地盤材料を対象とした有限変形弾塑性構成則の応力計算における発展則の級数近似精度

東北大学大学院工学研究科　学生会員　○町島 智大
東北大学工学部建築・社会環境工学科　学生会員　佐藤 祐杜
東北大学大学院工学研究科　学生会員　井口 拓哉
東北大学大学院工学研究科　学生会員　羅 家驊
東北大学大学院工学研究科　正会員　山川 優樹

1. はじめに

地盤材料を対象とした有限変形弾塑性構成則において，陰的差分近似に基づくリターンマッピング・アルゴリズムを用いることで高精度の応力計算が可能である．その際，非線形連立方程式の反復収束計算による求解が必要となる．また，塑性発展則の時間積分ではテンソル指数関数が一般に用いられるが，それを級数表示した場合の計算コストが問題となる．本研究では，塑性発展則の時間積分に着目し，計算精度の検証と計算コストの低減を試みる．方法として，塑性発展則の時間積分においてテンソル指数関数を用いた場合と，テンソル指数関数の高次項を省略した場合について比較を行う．

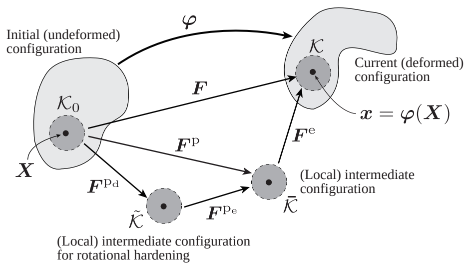
2. 有限変形・回転硬化下負荷面 Cam-clay モデル

(1) 変形勾配テンソルの乗算分解に基づく諸量の定義

全変形勾配 $\boldsymbol{F}$ を弾性部分・塑性部分への乗算分解を仮定し，さらに $\boldsymbol{F}^{\mathrm{p}}$ をエネルギー貯蓄部分である $\boldsymbol{F}^{\mathrm{p_e}}$ とエネルギー消散部分である $\boldsymbol{F}^{\mathrm{p_d}}$ に乗算分解を行う．

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}^{\mathrm{e}}\boldsymbol{F}^{\mathrm{p}}, \quad \boldsymbol{F}^{\mathrm{p}} = \boldsymbol{F}^{\mathrm{p_e}}\boldsymbol{F}^{\mathrm{p_d}} \tag{1}$$

上式により，基準配置 $\mathcal{K}_0$ と現配置 $\mathcal{K}$ に加え，中間配置 $\bar{\mathcal{K}}$ と配置 $\tilde{\mathcal{K}}$, $\hat{\mathcal{K}}$ を新たに導入する．その配置の関係図を**図–1** に示す．



図–1 各配置の関係図

(2) 超弾性構成式

本論文では，Hashiguchi[2)] の提案した超弾性モデルを用いる．超弾性ポテンシャル関数は弾性右 Cauchy-Green 変形テンソル $\bar{\boldsymbol{C}}^{\mathrm{e}} := \boldsymbol{F}^{\mathrm{eT}}\boldsymbol{F}^{\mathrm{e}}$ で偏微分することで第 2Piola–Kirchhoff 応力 $\bar{\boldsymbol{S}}$ を得る．また，せん断弾性係数 $\mu^e(J^e)$ は，弾性体積変化 J^e の関数とすることにより圧力依存性を導入した式 (3) を用いる．

$$\bar{\boldsymbol{S}} = 2\frac{\partial \mathcal{W}^{\mathrm{e}}(\bar{\boldsymbol{C}}^{\mathrm{e}})}{\partial \bar{\boldsymbol{C}}^{\mathrm{e}}} \tag{2}$$

$$\mu^{\mathrm{e}}(J^{\mathrm{e}}) := \mu^{\mathrm{e}}_1 + (\mu^{\mathrm{e}}_0 - \mu^{\mathrm{e}}_1)\left(\frac{J^{\mathrm{e}}}{J^{\mathrm{e}}_0}\right)^{-\alpha/\kappa^*} \tag{3}$$

(3) 中間配置 $\bar{\mathcal{K}}$ を参照する下負荷面関数

中間配置 $\bar{\mathcal{K}}$ を参照する Mandel 応力 $\bar{\boldsymbol{M}} := \bar{\boldsymbol{C}}^{\mathrm{e}}\bar{\boldsymbol{S}}$ を用いて修正応力 $\bar{\boldsymbol{M}}^{\mathrm{mod}}$ を以下のように定義する．

$$\bar{\boldsymbol{M}}^{\mathrm{mod}} =: \bar{\boldsymbol{M}} - (-\bar{P} + P_{\mathrm{t}})\bar{\boldsymbol{M}}^{\mathrm{rot}}_{\mathrm{dev}} \tag{4}$$

