

摂動波解の波形および波圧に関する研究

秋田大学 学生会員 ○柄澤 雅生
 秋田大学 正会員 平川 知明
 秋田大学 正会員 齋藤 憲寿

1. はじめに

防波堤の設計に従来の許容応力度設計を適用すると、非合理的な設計断面になる可能性がある。防波堤を合理的な設計をするためには、精度の高い波圧の算定が重要であり、波の解析を詳しく行う必要がある。高木ら¹⁾は重複波の作用が支配的となる非砕波領域に設置される防波堤の波圧の算定方法として、合田ら²⁾の有限振幅重複波理論に基づく第4次近似解（摂動波解）が有効であると提案している。しかし、波形および波圧について実験値と第4次摂動波解を比較すると、波の峰や谷では概ね一致するが、波を時間変化させると波形および波圧に差が生じてしまう。

本研究では、波を時間変化させたときに生じる波形および波圧の差の改善を目的とし、有限振幅重複波理論に基づく摂動波解を第5次、第6次まで拡張して計算を行った。また、水路実験を行い摂動波解との比較を行った。

2. 数値計算

水の波の基礎方程式を(1)～(4)に示す。

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial T} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \Psi}{\partial X} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial Y} \right)^2 \right\} + GY = 0 \text{ on } Y = H, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial Y} = \frac{\partial H}{\partial T} + \frac{\partial \Psi}{\partial X} \frac{\partial H}{\partial X} \text{ on } Y = H, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial Y} = 0 \text{ on } Y = -D. \quad (4)$$

(1)～(4)は順に、ラプラス方程式、水面におけるベルヌーイの式、水面における運動学的条件式、水底条件であり、変数はすべて無次元化されたものである。有次元量と無次元量の対応表を表-1に示す。 κ は波数、 ω は角振動数、 ρ は水の密度である。

表-1 有次元量と無次元量の対応表

	有次元量	無次元量
時間	t	$T = \omega t$
水平、鉛直座標	(x, y)	$(X, Y) = \kappa(x, y)$
水深	h	$D = \kappa h$
重力加速度	g	$G = \kappa g / \omega^2$
速度ポテンシャル	ϕ	$\Psi = \kappa^2 \phi / \omega$
水面変位	η	$H = \kappa \eta$
圧力	p	$P = p / \rho$

ここで、(2)、(3)は非線形項を持つため、厳密解を求めることは困難である。そこで、摂動法を用いて、未知変数 Ψ 、 H 、 G を(5)のように、微小量 ε の冪級数に展開する。次に、各次数の $\Psi^{(m)}$ 、 $H^{(m)}$ 、 $G^{(m)}$ を順に計

算し、未知変数 Ψ 、 H 、 G の近似解を求める。 m は摂動展開の次数である。

$$\Psi = \sum_{m=0}^N \varepsilon^m \Psi^{(m)}, H = \sum_{m=0}^N \varepsilon^m H^{(m)}, G = \sum_{m=0}^N \varepsilon^m G^{(m)}. \quad (5)$$

$\Psi^{(m)}$ 、 $H^{(m)}$ は2重フーリエ級数で、(6)、(7)のように表す。 $A_{j,k}^{(m)}$ 、 $B_{j,k}^{(m)}$ は、フーリエ係数である。フーリエ係数 $A_{j,k}^{(m)}$ 、 $B_{j,k}^{(m)}$ は、(5)が(1)～(4)を満たすように計算する。

$$\Psi^{(m)} = \sum_{j=0}^N \sum_{k=0}^N A_{j,k}^{(m)} \frac{\cosh[k(Z+D)]}{\cosh(kD)} \sin(jT) \cos(kY), \quad (6)$$

$$H^{(m)} = \sum_{j=0}^N \sum_{k=0}^N B_{j,k}^{(m)} \cos(jT) \cos(kZ). \quad (7)$$

波圧 P および波圧分布は、(8)のベルヌーイの式を摂動展開し、(5)で求めた未知変数 Ψ 、 G を代入し、計算する。

$$P = -\frac{\partial \Psi}{\partial T} - \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \Psi}{\partial X} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial Y} \right)^2 \right\} - GY. \quad (8)$$

