亜弾性構成則に基づく Cam-clay model の陰的応力更新アルゴリズムの構築

東北大学工学部　学生員　○小松　龍ノ介
東北大学大学院工学研究科　正　員　山田　正太郎
東北大学大学院工学研究科　正　員　京谷　孝史
東北大学大学院工学研究科　正　員　松原　成志朗
東北大学大学院工学研究科　学生員　劉　暁東

1.　はじめに

弾塑性構成則に適用されるリターンマッピングアルゴリズムは，超弾性構成則の使用を前提に構築されることが多い．一方で微小変形理論に基づいて提案された元来の Cam-clay model は弾性成分に圧力依存型の亜弾性構成則を採用する．そこで，本研究では亜弾性構成則を使用する修正 Cam-clay model を対象にリターンマッピングアルゴリズムを構築すると共に，同アルゴリズムに整合する接線係数を導出する．加えて，構築したアルゴリズムが適切に機能するか検証を行う．

2.　Cam-clay model の陰的応力更新アルゴリズム

2.1.　Cam-clay model の基本式

本研究で対象とする Cam-clay model の基本式は，応力とひずみをそれぞれ圧縮を正として，以下のように定式化される．

$$
\begin{cases}
\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p & (1)\\
\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbb{C}^e : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e = \left(\tilde{K} - \dfrac{2}{3}\tilde{G}\right)(\mathrm{tr}\,\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e)\boldsymbol{I} + 2\tilde{G}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e & (2)\\
F = f(p,\eta) - \varepsilon_v^p = 0 & (3)\\
f(p,\eta) = \mathrm{MD}\ln\left(\dfrac{p}{p_{c0}}\right) + \mathrm{MD}\ln\left(\dfrac{\mathrm{M}^2+\eta^2}{\mathrm{M}^2}\right) & (4)\\
\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\Lambda}\dfrac{\partial f(p,\eta)}{\partial \boldsymbol{\sigma}} & (5)
\end{cases}
$$

式(1)はひずみ速度の加算分解式，式(2)は弾性構成則，式(3)と(4)は降伏関数，式(5)は関連流れ則である．$\boldsymbol{\sigma}$，p, q, η をそれぞれ有効応力，平均有効応力，軸差応力，応力比(q/p)を表す．ε_v^p は塑性体積ひずみ，M は限界状態定数，D はダイレイタンシー係数，p_{c0} は初期降伏曲面の大きさ，$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e$，$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$ はそれぞれ弾性及び塑性ひずみ速度，$\dot{\Lambda}$ は塑性乗数である．体積弾性係数 $\tilde{K}$ とせん断弾性係数 $\tilde{K}$，ひいては弾性係数テンソル $\mathbb{C}^e$ は平均有効応力に比例する．

2.2.　リターンマッピングアルゴリズム

各式に含まれる速さを増分に置き換えるとともに，式(2)と(5)を後退差分近似する．加えて $\Delta\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e$，$\Delta\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$ を消去することにより，$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$ 及び n ステップでの各値を既知として n+1 ステップ未知変数 $\left[\boldsymbol{\sigma}_{n+1},\ \Delta\Lambda_{n+1}\right]$ が満たすべき方程式を次の式(6) と (7) のように設定する．

$$
\begin{cases}
\boldsymbol{N}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_{n+1} - \boldsymbol{\sigma}_n - \mathbb{C}^e_{n+1} : \left(\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \Delta\Lambda_{n+1}\dfrac{\partial f(\boldsymbol{\sigma}_{n+1})}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}}\right) = \boldsymbol{0} & (6)\\
F_{n+1} = f(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}) - \varepsilon^p_{v\,n} - \Delta\Lambda_{n+1}\boldsymbol{I} : \dfrac{\partial f(\boldsymbol{\sigma}_{n+1})}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} = 0 & (7)
\end{cases}
$$