また，中間配置 $\bar{\mathcal{K}}$ を参照する修正応力 $\bar{M}^{\mathrm{mod}}$ の 3 不変量 $\bar{P}^{\mathrm{mod}}$, $\bar{Q}^{\mathrm{mod}}$, $\bar{\Theta}^{\mathrm{mod}}$ を用いた $\bar{\boldsymbol{M}}^{\mathrm{rot}}$ の下負荷面関数 f の定義を以下に示す．

$$\begin{aligned} f(\bar{\boldsymbol{M}}, \bar{\boldsymbol{M}}^{\mathrm{rot}}, P_{\mathrm{c}}, R) := \Bigg[& \frac{(\bar{Q}^{\mathrm{mod}})^2}{\left\{M(\bar{\Theta}^{\mathrm{mod}})\right\}^2 - c(\bar{\eta}^{\mathrm{rot}})^2} \\ & + \left[\bar{P}^{\mathrm{mod}} - \left\{\left(1 - \frac{R}{2}\right)P_{\mathrm{t}} + \frac{R}{2}P_{\mathrm{c}}\right\}\right]^2\Bigg]^{1/2} - \frac{R}{2}(P_{\mathrm{t}} - P_{\mathrm{c}}) \end{aligned} \tag{5}$$

(4) 塑性発展則

塑性変形勾配テンソル $\boldsymbol{F}^{\mathrm{p}}$ の発展則は塑性速度勾配テンソル $\bar{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{p}}$ を用いて次の第 1 式で与えられ，これを陰的近似により時間区間 $[t_n, t_{n+1}]$ で時間積分することにより第 2 式を得る．

$$\dot{\boldsymbol{F}}^{\mathrm{p}} = \bar{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{p}}\boldsymbol{F}^{\mathrm{p}} \rightsquigarrow \boldsymbol{F}^{p}_{n+1} = \exp[\bar{\boldsymbol{L}}^{p}_{n+1}\Delta t]\boldsymbol{F}^{p}_{n} \tag{6}$$

ここで，2 階テンソル $\boldsymbol{Z}$ の指数関数は次式の無限級数で表される．

$$\exp \boldsymbol{Z} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\boldsymbol{Z}^k = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{Z} + \frac{1}{2}\boldsymbol{Z}^2 + \frac{1}{6}\boldsymbol{Z}^3 + \ldots \tag{7}$$

実際の数値計算では無限級数のうち有限の項数を採用することになるが，第何項まで採用すべきかについては，次の精度判定により決定した．

$$\frac{1}{k!}\left\|\boldsymbol{Z}^k\right\| < \mathrm{TOL} \tag{8}$$

本研究における数値解析では $\mathrm{TOL} = 1.0 \times 10^{-12}$ とした．また，式 (7) で，2 次以降の項を無視して第 1 項までのみを用いることで後退差分近似になる．

$$\boldsymbol{F}^{\mathrm{p}}_{n+1} = (\boldsymbol{I} + \bar{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{p}}_{n+1}\Delta t)\boldsymbol{F}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{n}} = (\bar{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{p}}_{n+1}\Delta t)\boldsymbol{F}^{\mathrm{p}}_{n} \tag{9}$$

その他の塑性内部状態変数の発展則は紙面の都合上割愛するが，テンソル量の更新式は式 (6) と同様である．

Key Words: 有限変形理論，弾塑性構成則，下負荷面 *Cam-clay* モデル，塑性発展則，テンソル指数関数，リターンマッピング
〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06，東北大学大学院工学研究科土木工学専攻，Phone: 022-795-7420

3.　精度検証解析

(1)　テンソル指数関数と非圧縮性の保持

塑性非圧縮の構成則の場合，式 (6) における塑性体積変形 J^p は，$\det \boldsymbol{F}^{\mathrm{p}}_n = 1, \mathrm{tr}\bar{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{p}}_{n+1} = 0$ とすると，

$$\begin{aligned} J^{\mathrm{p}}_{n+1} = \det \boldsymbol{F}^{\mathrm{p}}_{n+1} &= \det(\exp[\bar{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{p}}_{n+1}\Delta t]) \det \boldsymbol{F}^{\mathrm{p}}_n \\ &= \exp(\mathrm{tr}[\bar{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{p}}_{n+1}\Delta t]) \det \boldsymbol{F}^{\mathrm{p}}_n \\ &= (\exp 0) \det \boldsymbol{F}^{\mathrm{p}}_n = 1 \end{aligned} \tag{10}$$

となり，非圧縮性は保持される．しかし，式 (9) に示した後退差分近似を用いた場合，$\det \boldsymbol{F}^{\mathrm{p}}_n = 1, \mathrm{tr}\bar{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{p}}_{n+1} = 0$ であったとしても，$J^{\mathrm{p}}_{n+1} = 1$ が必ずしも保持されるとは言えない．Vladimirov ら [3] は，金属の硬化挙動を示す有限変形構成則において，塑性発展則の時間積分における近似方法と計算精度について検証し，後退差分近似による精度の問題性を指摘した．そこで，本研究では下負荷面 Cam-clay モデルの限界状態における塑性非圧縮の計算精度について検証する．

(2)　解析条件の設定

本研究では，応力計算の時間積分においてテンソル指数関数を式 (7) を用いて示した場合を Case A，式 (9) を用いて 1 次近似した場合を Case B と設定する．それぞれの条件における応力計算精度の検証を行うため，応力制御・ひずみ制御を用いて非排水三軸圧縮試験を再現した解析を行った．解析方法について，2 つの条件を設定した．