3. 水路実験

3.1 実験方法

本実験では、造波水路（長さ11 m、幅0.3 m、高さ0.5 m、矩形断面）を使用した。実験水路図を図-1に示す。ピストン型造波板で規則波を起こし、重複波を発生させた。壁面鉛直方向に圧力センサ MS5837-02BA を8個配置した直立堤の模型（高さ0.50 m、幅0.296 m）を水路に設置し、波圧を測定した。直立堤は造波板から8.5 mの位置に、超音波式波高計は造波板から4.5 mの位置と、直立堤の前面に設置した。直立堤に作用する波の様子を見るため、側面から動画の撮影を行った。

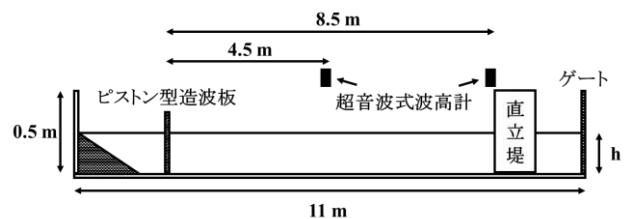


図-1 実験水路

3.2 実験条件

超音波波高計で測定した波形から、代表的な重複波を3周期分取り出し、その平均値を波高 a 、周期 τ とした。実験条件を表-2に示す。

表-2 実験条件

水深 h [m]	波高 a [m]	周期 τ [s]
0.3	0.013～0.085	0.88～3.17

キーワード：摂動展開 波圧分布 重複波

連絡先：(010-8502 秋田県秋田市手形学園町1番1号) TEL 018-889-2366

4. 結果と考察

4.1 実験値と摂動波解の比較

高次の摂動展開が必要となるのは、波高 a が大きい場合と波長 L の大きい場合であると考えられる。図-2は、本実験で波高 a と波長 L が大きい条件：水深波長比 $h/L = 0.0487$ ，周期 $\tau = 3.17$ s，波高水深比 $a/h = 0.180$ における水面変位の時間変化である。縦軸0.00の位置が静水面にあたる。また、本実験では波長 L の算出が難しかったため、図-2では、実験値と摂動波解が一致したものを波長 L とした。

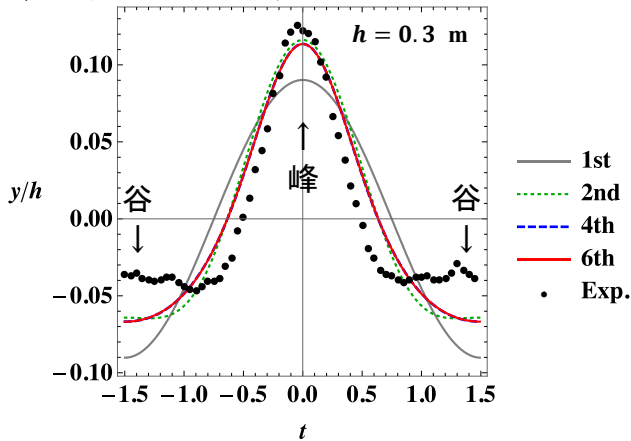


図-2 水面変位の時間変化

(unit: 横軸[s])

図-2を見ると、実験水路で造波可能な範囲において摂動波解は4次で十分収束しており、5次以上の摂動展開では違いが見られなかった。また、実験値と摂動波解を比較すると、波の峰では概ね一致しているが、谷では一致していなかった。この理由は、水路長が短いため、波を定常状態にできなかったことが原因として考えられる。図-2の条件で壁面に作用する波圧分布を図-3に示す。図-3の右半分は波が峰のときの波圧分布であり、左半分は波が谷のときの波圧分布である。また、波圧の時間変化および波圧分布に関しても同様に、4次で十分収束しており、5次以上の摂動展開では違いが見られなかった。