試行弾性計算を行い，塑性と判断される場合には，式(6) と (7) を満たすように Newton-Raphson 法により塑性修正計算を行う．式(6) と (7) の線形化方程式から得られる $\Delta\Lambda_{n+1}$ と $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$ の修正量は式(8)，(9)のように表される．

$$
\begin{cases}
\delta(\Delta\Lambda) = \dfrac{F^{(k)}_{n+1} - \left(\partial_\sigma f^{*(k)}_{n+1}\right) : \tilde{\mathbb{C}}^{e(k)}_{n+1} : \boldsymbol{N}^{(k)}_{n+1}}{\left(\partial_\sigma f^{*(k)}_{n+1}\right) : \tilde{\mathbb{C}}^{e*(k)}_{n+1} : \left(\partial_\sigma f^{(k)}_{n+1}\right) + \boldsymbol{I} : \partial_\sigma f^{(k)}_{n+1}} & (8)\\
\delta\boldsymbol{\sigma} = -\tilde{\mathbb{C}}^{e*(k)}_{n+1} : \left[\mathbb{C}^{e(k)-1}_{n+1} : \boldsymbol{N}^{(k)}_{n+1} + \left(\partial_\sigma f^{(k)}_{n+1}\right)\delta(\Delta\Lambda)\right] & (9)
\end{cases}
$$

2.3.　Consistent 接線係数

式(6)と(7)を現在の $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$ まわりに線形化し整理することにより，上記の陰的応力更新アルゴリズムに整合する接線係数 $\tilde{\mathbb{C}}^{ep}_{n+1}$ が以下のように導出される．

$$
\tilde{\mathbb{C}}^{ep}_{n+1} = \tilde{\mathbb{C}}^e_{n+1} - \frac{\tilde{\mathbb{C}}^e_{n+1} : \partial_\sigma f_{n+1} \otimes \tilde{\mathbb{C}}^e_{n+1} : \left(\partial_\sigma \tilde{f}_{n+1}\right)}{\left(\partial_\sigma \tilde{f}_{n+1}\right) : \tilde{\mathbb{C}}^e_{n+1} : \partial_\sigma f_{n+1} + \boldsymbol{I} : \partial_\sigma f_{n+1}} \tag{10}
$$

ここに，

$$
\begin{aligned}
\tilde{\mathbb{C}}^e_{n+1} = &[\mathbb{I} - \partial_\sigma \mathbb{C}^{e\ *}_{n+1*}(\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \Delta\Lambda_{n+1}\partial_\sigma f_{n+1})\\
&+ \Delta\Lambda_{n+1}\partial_{\sigma\sigma} f_{n+1}]^{-1} : \mathbb{C}^e_{n+1}
\end{aligned} \tag{11}
$$

$$
\begin{aligned}
&\left[\partial_\sigma \mathbb{C}^{e\ *}_{n+1*}(\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{(k)}_{n+1} - \Delta\Lambda^{(k)}_{n+1}\partial_\sigma f^{(k)}_{n+1})\right]_{ijkl}\\
&\quad = ([\partial\mathbb{C}^e_{n+1}]_{ijpq} \big/ \partial\sigma_{kl})(\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{(k)}_{n+1} - \Delta\Lambda^{(k)}_{n+1}\partial_\sigma f^{(k)}_{n+1})_{pq}
\end{aligned} \tag{12}
$$

キーワード　Cam-clay model，亜弾性，リターンマッピング，整合接線係数
連絡先　〒980-8579　仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06　TEL 022-795-7126

$$\partial_{\boldsymbol{\sigma}} \tilde{f}_{n+1} = \partial_{\boldsymbol{\sigma}} f_{n+1} - \Delta\Lambda_{n+1} \boldsymbol{I} : \partial_{\boldsymbol{\sigma\sigma}} f_{n+1} \tag{13}$$

である．ただし，$\mathbb{I}$は4階の恒等テンソルであり，$\partial_{\boldsymbol{\sigma}}(\bullet) = \partial(\bullet)/\partial\boldsymbol{\sigma}$，$\partial_{\boldsymbol{\sigma\sigma}}(\bullet) = \partial^2(\bullet)/\partial\boldsymbol{\sigma}\partial\boldsymbol{\sigma}$ である．

