ge 0,{}^\forall p \\ g_N^p(t)\left\{\lambda_N-(F_N^p(t)a-t-k^p)\right\}=0 \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} \lambda_N\ge 0 \\ 1-\sum_{p=1}^{P}\int_0^\infty g_N^p(s)ds\ge 0 \\ \lambda_N\left\{1-\sum_{p=1}^{P}\int_0^\infty g_N^p(s)ds\right\}=0 \end{cases} \quad (8)$$

ただし，$F_N^p(t)=\sum_{s=0}^{M-1}{}_{N-1}C_s\{H_N^p(t)\}^{N-1-s}\{1-H_N^p(t)\}^s$，$H_N^p(t)=\sum_{p'\neq p}G_N^{p'}(\infty)+G_N^p(t)$ である．

(2) Many to One

N^p 人ずつ消費者が P 箇所に立地し，同質の財が一カ所で配布される状況を考える．各地点からの移動時間は異質であり，k^p で表されるとする．この時，均衡条件は以下の通り表される．

$$\begin{cases} g_N^p(t)\ge 0 \\ \lambda_N^p-(F_N^p(t)a-t-k^p)\ge 0 & {}^\forall t\ge 0,{}^\forall p \\ g_N^p(t)\left\{\lambda_N^p-(F_N^p(t)a-t-k^p)\right\}=0 \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{cases} \lambda_N^p\ge 0 \\ 1-\int_0^\infty g_N^p(s)ds\ge 0 & {}^\forall p \\ \lambda_N^p\left\{1-\int_0^\infty g_N^p(s)ds\right\}=0 \end{cases} \quad (10)$$

ただし，$F_N^p(t)=\sum_{s=0}^{M-1}\sum_{\mathbf{n}\in\Theta_s}\prod_{p'}{}_{N-1}C_s\{G_N^{p'}(t)\}^{\tilde{N}^p(p')-s}\{1-G_N^{p'}(t)\}^s$，$\Theta_s=\{(n^1,\mathrm{K},n^P)\in \mathrm{N}^P \mid \sum_{p'=1}^{P}n^{p'}=s\}$，$\tilde{N}^p(p')$ は $p'=p$ の場合に N^p-1，それ以外の場合に $N^{p'}$ となる変数である．

6.おわりに

非空間的 WL オークションモデルの数値解法を拡張することで空間的 WL オークションモデルについても数値的に均衡解を導出することが可能である．空間的 WL オークションモデルの分析結果については講演時までに整理して報告したい．

参考文献

1) Holt, C.A. and Sherman, R.: Waiting-line auctions: Journal of Political Economy, Vol.90, pp.280-294, 1982.