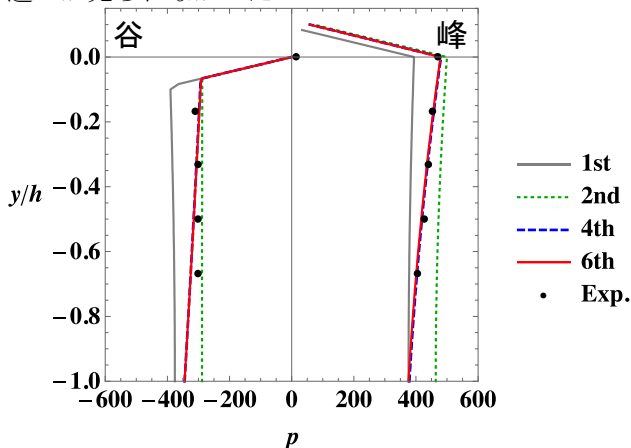


図-3 壁面に作用する波圧分布

(unit: 横軸[Pa])

4.2 高次摂動波解の比較

4次以上の摂動波解の違いを調べるために、図-2, 3の条件から水深 h のみを小さくし、摂動波解を比較し

た。その結果、水深が1/2倍の $h = 0.15$ m 付近で4次以上の摂動波解の違いが生じ始めた。図-4は、水深 $h = 0.15$ m，鉛直距離 $y = -0.1$ m の位置における波圧の時間変化である。

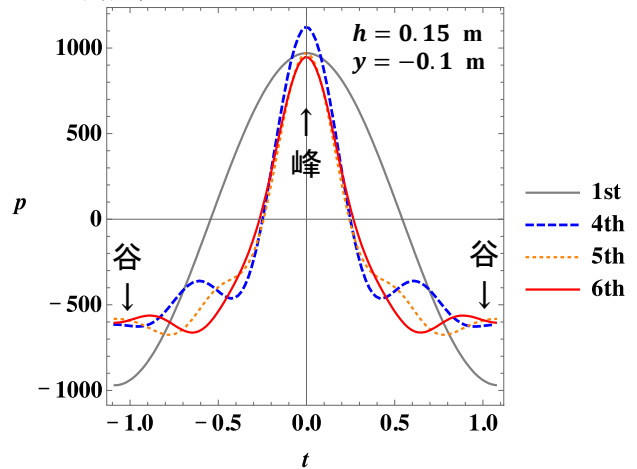


図-4 $h = 0.15$ m, $y = -0.1$ m における波圧の時間変化

(unit: 縦軸[Pa], 横軸[s])

図-4を見ると、波の峰における波圧では4次より高次にすると値が小さくなっている。また、谷における波圧は、4次より高次にしても差があまり見られなかった。これより、波の最大および最小の波圧においては、高次の摂動展開によって近似精度の改善は見られないと考えられる。しかし、波形全体を見ると、波の裾野部分では高次であるほど緩やかになる様子が確認できるため、高次にすることで解が改善されることが期待できる。

5. おわりに

本研究より以下のことが確認できた。

- 1) 今回の水路実験条件：水深波長比 $h/L = 0.0487$ かつ波高水深比 $a/h = 0.180$ 程度では、4次以上の摂動波解において、水面変位の時間変化、波圧の時間変化、波圧分布に大きな変化は見られなかった。
- 2) 水深 $h = 0.15$ m とき：水深波長比 $h/L = 0.0243$ かつ波高水深比 $a/h = 0.361$ 程度では、4次以上の摂動波解に変化が見られ、波の裾野部分は高次であるほど緩やかになり精度改善が期待できるが、波の最大および最小の波圧において改善は見られなかった。

今後、より正確な実験を行うための改善策として、水路長の長い水路を使用することや、波高 a や周期 τ の入力値を大きくしても安定した造波が可能な装置を使用することなどが挙げられる。

参考文献

- 1) 高木泰士, 柴山知也: 大水深地点におけるケーソン式防波堤の信頼性設計手法の提案, 海岸工学論文集, 第53巻, pp. 901-905, 2006.
- 2) 合田良美, 柿崎秀作: 有限振幅重複波ならびにその波圧に関する研究, 港湾技術研究所報告, 第5巻, 10号, pp. 1-57, 1966.