検証① :初期状態から限界状態に達する時の近似精度の影響を検証するため，変形勾配 $\boldsymbol{F}_{33} = 0.25$ を 1000,100,50,20,10 ステップに分割して解析を行う．

検証② :限界状態に達した後の変形解析における近似精度の塑性非圧縮性への影響を検証するため，初めに初期状態から限界状態に達するまで十分に細かいステップ数を設定して解析を行い，その後 1 ステップあたりの変形勾配を $\boldsymbol{F}_{33} = 0.001$〜$0.2$ の間で変化させ，それぞれ解析する．

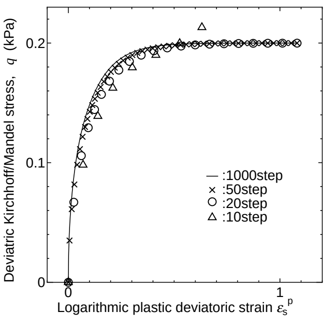
以上の条件で Case A と Case B のそれぞれについて検証を行った．尚，初期状態を規定する変形勾配 $\boldsymbol{F}_0$ は，ここでは $\boldsymbol{F}_0 = \boldsymbol{I}$(初期変形なし) とする．各材料定数及び初期条件は**表–1** に示すものを用いた．

(3)　検証と考察

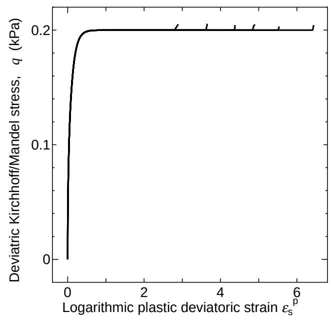
検証①における Case B の応力-ひずみ関係を**図–2**，検証②の Case B の応力-ひずみ関係を**図–3** に示す．大きな変形増分を用いて少ないステップ数で解析を行った場合は応力計算に誤差が生じるため，分割ステップ数の違いによって解析結果に若干の違いがみられるが，Case A と Case B の間に差は生じなかった．次に，検証①における，Case A のテンソル $\bar{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{p}}_{n+1}\Delta t$ のノルムとそれを用いて式 (7) で計算した $\exp(\bar{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{p}}_{n+1}\Delta t)$ とその一次近似値との相対誤差との関係を**図–4** に示す．**図–4** より，今回検証できた範囲では，テンソル指数関数の近似誤差は最大で約 0.05%の誤差が発生しているが，応力-ひずみ関係の結果は無視できる程度の誤差のみにとどまった．以上より，今回検証できた変形増分の範囲では，1 次後退差分近似による体積非圧縮性の不保持の可能性の影響は確認されなかった．その為，今回検証したような 1 ステップでの増分の範囲内では，塑性発展則における近似精度を下げても問題ないと考えられる．

表–1　材料定数及び初期条件（三軸圧縮解析）

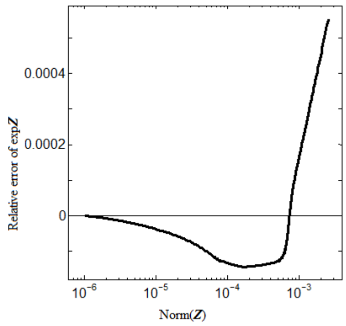
材料定数	値
弾性圧縮指数 $\kappa *$	8.0×10^{-2}
弾塑性圧縮指数 λ^*	3.0×10^{-2}
せん断弾性係数の基準値 μ^{e}_0	600 kPa
せん断弾性係数の圧力依存係数 α	0.8
下負荷面発展係数 u	1.0×10^{-2}
回転硬化限界応力比 M_{r}	1.00
回転硬化の発展係数 b_{r}	0.00
限界応力比（軸対称圧縮状態）M_{TC}	1.20
偏差硬化・軟化境界応力比 $M_{\mathrm{d,\ TC}}$	1.00
基準状態での平均垂直応力 P_0	-100 kPa
過圧密比 OCR	1.00



図–2　応力-ひずみ関係 (検証①，Case B)



図–3　応力-ひずみ関係 (検証②，Case B)



図–4　テンソル $\boldsymbol{Z}$ のノルムと $\exp \boldsymbol{Z}$ の近似精度の関係

参考文献

1) 山川優樹，山口洋介，橋口公一，池田清宏 : 拡張下負荷面 Cam-clay モデルの有限変形に基づく定式化とリターンマッピングを用いた陰的応力更新法. 応用力学論文集,Vol. 13, pp. 411–422, 2010.

2) Hashiguchi, K.: Hypo-elastic and hyper-elastic equations for soils. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Vol. 42, Issue 13, pp. 1554-1564, 2018.

3) Ivaylo N. Vladimirov, Michael P. Pietryga and Stefanie Reese: On the modelling of non-linear kinematic hardd ening at finite strains with application to springback - Comparision of time integrarion algorithms. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 75, Issue 1 pp. 1-28,2008.