3. 数値解析による検証

3.1. 陰的応力更新アルゴリズムの検証

前述のリターンマッピングアルゴリズムについて検証するために，単純せん断変形を示す一様変形場におけるモデルの応答を計算した．表1に計算に用いた材料定数を示す．

表1 材料定数

正規圧密線の切片　N	3.0
限界状態定数　M	1.5
圧縮指数　$\tilde{\lambda}$	0.25
膨潤指数　$\tilde{\kappa}$	0.045
ポアソン比　ν	0.3

図1と図2に，ほぼ正規圧密土と過圧密土に対する計算例をそれぞれ示す．せん断ひずみε_sを1%与えるのに要するステップ数を100,10に変化させて計算を行った．$p-q$関係を表す図中には，非排水せん断時の有効応力経路の理論値も示す．計算値はこの理論値にほぼ合う結果を示している．また，計算値が最終的に限界状態線に到達していることを確認できる．図2より軟化を生じる場合でも正しく負荷判定が行えていることが分かる．増分の取り方が解析結果に大きな影響を与えていないことが分かる．以上の結果から陰的応力更新アルゴリズムが適切に機能することが確かめられた．

4. 結論

本稿では，圧力依存型の亜弾性構成則に基づくCam-clay modelの陰的応力更新アルゴリズムとそのアルゴリズムに整合する接線係数を導出した．また，導出した陰的応力更新アルゴリズムが適切に機能することを確認することができた．

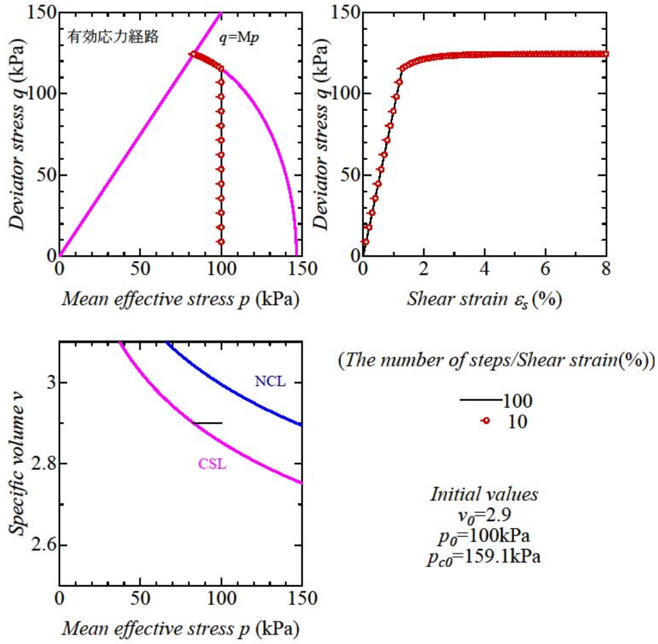

図1 ほぼ正規圧密土の挙動

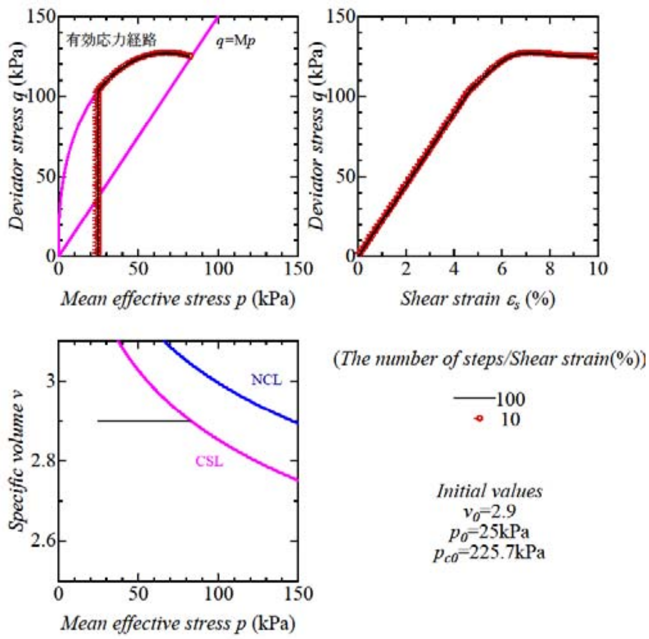

図2 過圧密土の応答